Sobre a noção de completude: Filtros e nets

(A) Seja S um conjunto não vazio. Um *filtro em* S é um subconjunto não vazio $\mathcal{F}$ de $P(S)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
3. Se $F \in \mathcal{F}$ e $A \in P(X)$ é tal que $F \subset A$ então $A \in \mathcal{F}$.

(B) Se $\mathcal{B} \subset P(S)$ é não vazio e satisfaz:

- Todo elemento de $\mathcal{B}$ é não vazio;
- Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ então existe $B \in \mathcal{B}$, $B \subset B_1 \cap B_2$

então

$$\mathcal{F} = \{F \in P(S) : \exists B \in \mathcal{B} : \ B \subset F\}$$

é um filtro em S. Dizemos neste caso que $\mathcal{B}$ é uma *base de* $\mathcal{F}$ ou ainda que $\mathcal{F}$ é gerado por $\mathcal{B}$.

(C) Se $\mathcal{F}$ é um filtro em um espaço topológico X e se $x_0 \in X$ dizemos que $\mathcal{F}$ *converge para* x_0, e escrevemos $\mathcal{F} \to x_0$, se dada $V \in \Phi(x_0)$, o filtro das vizinhanças de x_0, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset V$. Note que se $\mathcal{B}$ é uma base do filtro $\mathcal{F}$ então $\mathcal{F} \to x_0$ se, e somente se, dada $V \in \Phi(x_0)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$.

(D) Seja $\mathfrak{X} = \{x_i\}_{i \in I}$ um net em X. Então a coleção $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ de todos os subconjuntos de X definidos por $B_i = \{x_j : j \geq i\}$ define uma base de um feixe $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ em X. Note que $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \to x$ se, e somente se, $x_i \to x$.

(E) Seja $\mathcal{F}$ um filtro em X. Seja $A \subset X \times \mathcal{F}$ definido por

$$A \doteq \{(x, F) : x \in X, \ F \in \mathcal{F}, x \in F\}.$$

Em A definimos a seguinte relação parcial de ordem: $(x, F) \leq (y, G)$ se $G \subset F$. Defina também $\pi : A \to X$, $\pi(x, F) = x$. Obtemos assim um net $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$ em X. É fácil ver que $\mathcal{F} \to x_0$ se, e somente se, $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}} \to x_0$.

(F) Seja agora E um EVT e $\mathcal{F}$ um filtro em E. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um *filtro de Cauchy* de dada $V \in \Phi_E(0)$ existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset V$. Note

novamente que se $\mathcal{B}$ é uma base do filtro $\mathcal{F}$ então $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy se, e somente se, dada $V \in \Phi(x_0)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B - B \subset V$.
Temos a seguinte proposição:

Proposição 1. *Seja E um EVT. Então um filtro $\mathcal{F}$ em E é de Cauchy se, e somente se, $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$ é um net de Cauchy. Também, um net $\mathfrak{X}$ em E é de Cauchy se, e somente se, $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ é um filtro de Cauchy.*

A demonstração é bem simples. Como corolário obtemos então:

Proposição 2. *Um espaço vetorial topológico E é completo se, e somente se, todo filtro de Cauchy em E é convergente.*

A demonstração segue imediatamente de (D), (E) e da Proposição 1.

(G) Podemos agora demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 1. *Todo espaço LF é completo.*

Demonstração. Seja E um espaço LF com sequência de definição $\{E_n : n \geq 1\}$. De acordo com a Proposição 2 temos que demonstrar que todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ em E é convergente. Seja $\mathcal{B} \subset P(E)$ a coleção de todos os conjuntos da forma $F + U$, com $F \in \mathcal{F}$ e $U \in \Phi_E(0)$. Note que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições descritas em (B) uma vez que se $F, F_1 \in \mathcal{F}$, $V, V_1 \in \Phi_E(0)$ então

$$(F \cap F_1) + (V \cap V_1) \subset (F + V) \cap (F_1 + V_1).$$

Seja $\mathcal{G}$ o filtro gerado por $\mathcal{B}$. Afirmamos que $\mathcal{G}$ é também um filtro de Cauchy em E. De fato, seja $U \in \Phi_E(0)$. Tomemos $V \in \Phi_E(0)$ equilibrada tal que $V + V + V \subset U$. Tomemos também $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset V$. Então

$$(F + V) - (F + V) \subset V + V - V = V + V + V \subset U.$$

A parte crucial da demonstração será provar a seguinte propriedade:

