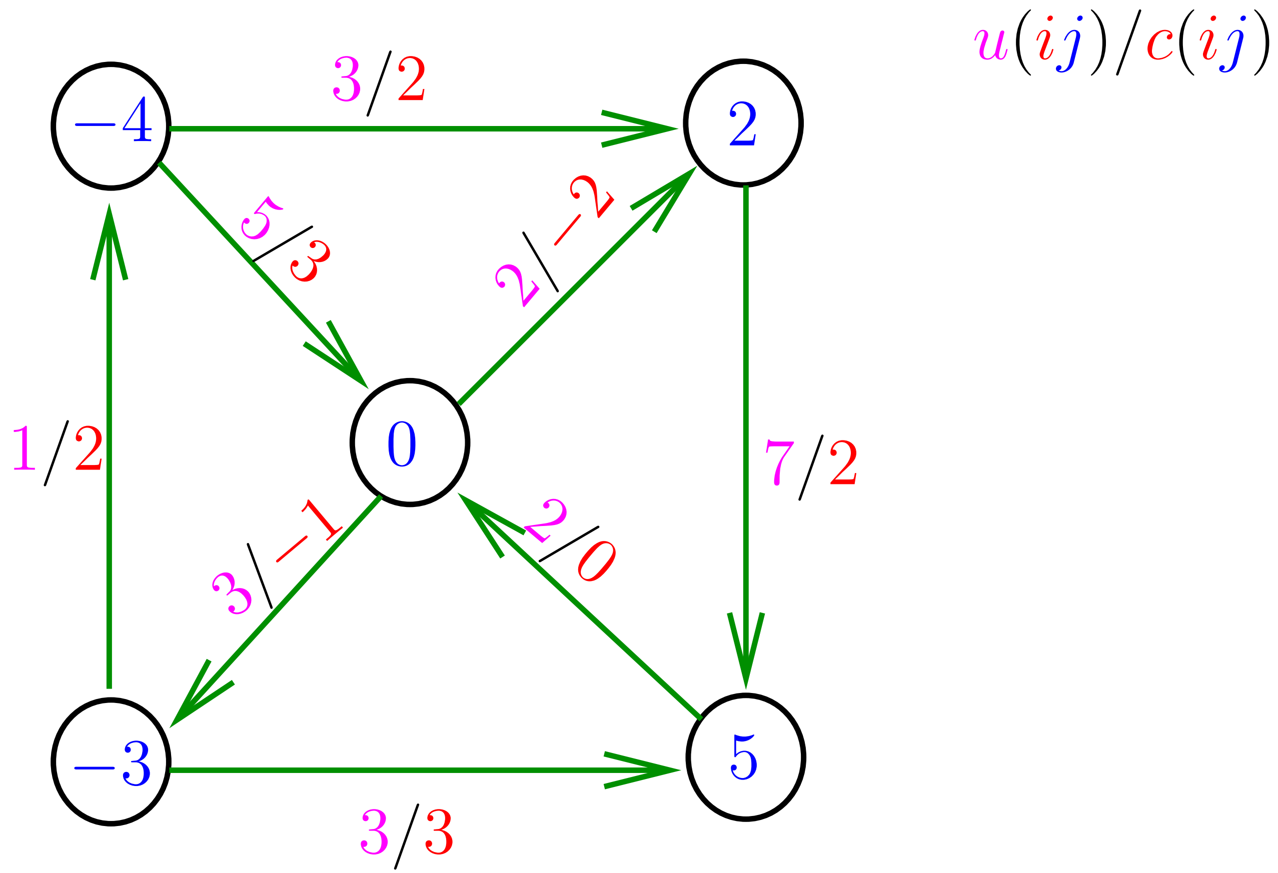
# Melhores momentos

AULA PASSADA

# Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede $(N, A, u, b, c)$ com função-capacidade $u$, função-demanda $b$ e função-custo $c$, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça $b$ e respeite $u$.



# Lema da dualidade

Se $x$ é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c+w)$-potencial $y$.

Chamaremos tal par $(y, w)$ de solução dual-viável.

Conseqüência. Se $x$ é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c+w)$-potencial $y$ então $x$ é um fluxo ótimo.

# Folgas complementares (1)

Seja $x$ um fluxo que respeita $u$.

Seja $y$ um potencial.

Diremos que as folgas de $x$ e $y$ são complementares se, para cada arco $ij$,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$
$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \; .$$

Fato. Se $x$ é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial $y$ então $x$ é ótimo.

# Folgas complementares (2)

Seja $x$ um fluxo que respeita $u$.

Seja $y$ um potencial.

Diremos que as folgas de $x$ e $y$ são complementares se, para cada arco $ij$,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Fato. Se $x$ é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial $y$ então $x$ é ótimo.

# Fluxo viável de custo mínimo

Problema do fluxo viável de custo mínimo:

Dados

- uma matriz de incidências $M$ de um grafo $(N, A)$,
- uma função-demanda $b$ ($N \to \mathbb{Z}$)
- uma função-custo $c$ ($A \to \mathbb{Z}$) e
- uma função-capacidade $u$ ($A \to \mathbb{Z}_{\geq}$)

encontrar um vetor $x$ indexado por $A$ que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimize} & cx & & & \\
\text{sob as restrições} & Mx & = & b & \\
& x(ij) & \leq & u(ij) & \text{para cada } ij \text{ em } A \\
& x(ij) & \geq & 0 & \text{para cada } ij \text{ em } A.
\end{array}
$$

# Problema dual

O correspondente problema dual é: encontrar vetores $y$ indexado por $N$ e $w$ indexado por $A$ que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{maximize} & yb - wu & & & \\
\text{sob as restrições} & y(j) - y(i) + w(ij) & \geq & c(ij) & \text{para } ij \in A, \\
 & w(ij) & \geq & 0 & \text{para } ij \in A.
\end{array}
$$

