Espaços LF

Seja $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, onde $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ são subespaços de E, cada um deles munido de uma estrutura de espaço de Fréchet de tal forma que $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ é um homeomorfismo (sobre a imagem). Esta última afirmação é equivalente a dizer que a topologia de E_n é aquela induzida por E_{n+1}; em particular como cada cada E_n é completo segue que E_n é fechado em E_{n+1}. Assumiremos sempre que $E_n \neq E$ para todo n.

Definimos $\mathcal{B}(0)$ como sendo a coleção de todos os subconjuntos $V \subset E$ que são **convexos** e **equilibrados** e tais que $V \cap E_n \in \Phi_{E_n}(0)$ para todo $n \geq 1$. Pode-se verificar imediatamente que

1. Todo elemento de $\mathcal{B}(0)$ é absorvente;
2. Se $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(0)$ então $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}(0)$;
3. Se $V \in \mathcal{B}(0)$ e $\lambda > 0$ então $\lambda V \in \mathcal{B}(0)$.

Logo, como mostrado em aula, existe uma topologia de ELC sobre E para a qual

$$\Phi_E(0) = \{V' \subset E : V' \supset V, \text{ para algum } V \in \mathcal{B}(0)\}.$$

Tais espaços E com a topologia assim definida se denominam espaços LF e a sequência $\{E_n : n \geq 1\}$ denomina-se uma *sequência de definição de* E. Se os espaços E_n são de Banach então tais espaços denominam-se LB.

O teorema principal para esta classe de espaços é o seguinte:

Teorema 1. *Se E e $\{E_n : n \geq 1\}$ são como acima então:*

1. *As inclusões $E_n \hookrightarrow E$ são homemorfismos (sobre a imagem);*
2. *E é um ELC Hausdorff.*

Para a demonstração do Teorema 1 necessitamos dos seguintes resultados preliminares:

Lema 1. *Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e sejam $A, B \subset E$. Todo $x \in \operatorname{Conv}(A \cup B)$ se escreve como $x = ty + (1-t)z$, com $y \in \operatorname{Conv}(A)$, $z \in \operatorname{Conv}(B)$ e $0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração. Podemos escrever $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, com $x_j \in A \cup B$ e $\lambda_j > 0$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Se $x \in \operatorname{Conv}(A)$ ou $x \in \operatorname{Conv}(B)$ nada há a demonstrar. Caso contrário podemos escrever

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j + \sum_{j\in J'} \lambda_j x_j,$$

onde $x_j \in A$ se $j \in A$, $x_j \in B$ se $j \in J'$, $J \cup J' = \{1, \ldots, n\}$ e ambos J e J' são não-vazios. Seja $t = \sum_{j\in J} \lambda_j$. Então

$$x = t \sum_{j\in J} t^{-1}\lambda_j x_j + (1-t) \sum_{j\in J'} (1-t)^{-1}\lambda_j x_j.$$

Como

$$\sum_{j\in J} t^{-1}\lambda_j x_j \in \mathrm{Conv}\,(A), \quad \sum_{j\in J'} (1-t)^{-1}\lambda_j x_j \in \mathrm{Conv}\,(B)$$

a demonstração está concluída. $\square$

Lema 2. *Sejam E um ELC, $F \subset E$ um subespaço fechado de E, $U \in \Phi_F(0)$ convexa e equilibrada e $x_0 \in E$, $x_0 \notin U$. Então existe $V \in \Phi_E(0)$ convexa e equilibrada tal que $x_0 \notin V$ e $V \cap F = U$.*

Demonstração. Tomamos $W \in \Phi_E(0)$ com $W \cap F = U$. A seguir tomamos $W_0 \in \Phi_E(0)$ convexa e equilibrada tal que $W_0 \subset W$. Definimos $W_1 = \mathrm{Conv}\,(W_0 \cup U)$; então W_1 é convexa. Vamos verificar que W_1 também é equilibrada. De fato, como U e W_0 são equilibrados o mesmo é verdade para $W_0 \cup U$ e como a envoltória convexa de um conjunto equilibrado é equilibrado segue nossa afirmação.