$(\star)$ *Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap E_m \neq \emptyset$, para todo $A \in \mathcal{G}$.*

Suponha primeiramente que $(\star)$ está verificada. Então

$$\mathcal{G}_m \doteq \{A \cap E_m : A \in \mathcal{G}\}$$

é um filtro em E_m. Além do mais, se $W \in \Phi_{E_m}(0)$ e se tomarmos $V \in \Phi_E(0)$ tal que $V \cap E_m = W$ e $A \in \mathcal{G}$ tal que $A - A \subset V$ então $(A \cap E_m) - (A \cap E_m) \subset$

W e portanto $\mathcal{G}_m$ é um filtro de Cauchy em E_m. Como E_m é um espaço de Fréchet, e portanto completo, existe $x_0 \in E_m$ tal que $\mathcal{G}_m \to x_0$. Afirmamos então que $\mathcal{G} \to x_0$ em E. De fato, seja $U \in \Phi_E(0)$ e tomemos $V \in \Phi_E(0)$ tal que $V + V \subset U$. Existe $A \in \mathcal{G}$ tal que $A - A \subset V$ e $A \cap E_m \subset x_0 + V$. Dado $x \in A$ tomemos $x_* \in A \cap E_m$. Então

$$x = (x - x_*) + x_* \in (A - A) + (x_0 + V) \subset x_0 + U,$$

isto é, $A \subset x_0 + U$. Como $0 \in V$ para toda $V \in \Phi_E(0)$ segue então que $\mathcal{F} \to x_0$.

Para concluir a demonstração do teorema vamos provar $(\star)$, o que será feito por contradição. Suponha que $(\star)$ não valha. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ existirá $A_n = F_n + V_n \in \mathcal{G}$ tal que $A_n \cap E_n = \emptyset$. Contraindo V_n se necessário podemos assumir que cada V_n é convexa, equilibrada e que $V_n \subset V_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Para cada $n \geq 1$ defina

$$W_n \doteq \operatorname{Conv}\left(V_n \cup \bigcup_{k<n} (V_k \cap E_k)\right) \subset \operatorname{Conv}(V_n \cup E_{n-1}).$$

Afirmamos que

$$(\sharp) \qquad (F_n + W_n) \cap E_n = \emptyset, \ n \geq 1.$$

De fato suponha que para algum $n \geq 1$ existam $x \in F_n$, $y \in V_n$, $z \in E_{n-1}$ tais que $x + ty + z \in E_n$ para alguma $0 \leq t \leq 1$. Como V é equilibrado, $ty \in V$ e $x + ty \in E_n$, o que contradiz nossa hipótese. Seja

$$W \doteq \operatorname{Conv}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (V_k \cap E_k)\right).$$

Como W é convexo e equilibrado e $W \cap E_k$ contém $V_k \cap E_k$ para todo $k \geq 1$ segue $W \in \Phi_E(0)$. Agora, como V_n é decrescente,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (V_k \cap E_k) \subset V_n \cup \bigcup_{k<n} (V_k \cap E_k), \ n \geq 1.$$

Assim $W \subset W_n$ para todo $n \geq 1$. Agora utilizamos o fato que $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy: existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset W \subset W_n$ para todo $n \geq 1$. Como $F \cap F_n \neq \emptyset$ (pois $\mathcal{F}$ é um filtro) e como

$$F - (F \cap F_n) \subset W_n, \ n \geq 1,$$

temos

$$F \subset (F \cap F_n) + W_n \subset F_n + W_n, \; n \geq 1.$$

Logo $F \cap E_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$, isto é, $F = \emptyset$, o que é impossível. $\square$