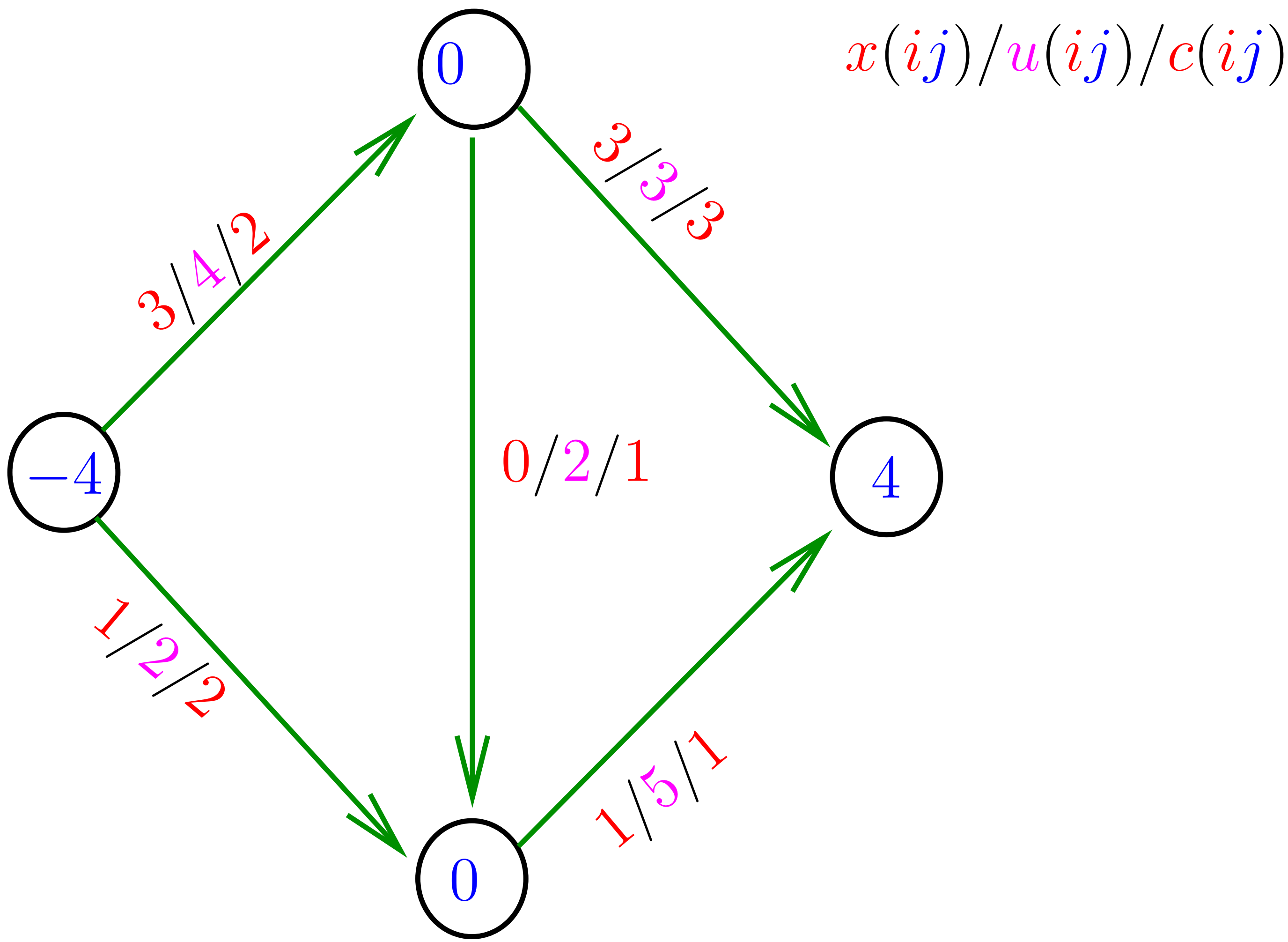
# AULA 19

# Algoritmo de Klein

PF 22.1, 22.2, 22.3

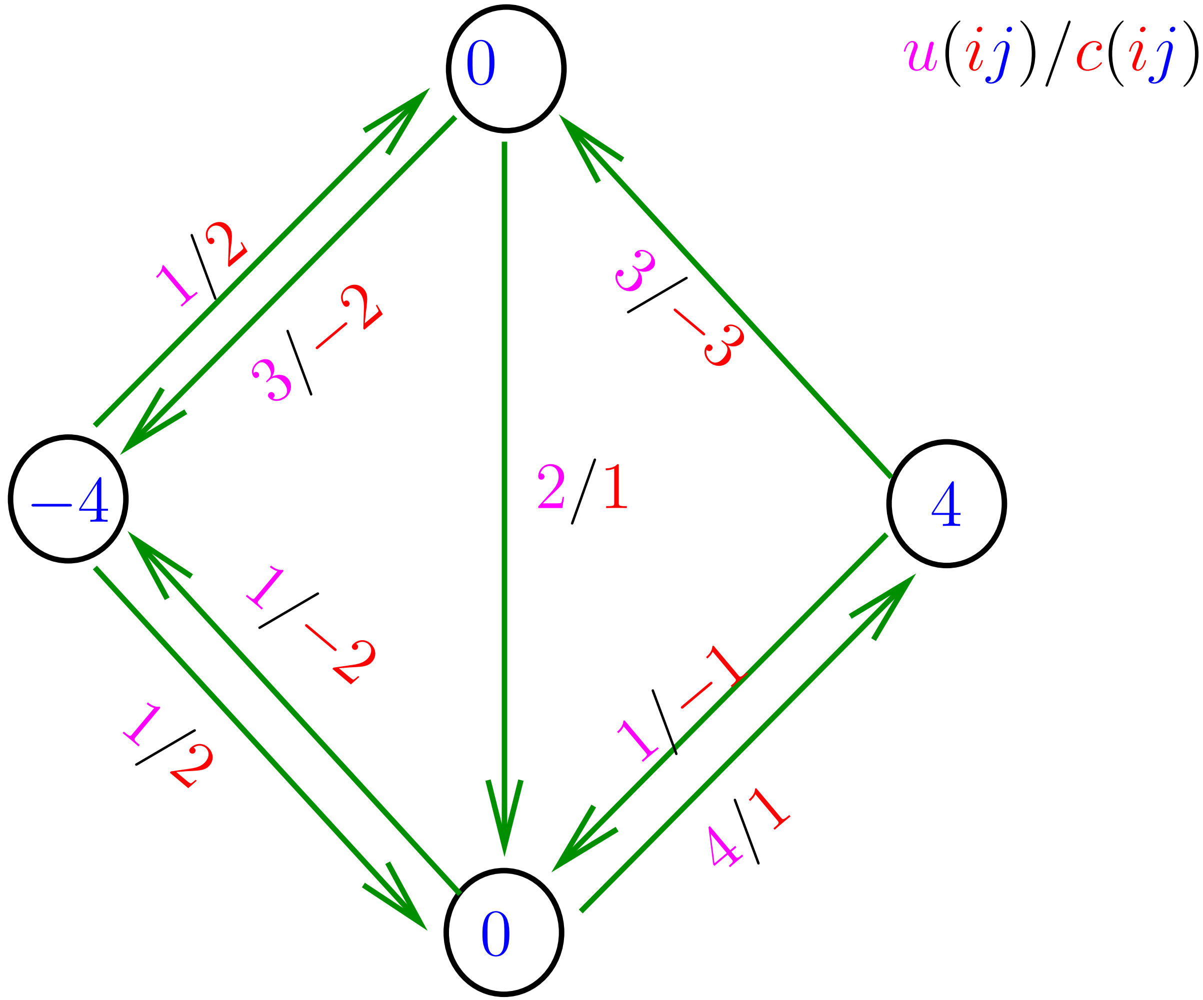
*Cycle Cancelling Algorithm*

# É fluxo de custo mínimo?

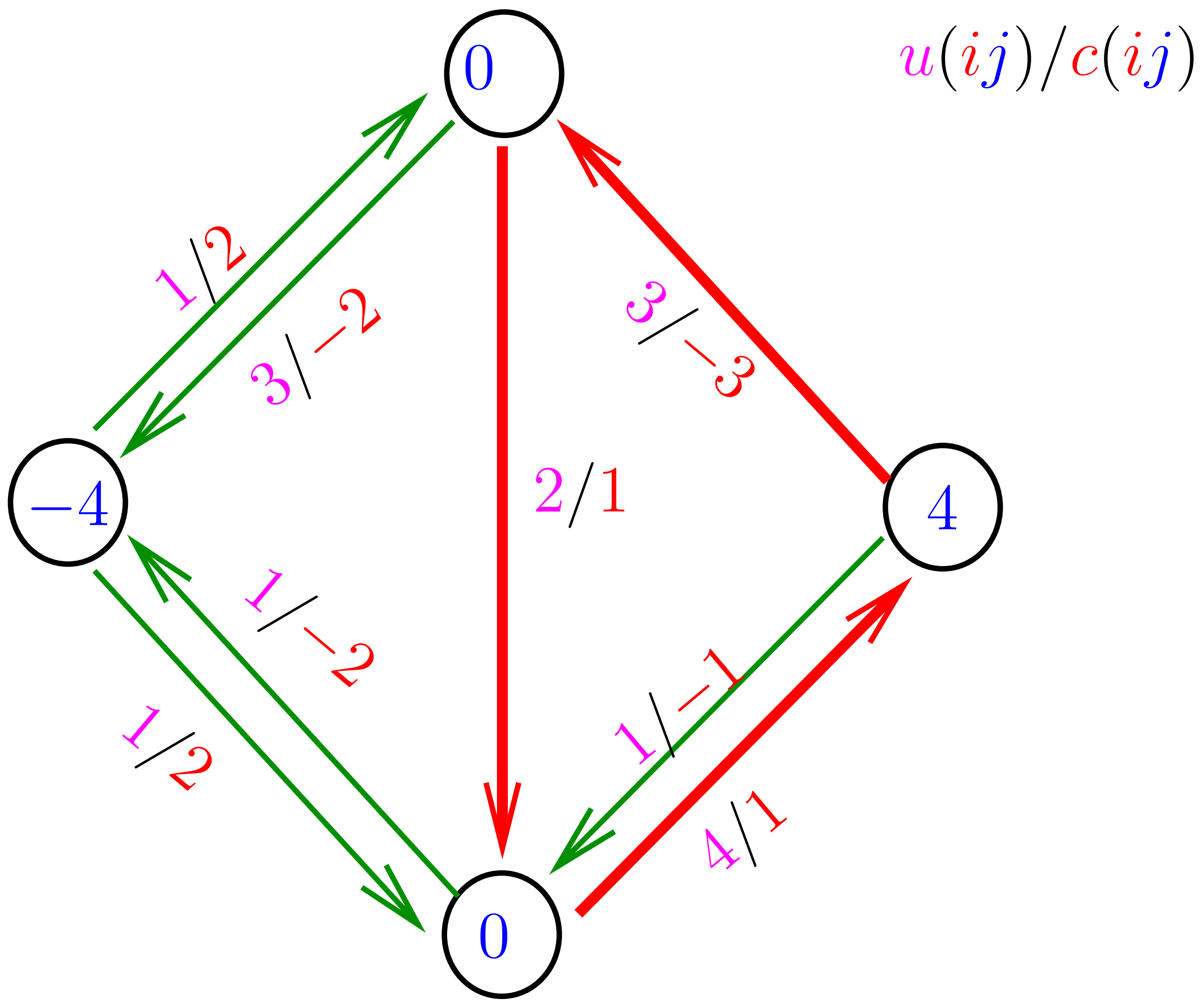



Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 18$

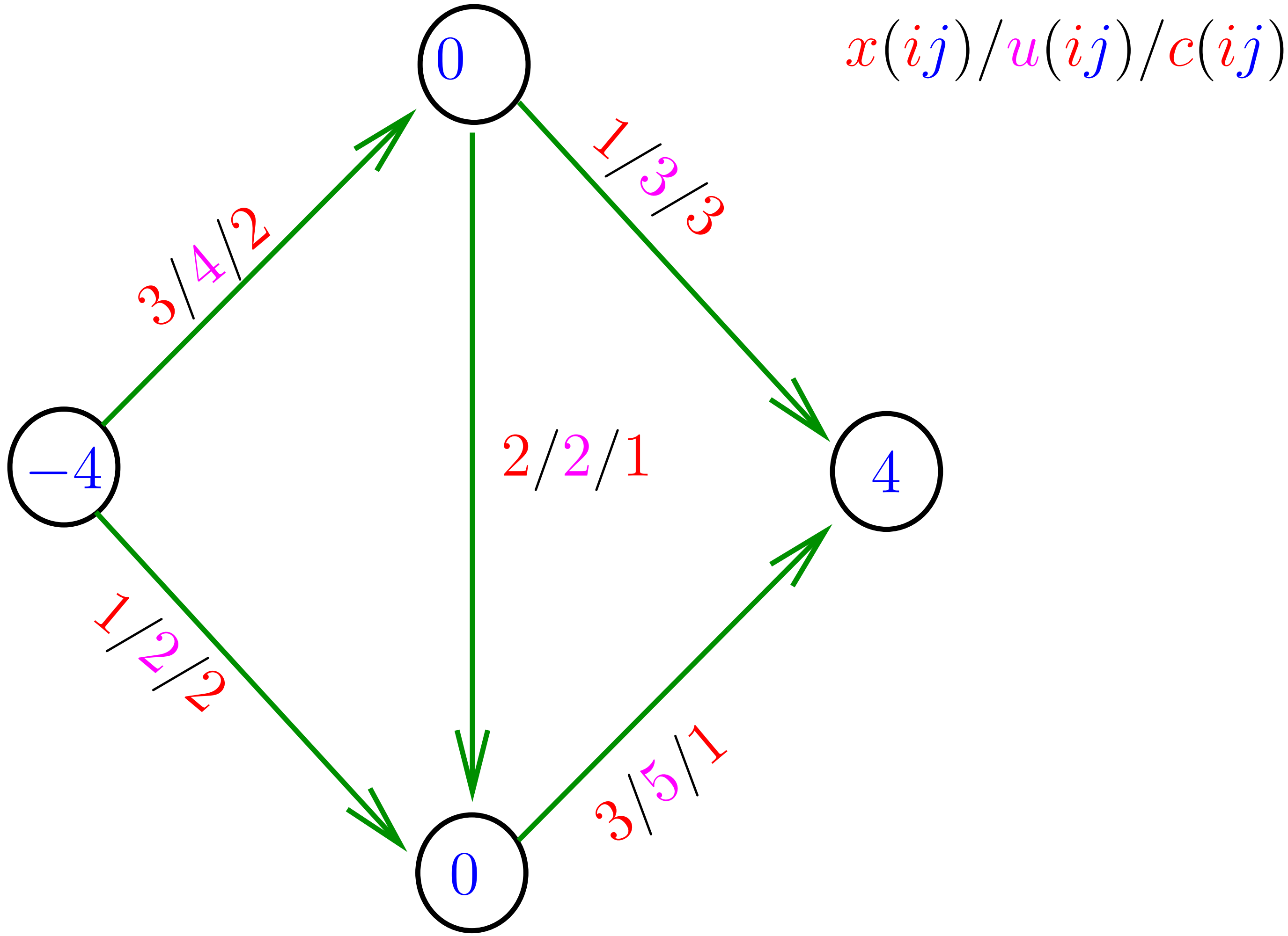
# Rede residual



# Ciclo negativo

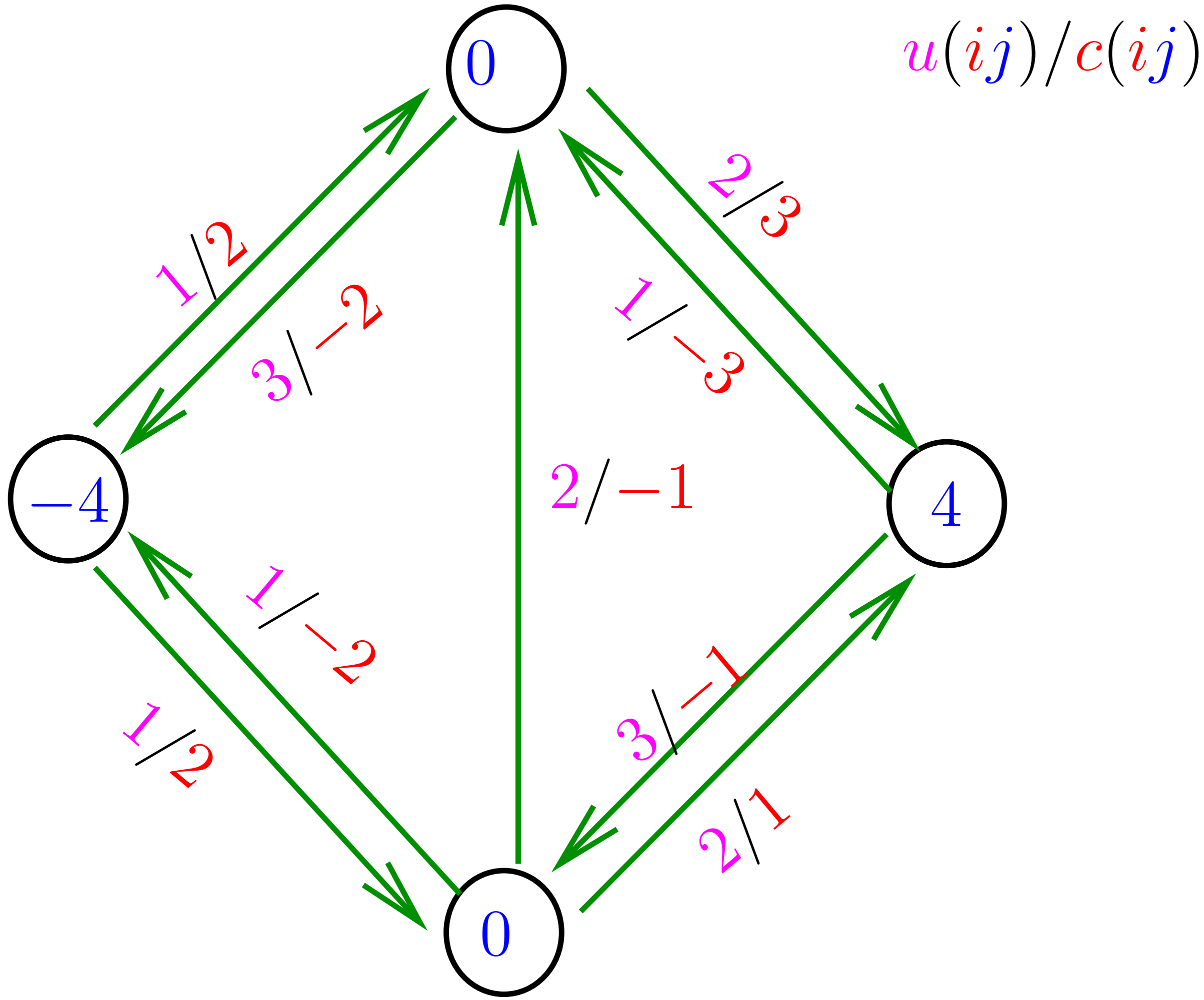


# É fluxo de custo mínimo?

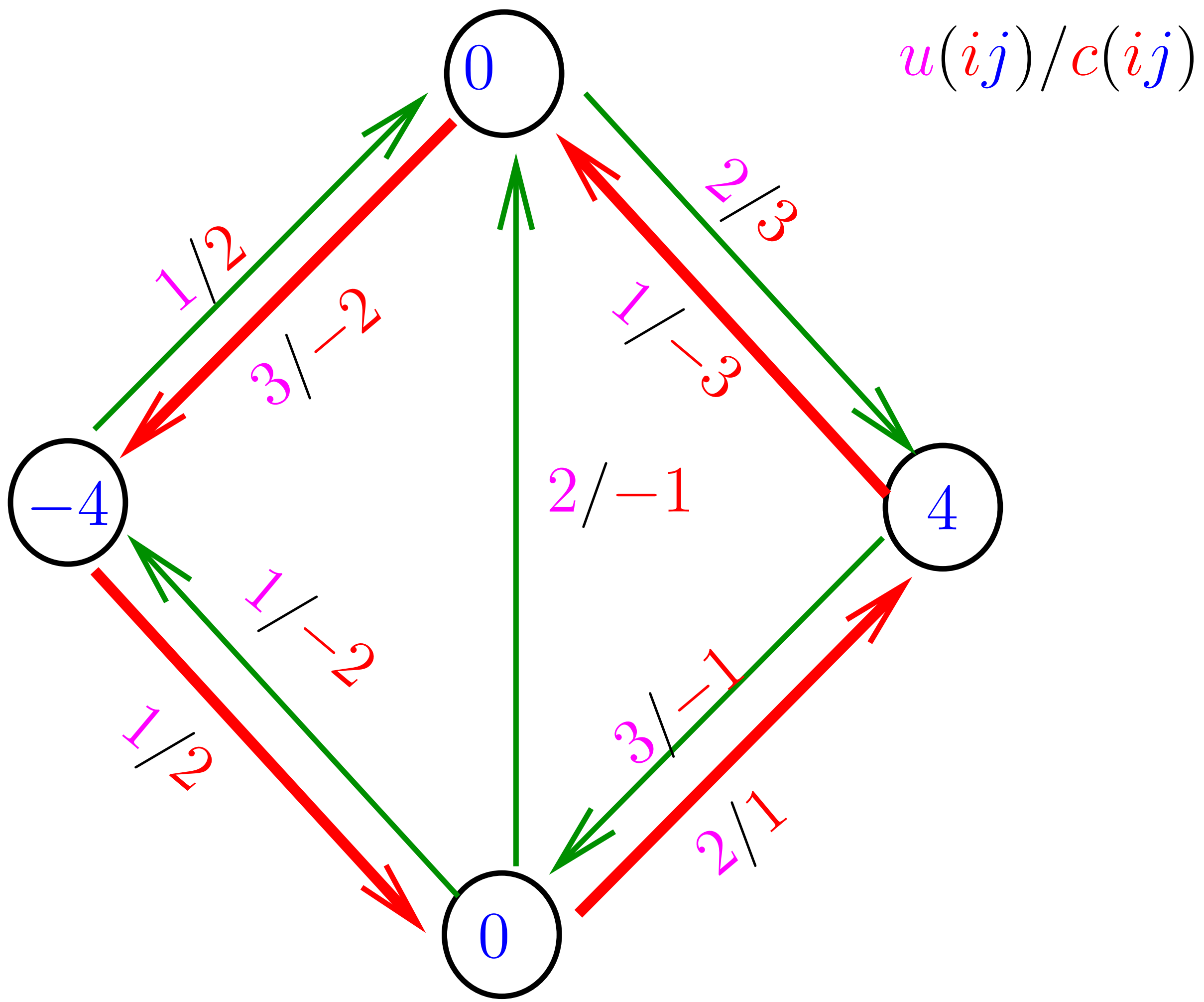



Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 16$

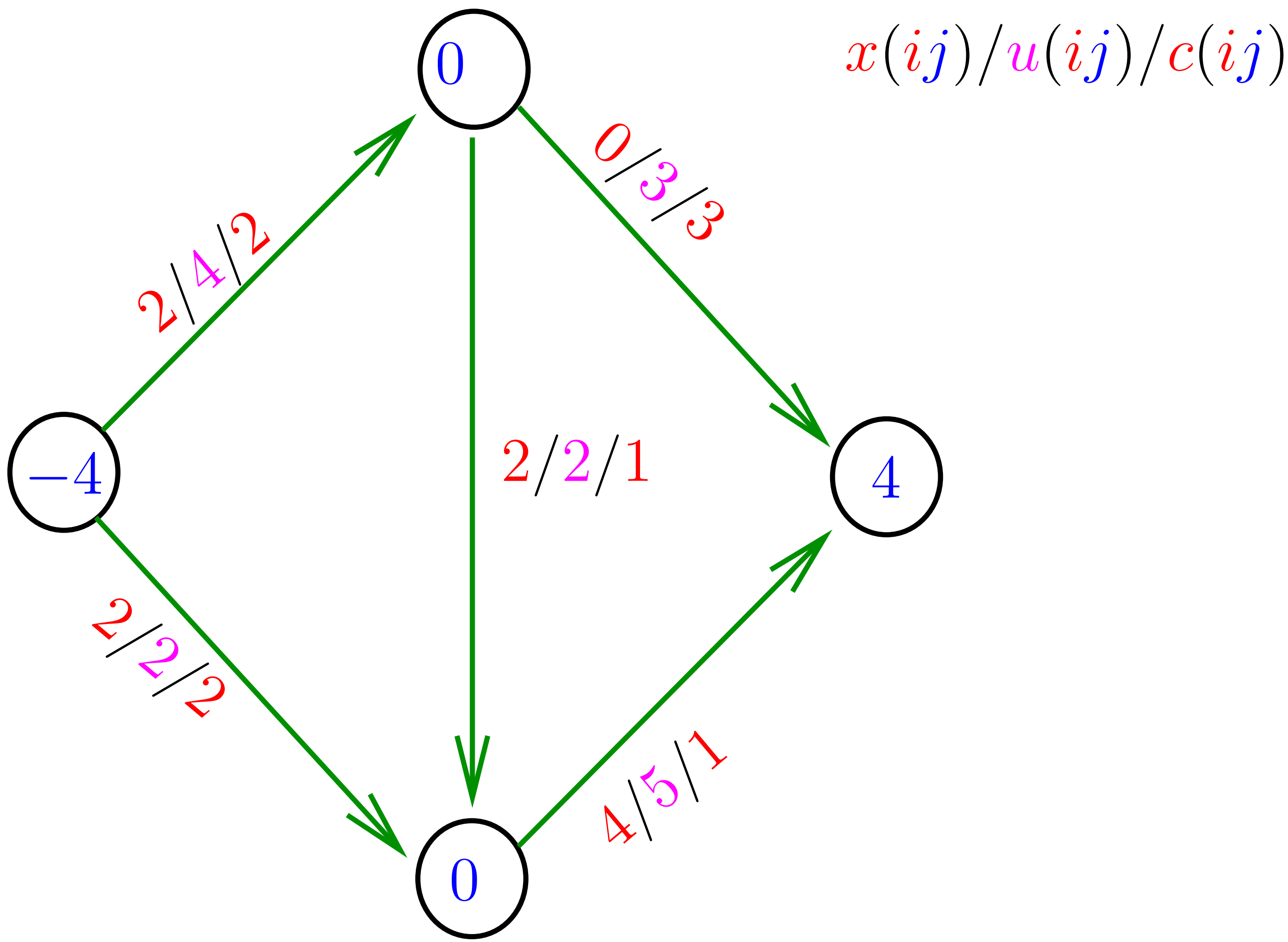
# Rede residual



# Rede residual

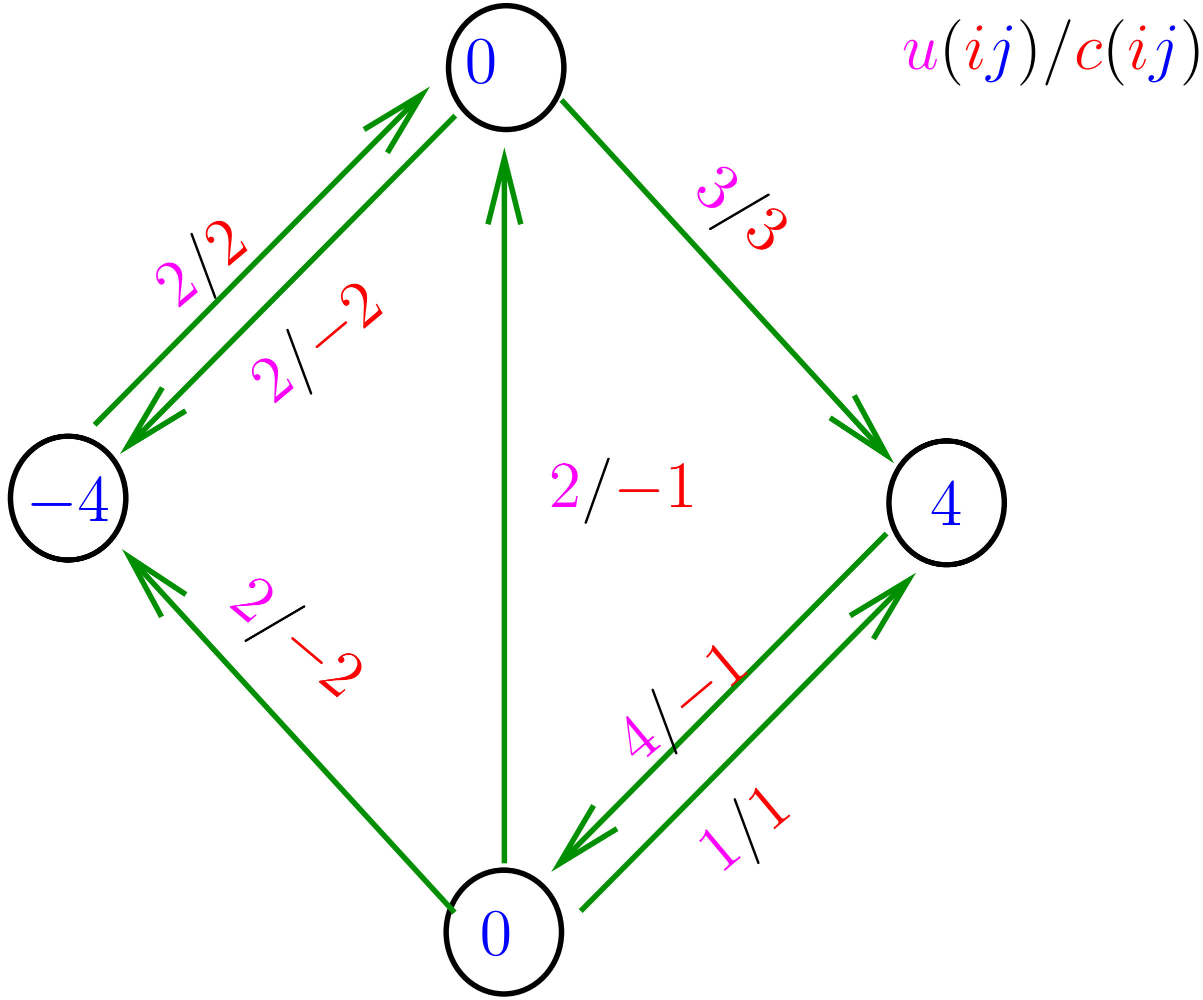


# É fluxo de custo mínimo?

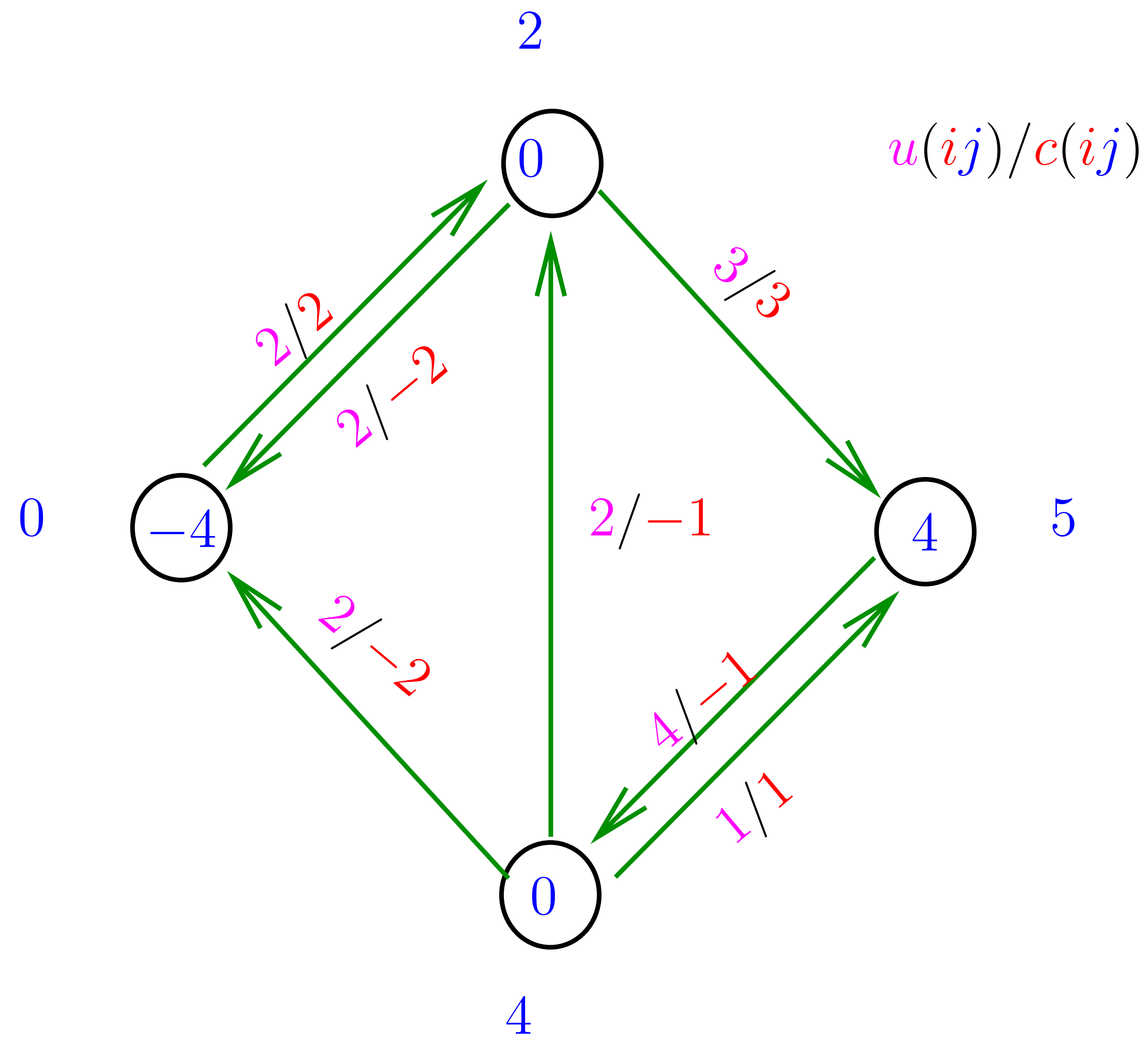



Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

# Rede residual



# Potencial



# Folgas complementares

Seja $x$ o fluxo encontrado.

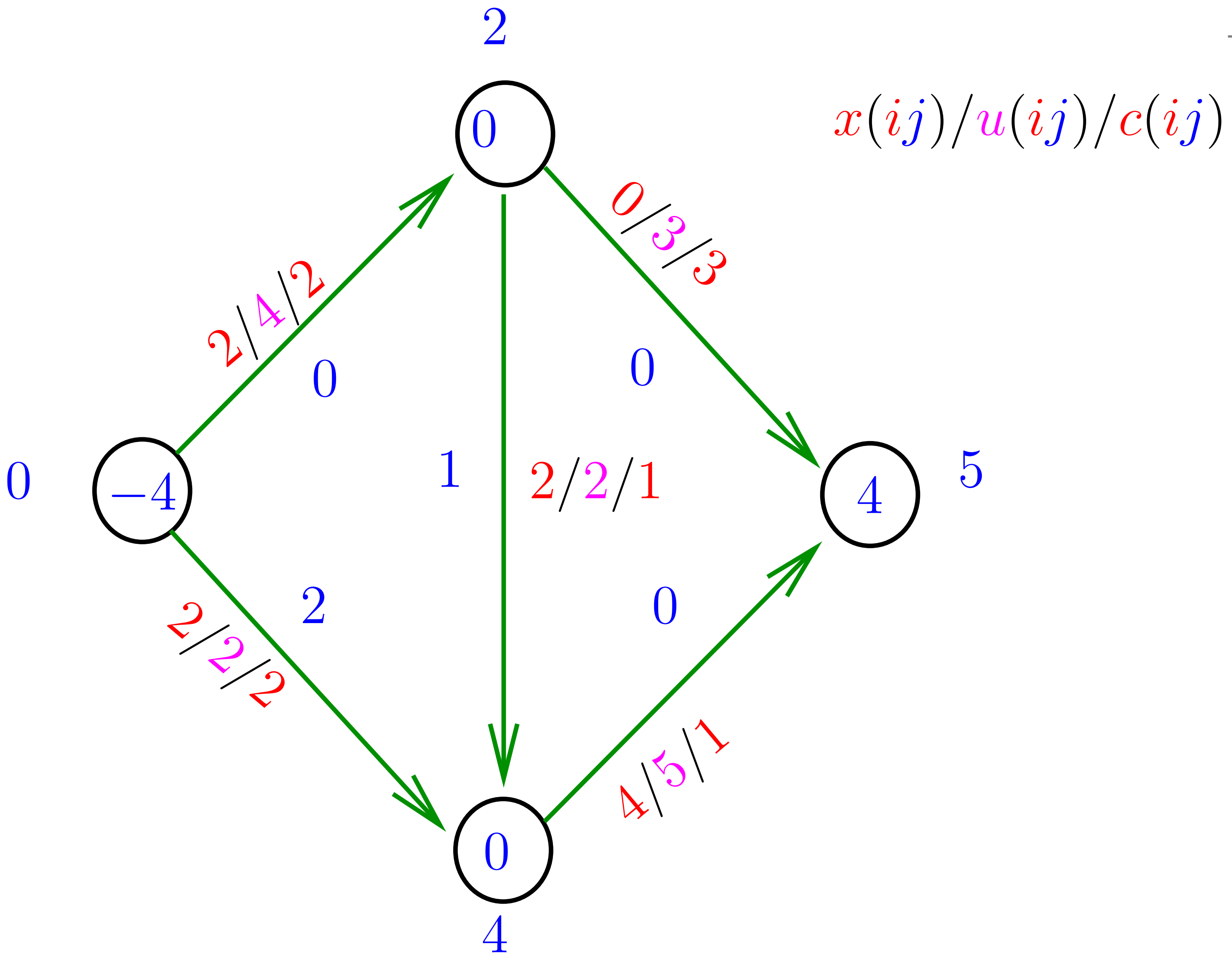
Seja $y$ o potencial encontrado.

Temos as folgas de $x$ e $y$ são complementares já que,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Conclusão: $x$ é um fluxo viável de custo mínimo.

# Solução dual viável




$$yb - wu = 4 \times 5 - 2 \times 2 - 1 \times 2 = 14$$

# Algoritmo de Klein

KLEIN $(N, A, u, b, c)$

$\langle x, O\rangle \leftarrow$ FLUXO-VIÁVEL $(N, A, u, b)$

**se** $x$ não está definido

    **então devolva** $T$

$\check{x} \leftarrow$ PSEUDOFLUXO$(x)$