Afirmamos agora que $W_1 \cap F = U$. Claramente temos $U \subset W_1 \cap F$. Para a inclusão contrária seja $x \in W_1 \cap F$ e escrevamos, de acordo com o Lema 1, $x = ty + (1-t)z$, com $y \in U$ e $z \in W_0$. Se $t = 1$ então segue que $x \in U$ e nada há a verificar neste caso. Suponhamos $t < 1$. Então

$$z = (1-t)^{-1}\,[x - ty] \in F.$$

Logo $z \in W_0 \cap F \subset U$ e portanto $x \in U$, o que prova nossa contenção.

Seja $x_0 \notin U$. Se $x_0 \in F$ então $x_0 \notin W$ e podemos tomar $V = W$ neste caso. Se $x_0 \notin F$ consideramos então o ELC Hausdorff E/F e a aplicação quociente $\pi : E \to E/F$. Temos $\pi(x_0) \neq 0$ e portanto existe $\Omega \in \Phi_{E/F}(0)$

convexa e equilibrada tal que $\pi(x_0) \notin \Omega$ Então $W_2 \doteq \pi^{-1}(\Omega) \in \Phi_E(0)$ é convexa e equilibrada e $x_0 \notin W_2$. $F \subset W_2$ e portanto, pondo $V = W_1 \cap W_2$ temos V convexa e equilibrada e

$$V \cap F = W_1 \cap W_2 \cap F = W_1 \cap F = U.$$

A demonstração do Lema 2 está completa. $\square$

Demonstração do Teorema 1. Para a parte 1 temos que mostrar que dados $n \geq 1$ e $U \in \Phi_{E_n}(0)$ convexa e equilibrada existe $V \in \Phi_E(0)$ tal que $V \cap E_n = U$. Colocando $U \doteq U_n$ e aplicando o Lema 2 indutivamente obtemos uma sequência $U_{n+p} \in \Phi_{E_{n+p}}(0)$, cada um deles convexo e equilibrado, tal que

$$U_{n+p+1} \cap E_{n+p} = U_{n+p}, \quad p \geq 0.$$

Seja $V \doteq \bigcup_{p=0}^{\infty} U_{n+p} \subset E$. Então V é convevo e equilibrado. Além disso, $V \cap E_{n+p} = U_{n+p}$ para todo $p \geq 0$; em particular $V \cap E_n = U$. Assim, para concluir a demonstração da parte 1 temos que verificar que $V \in \Phi_E(0)$. Para isso bastará verificar que $V \cap E_m \in \Phi_{E_m}(0)$ para todo $m \geq 1$, o que é certamente verdadeiro para $m \geq n$ por nossa afirmação anterior. Agora se $m < n$ temos

$$V \cap E_m = V \cap E_m \cap E_m = U \cap E_m \in \Phi(E_m)(0)$$

pois $E_m \hookrightarrow E_n$ é contínua.

Para a parte 2 basta observar que dado $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ podemos tomar $U \in \Phi(E_n)$ convexa e equilibrada com $x_0 \notin U$, pois E_n é Hausdorff. Indutivamente, pelo Lema 2, podemos tomar a sequência U_{n+p} de tal forma que $x_0 \notin U_{n+p}$ para todo p. Assim $x_0 \notin V$ o que implica que E é um ELC Hausdorff. $\square$

Teorema 2. *Sejam E um espaço LF com sequência de definição $\{E_n : n \geq 1\}$, F um EVT e $u : E \to F$ linear. Se $u \in L(E, F)$ então $u|_{E_n} \in L(E_n, F)$ e a recíproca é verdadeira de F for um ELC.*

Demonstração. Uma vez que

$$u|_{E_n} = E_n \hookrightarrow E \xrightarrow{u} F$$

segue a primeira afirmação. Para a recíproca basta mostrar que se $W \in \Phi_F(0)$ é convexa e equilibrada então $V \doteq u^{-1}(W)$ é uma vizinhança de zero em E. Como V é convexa e equilibrada bastará mostrar que $V \cap E_n \in \Phi_{E_n}(0)$ para todo $n \geq 1$. Mas isto segue de $V \cap E_n = (u|_{E_n})^{-1}(W)$ e do fato que cada $u|_{E_n}$ é contínua. $\square$

Teorema 3. *Todo espaço LF é completo.*

A maneira mais direta de se provar este resultado é através do uso de filtros. Isto será feito em outro arquivo.