**repita**

    $A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

    $\langle O, y\rangle \leftarrow$ CICLO-NEGATIVO$(N, A_x, c)$

    **se** $O$ está definido

        **então** $\check{x} \leftarrow$ BARATEIE-FLUXO$(\check{x}, O)$

**até que** $O$ não está definido

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

**devolva** $x$ e $y$

# Barateie fluxo

BARATEIE-FLUXO $(\check{x}, O)$

$\delta \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $O\}$

**para cada** arco $ij$ em $O$ **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

**devolva** $\check{x}$

# Invariantes

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

(i0) $x$ é inteiro;

(i1) $x$ é satisfaz $b$;

(i2) $x$ respeita $u$.

onde $x :=$ FLUXO$(\check{x})$ .

# Correção

- Depois da última iteração das linhas 6–9, na linha 11, $x$ é um fluxo que satisfaz $b$ e respeita $u$;
- $y$ definido na linha 7 é um $c$-potencial em $(N, A_{\check{x}})$.
- Como $y$ é um $c$-potencial em $(N, A_{\check{x}})$ então

$$\check{x}(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij)$$

  para cada arco $ij$ em $A_{\check{x}}$ e portanto $y$ tem folgas complementares às de $x$.
- se definirmos $w(ij) := \max\{0, y(j) - y(i) - c(ij)\}$, então o par $(y, w)$ é solução dual-viável tal que

$$cx = yb - wu \ .$$

Conclusão: o algoritmo devolve um fluxo viável de custo mínimo.

# Conclusões (1)

Os fatos a seguir são conseqüências da correção do algoritmo KLEIN.

Se $(N, A, u, b, c)$ é um rede com função-capacidade $u$ de $A$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$, função-demanda $b$ de $N$ em $\mathbb{Z}$ e função-custo $c$ de $A$ em $\mathbb{Z}$ que admite um fluxo viável, então existe um fluxo viável de custo mínimo com valores inteiros.

Se $(N, A, u, b, c)$ e $x$ é um fluxo viável de custo mínimo então existe uma função custo $w \geq 0$ e um $(c + w)$-potencial $y$ tal que $cx = yb - wu$.

# Conclusões (2)

Se $x$ é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- $x$ é um fluxo viável de custo mínimo;
- existe um ciclo de custo negativo na rede residual.

# Teorema do fluxo viável de custo mínimo

Teorema da dualidade. Para qualquer rede $(N, A, u, b, c)$, se $x$ é um fluxo que satisfaz $b$, respeita $u$ e minimiza $cx$ então existe uma função-custo $w \geq 0$ e um $(c + w)$-potencial $y$ tais que

$$cx = yb - wu \ .$$

# Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 6–9 é

$$< 2mUC,$$

onde $U := \max\{u(ij) : ij \in A\}$ e $C := \max\{|c(ij)| : ij \in A\}$ .

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1-3 | $O(n^2m)$ |
| 4 | $O(m)$ |
| 6 | $2mUC\,O(m) = O(m^2UC)$ |
| 7 | $2mUC\,O(nm) = O(nm^2UC)$ |
| 8-9 | $2mUC\,O(n) = O(nmUC)$ |
| 11-12 | $O(m)$ |
| total | $O(nm^2UC)$ |

# Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo KLEIN é $O(nm^2UC)$.