Observação. Note que todos os resultados provados até o Teorema 2 inclusive só fizeram uso das seguinte hipóteses:

- Cada E_n é um ELC Hausdorff, as inclusões $E_n \hookrightarrow E_{n+1}$ são homeomorfismos (sobre a imagem) e E_n é fechado em E_{n+1}, $n \geq 1$.

Exemplos

1. Seja $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m]$ o espaço dos polinômios em m indeterminadas com coeficientes em $\mathbb{K}$. Temos
$$\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m] = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{K}^{(m)}[X_1, \ldots, X_m],$$
onde $\mathbb{K}^{(m)}[X_1, \ldots, X_m]$ denota o espaço dos polinômios em $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m]$ de grau $\leq m$. Cada $\mathbb{K}^{(m)}[X_1, \ldots, X_m]$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita ($= (m+n)!/m!n!$). Como $\mathbb{K}^{(m)}[X_1, \ldots, X_m]$ é subespaço de $\mathbb{K}^{(m+1)}[X_1, \ldots, X_m]$, e como em cada $\mathbb{K}$ espaço vetorial de dimensão finita está definida uma única topologia de EVT Hausdorff, segue que $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m]$ tem uma topologia natural de espaço LF (na realidade LB). Além do mais note que se E é um EVT Hausdorff de dimensão finita e F é um EVT qualquer então toda transformação linear de E em F é contínua. Assim segue do Teorema 2 que dado qualquer EVT F e dada qualquer aplicação linear $u : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_m] \to F$ então u é necessariamente contínua.

2. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto denotaremos
$$C_c^{\infty}(\Omega) = \{\phi : \phi \in C^{\infty}(\Omega), \operatorname{supp} \phi \text{ é compacto em } \Omega\}.$$

Note que $C_c^\infty(\Omega) = \bigcup C_c^\infty(K)$, onde a reunião é tomada sobre todos os subconjuntos compactos K de Ω. Como já visto, cada $C_c^\infty(K)$ é um espaço de Fréchet com a topologia de ELC definida pelas normas

$$p_{K,m}(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|,\ \ \phi \in C_c^\infty(K),\ \ m \geq 0.$$

Note que se $K \subset K'$ são compactos de Ω então $p_{K,m} = p_{K',m}$ em $C_c^\infty(K)$ o que mostra que $C_c^\infty(K) \hookrightarrow C_c^\infty(K')$ é um homeomorfismo sobre a imagem. Logo se tomarmos uma sequência $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de Ω com $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$, $n \geq 1$ e $\bigcup_n K_n = \Omega$ obtemos uma topologia de espaço LF em $C_c^\infty(\Omega)$ com sequência de definição $\{C_c^\infty(K_n), n \geq 1\}$. Note que se $V \subset C_c^\infty(\Omega)$ é convexo e equilibrado então V é uma vizinhança de 0 em $C_c^\infty(\Omega)$ se, e só se, $V \cap C_c^\infty(K)$ é vizinhança de 0 em $C_c^\infty(K)$.

O espaço $\mathcal{D}'(\Omega) \doteq L(C_c^\infty(\Omega), \mathbb{C})$ denomina-se o *espaço das distribuições sobre* Ω (esta definição é devida a Laurent Schwartz). Pelo Teorema 2 e pelas considerações que acabamos de fazer segue que um funcional linear $u : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição em Ω se, e somente se, vale a seguinte propriedade: dado $K \subset \Omega$ compacto existem $C > 0$ e $m \geq 0$ tais que

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \phi|,\ \ \phi \in C_c^\infty(K).$$