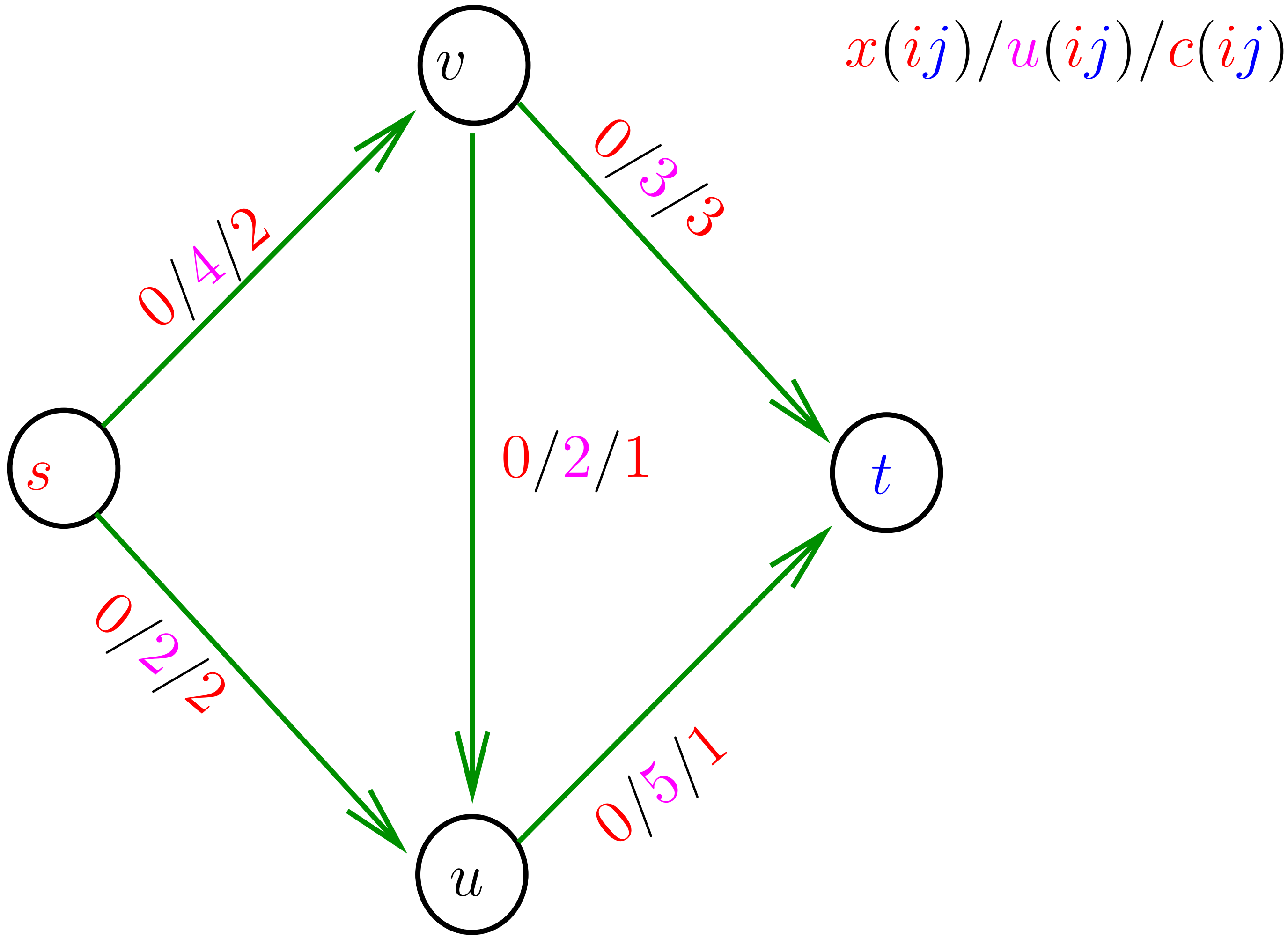
Este consumo de tempo não é polinomial.

# Algoritmo de Jewell

PF 23.1, 23.2, 23.3

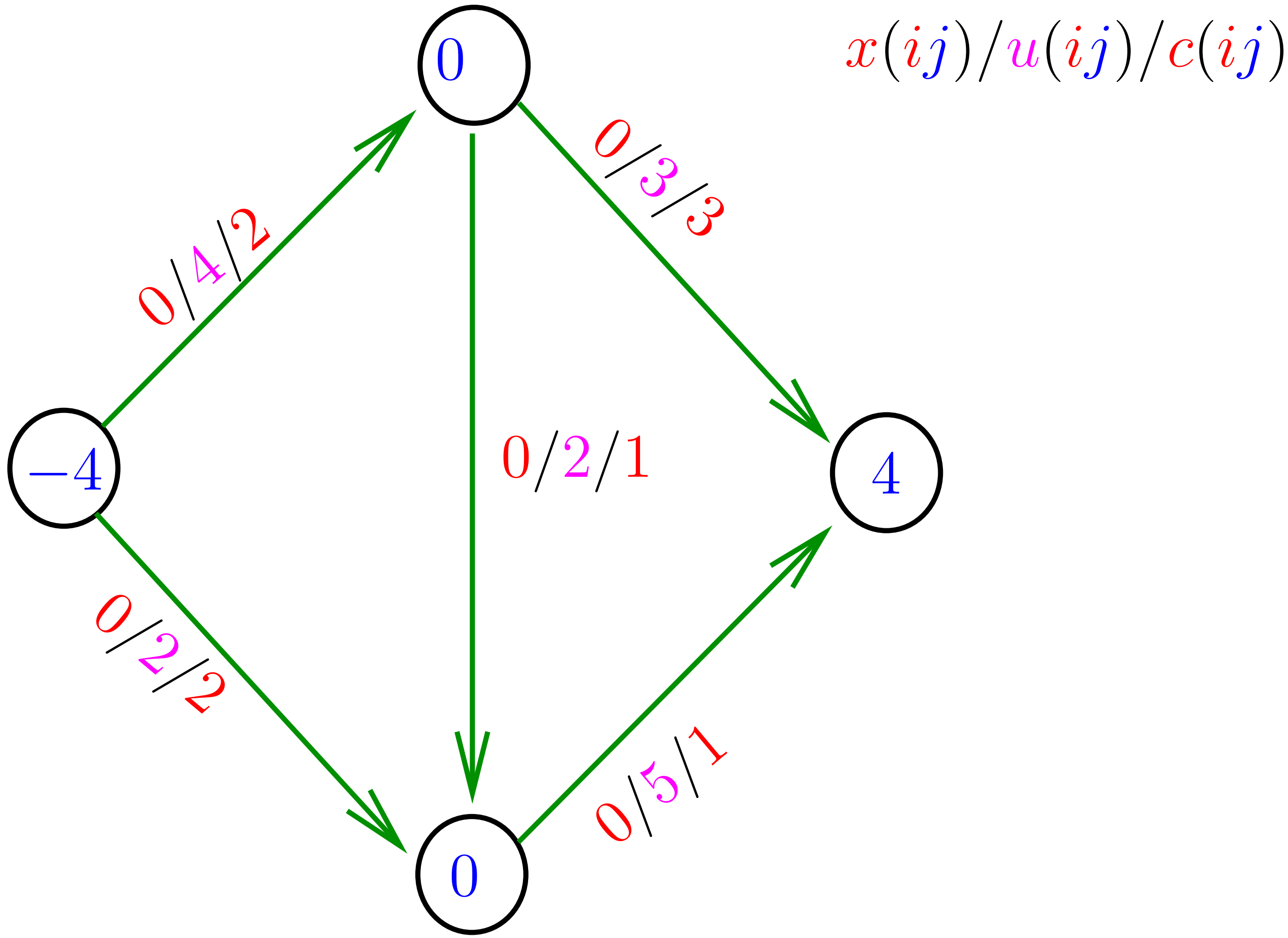
*Sucessive Least-Cost Augmentating*

# Rede



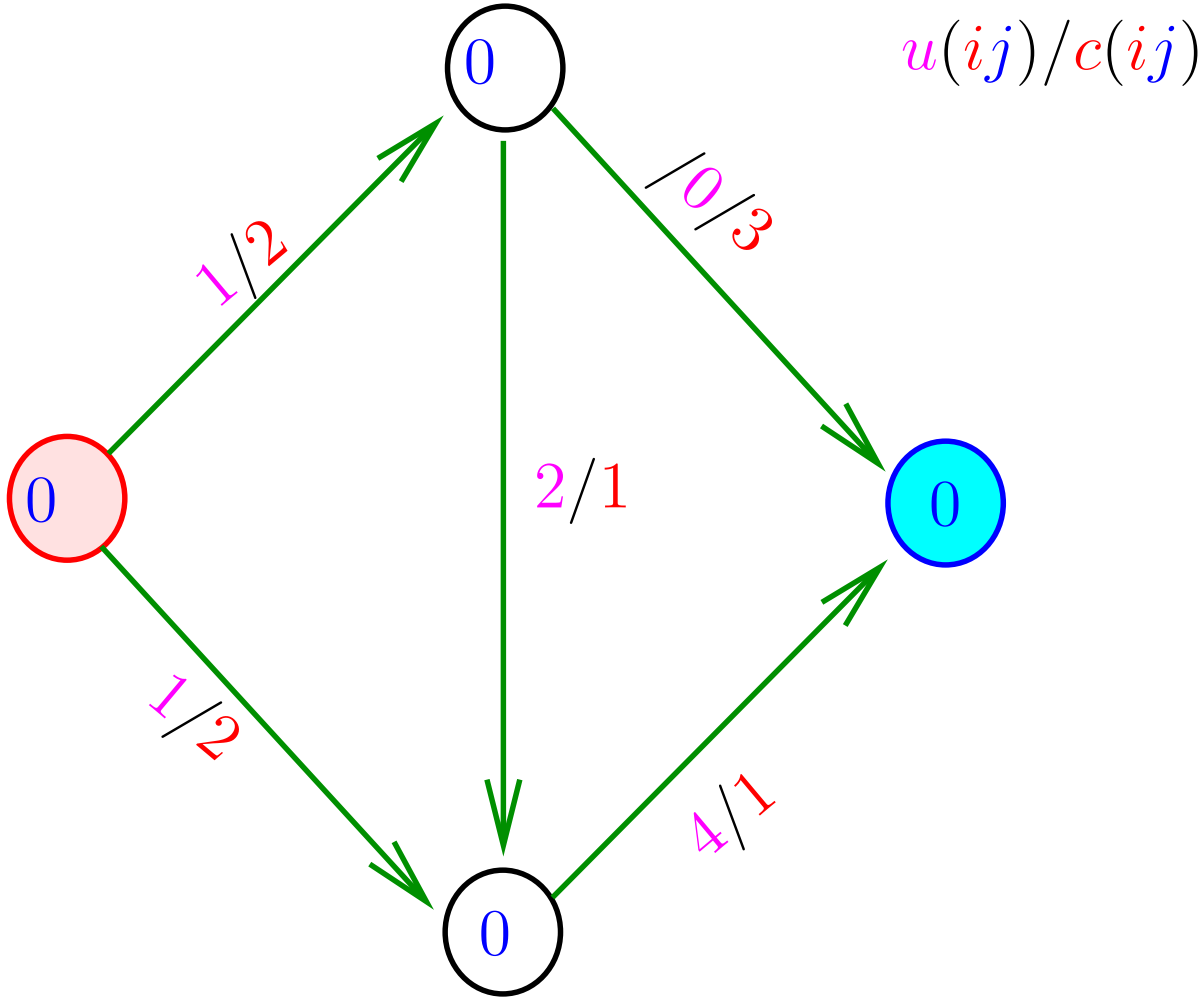

Custo $= 0 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 = 0$

# Rede (1)

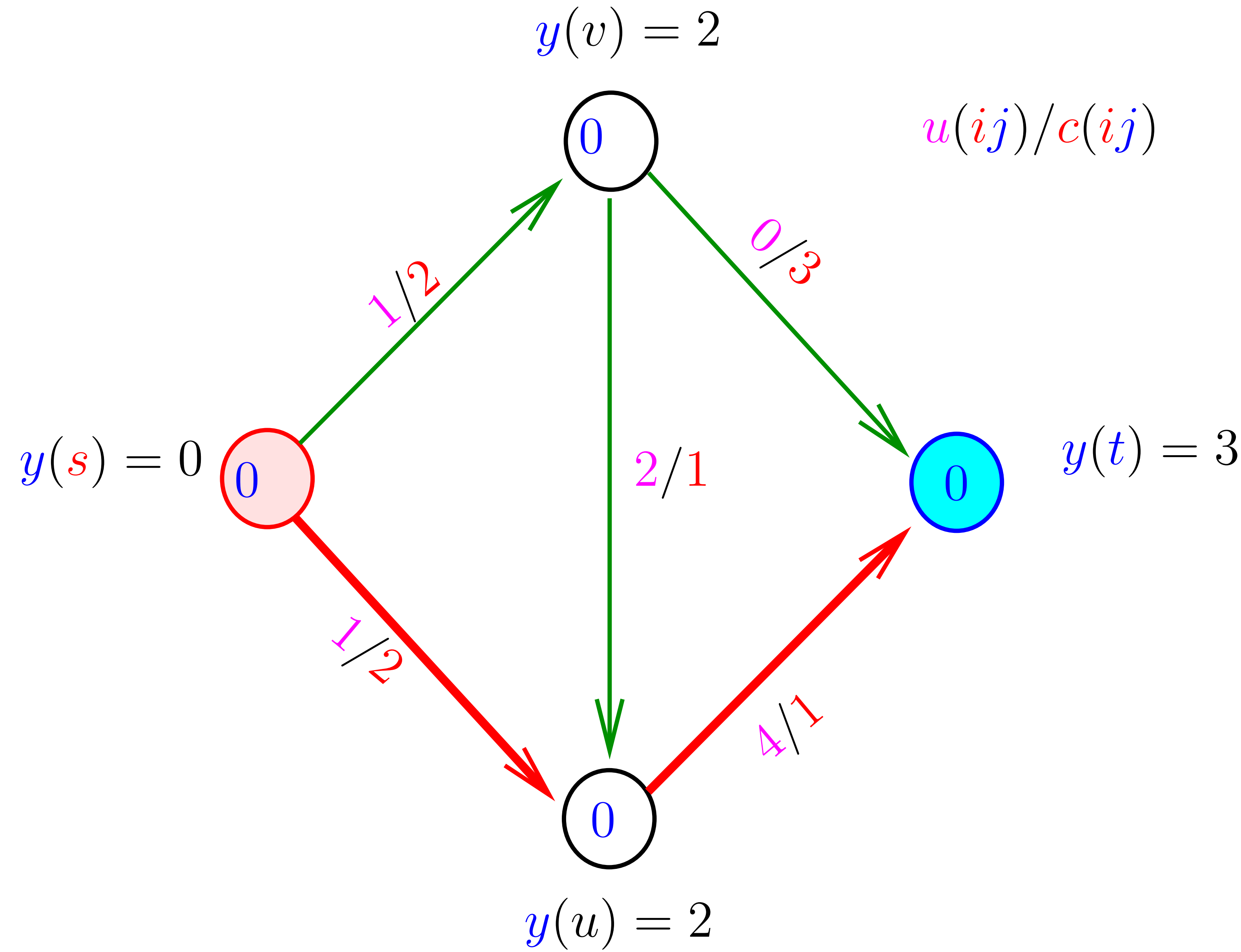



Custo $= 0 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 0 \times 1 = 0$

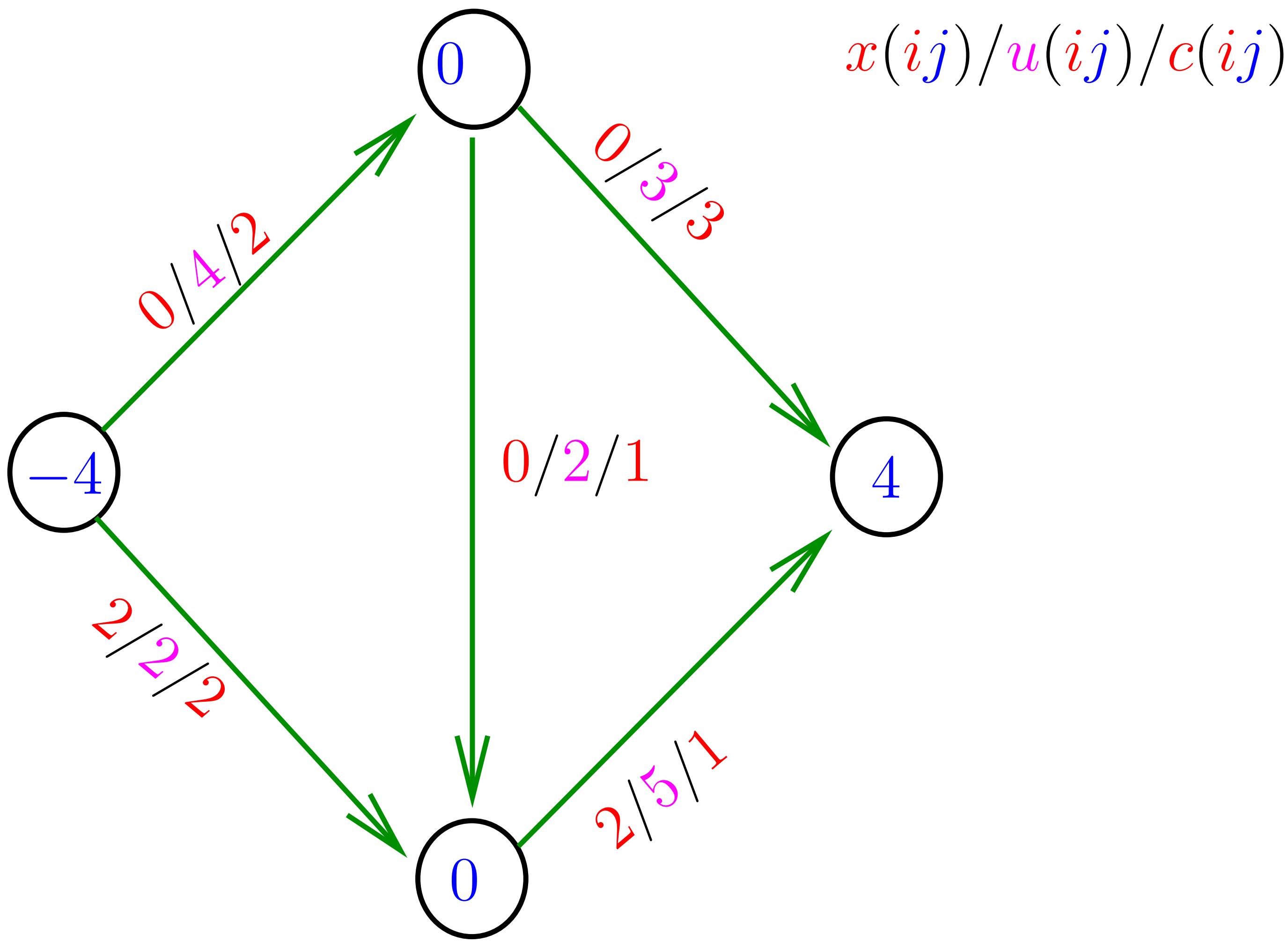
# Rede residual (1)



# Caminho de custo mínimo (1)

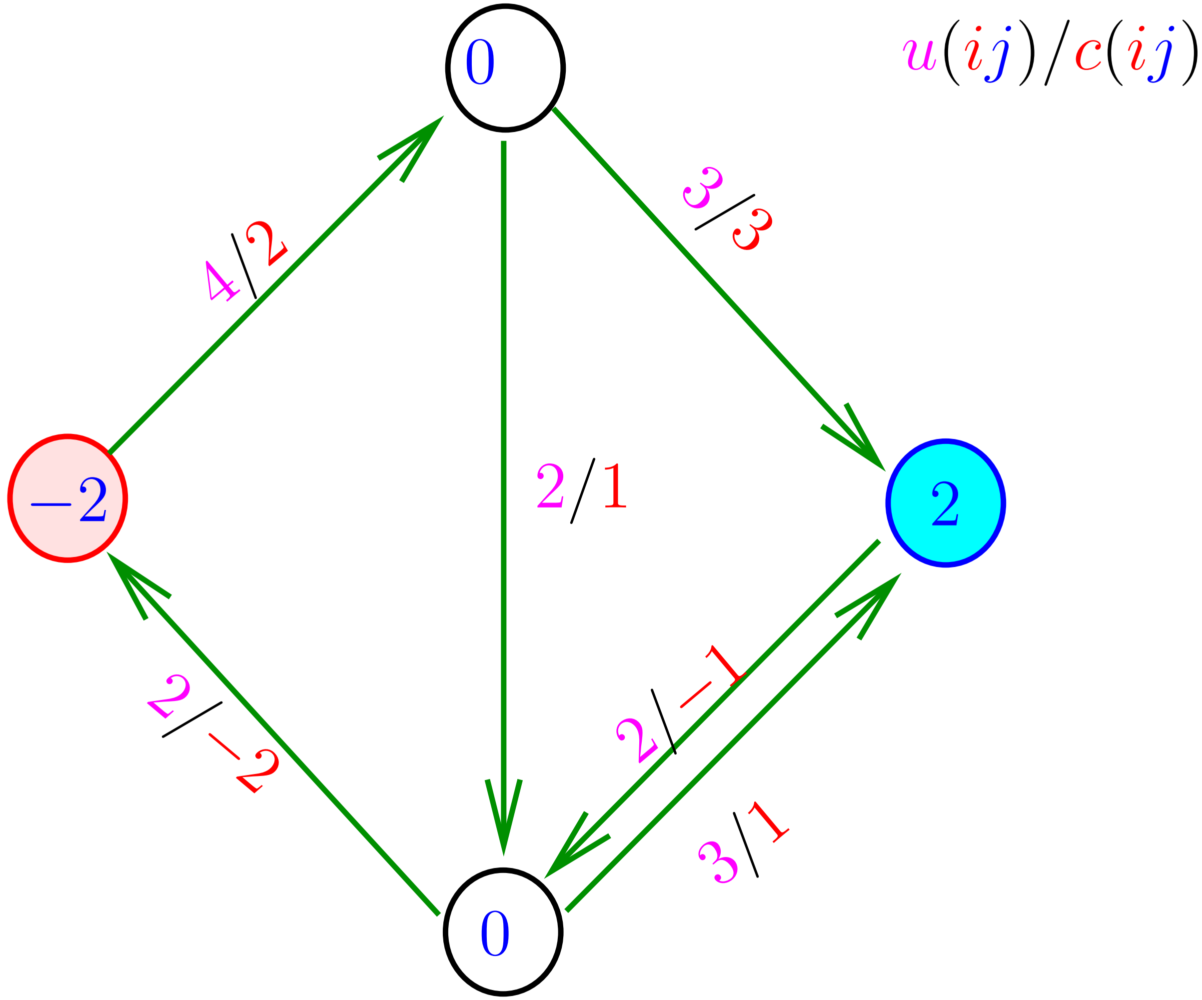


# Rede (2)

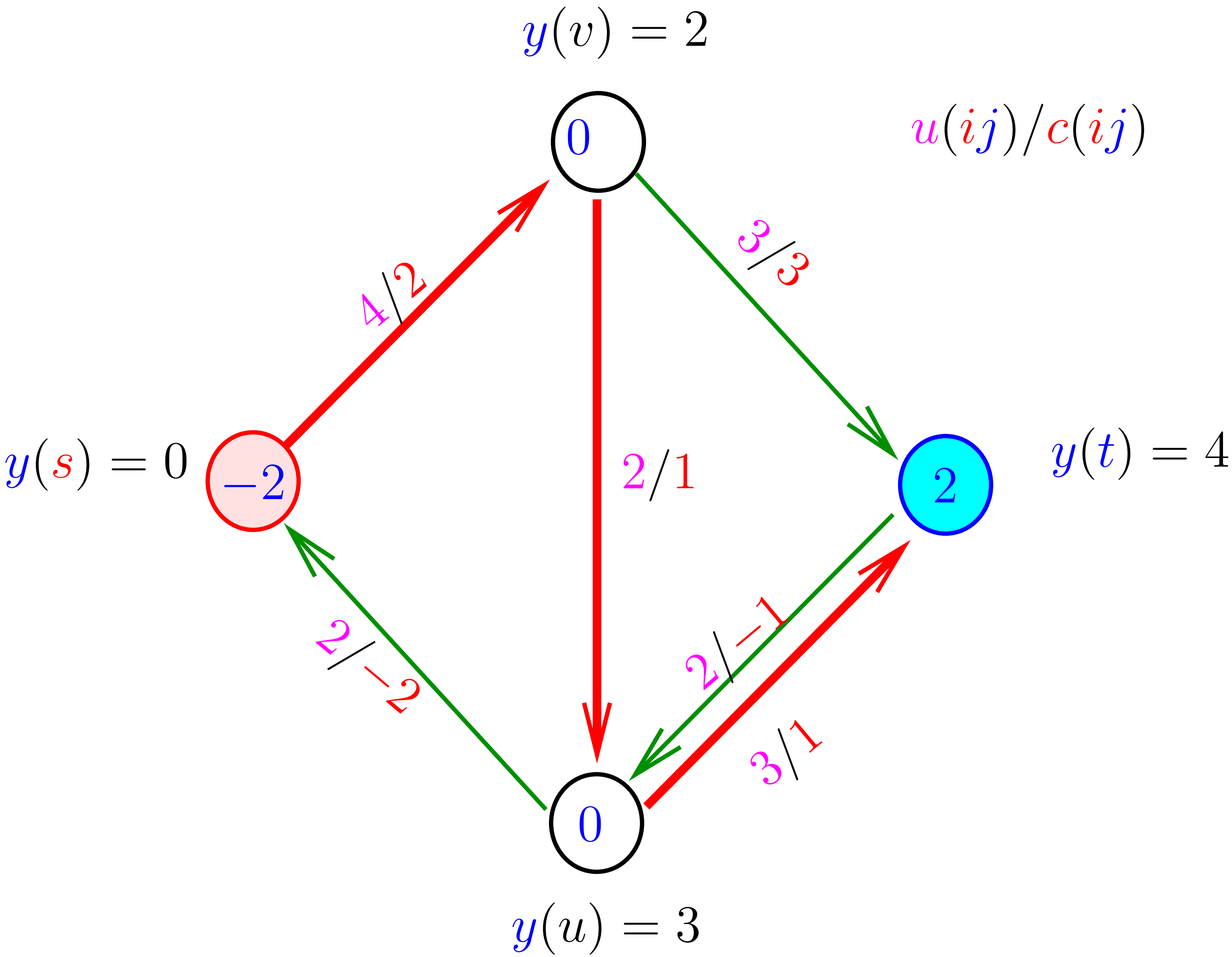



$\text{Custo} = 0 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 6$

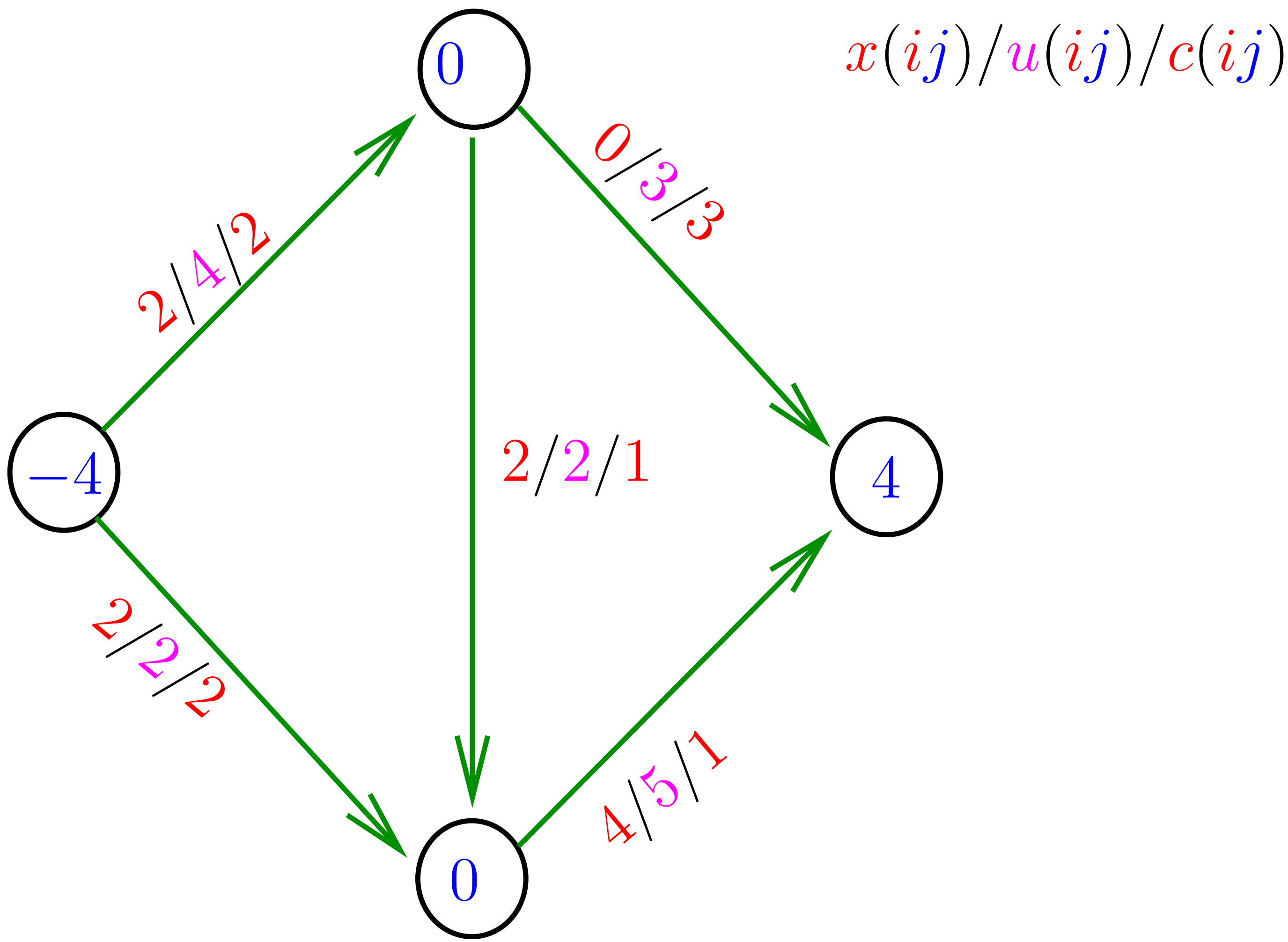
# Rede residual (2)



# Caminho de custo mínimo (2)

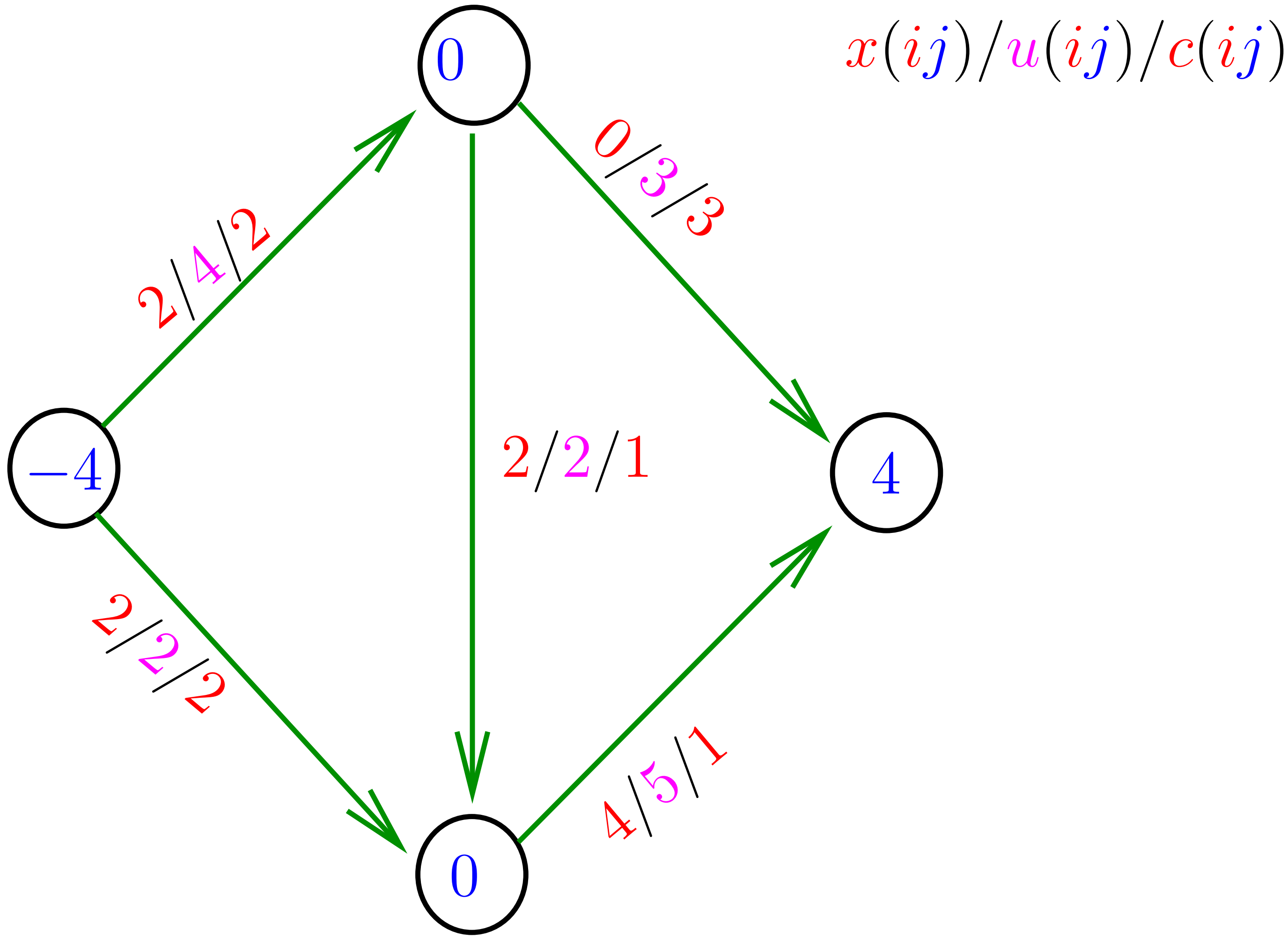


# Rede (3)



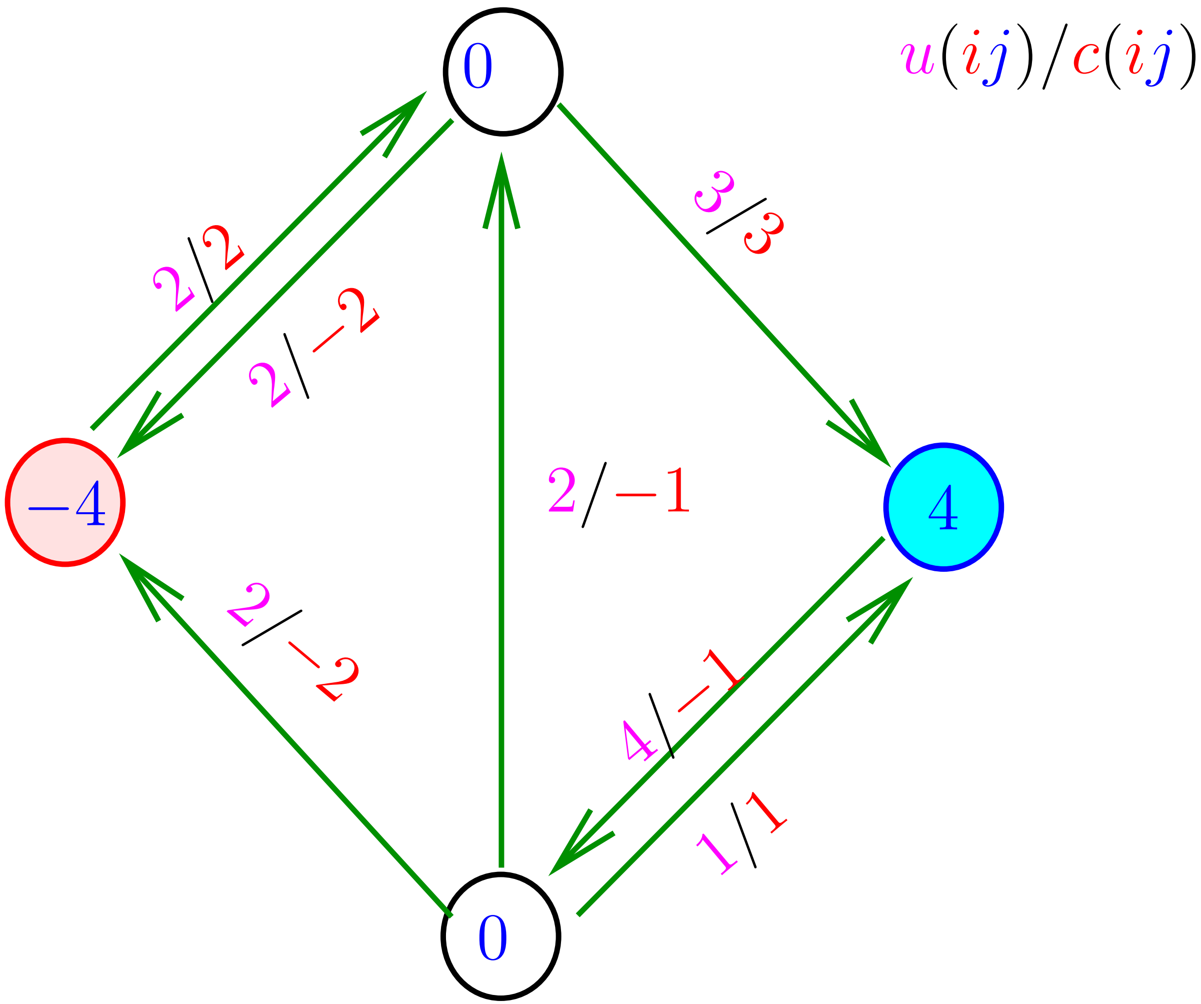

Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

# É fluxo de custo mínimo?

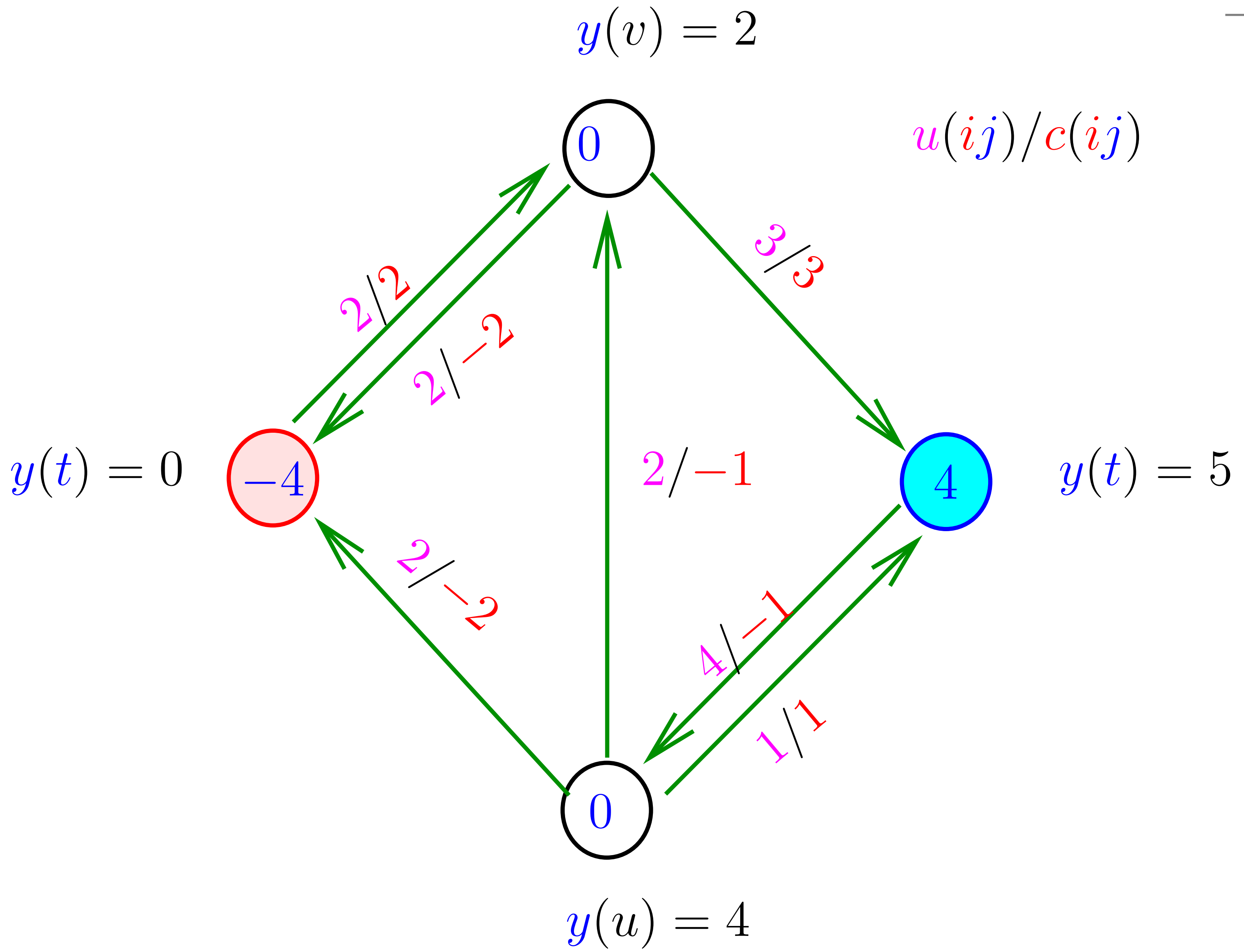



Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

# Rede residual



# Potencial



# Folgas complementares

Seja $x$ o fluxo encontrado.

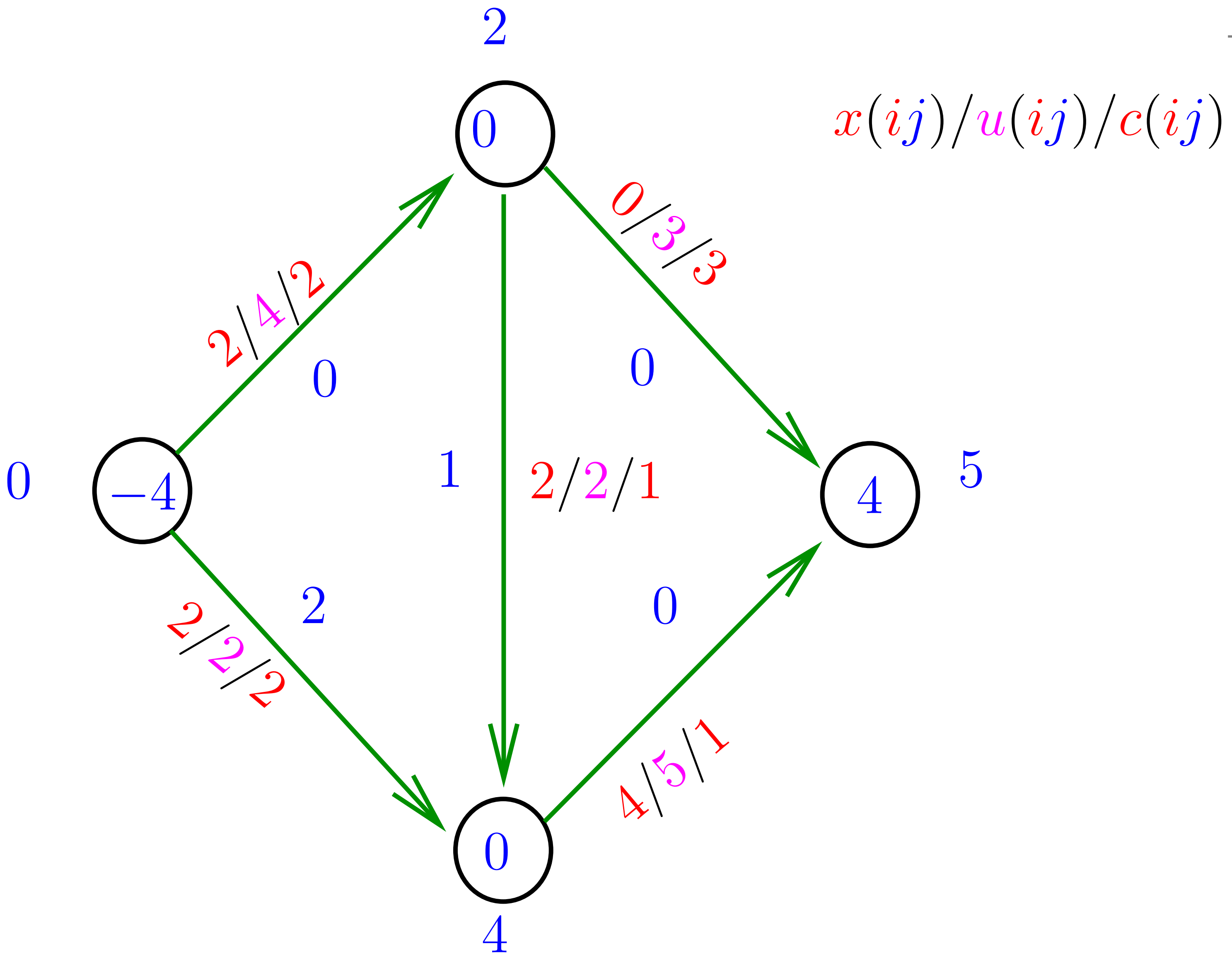
Seja $y$ o potencial encontrado.

Temos as folgas de $x$ e $y$ são complementares já que,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Conclusão: $x$ é um fluxo viável de custo mínimo.

# Solução dual viável




$$yb - wu = 4 \times 5 - 2 \times 2 - 1 \times 2 = 14$$

# Algoritmo de Jewell

JEWEEL $(N, A, u, b, c)$

$\check{x} \leftarrow 0 \quad e \leftarrow 0$

**enquanto** existe $s$ em $N$ tal que $e(s) > b(s)$ **faça**

  $A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

  $\langle y, \pi \rangle \leftarrow$ CAMINHO-MÍNIMO$(N, A_x, s, c)$

  **se** existe $t$ em $N$ tal que $\pi(t) \neq \text{NIL}$ e $e(t) < b(t)$

    **então** INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL$(\check{x}, \pi, s, t)$

    **senão** $T \leftarrow \{j \in N : \pi(j) = \text{NIL}\}$

      **devolva** $T$ $\quad \triangleright$ conjunto de Gale

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

**devolva** $x$ e $y$

# Incremente fluxo viável

INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL $(\check{x}, \pi, s, t)$

Seja $P$ o $st$-caminho determinado por $\pi$

$\delta \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $P\}$

**para cada** arco $ij$ em $P$ **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

$e(s) \leftarrow e(s) - \delta$

$e(t) \leftarrow e(t) + \delta$

# Algoritmo de Jewell

JEWEEL $(N, A, u, b, c)$ $\quad \rhd\ u(ij) > 0 \Rightarrow c(ij) \geq 0$

$\check{x} \leftarrow 0 \quad e \leftarrow 0 \quad y \leftarrow 0$

**enquanto** existe $s$ em $N$ tal que $e(s) > b(s)$ **faça**

  $A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

  $c' \leftarrow$ CUSTO-REDUZIDO $(A_{\check{x}}, c, y)$

  $\langle y', \pi \rangle \leftarrow$ DIJKSTRA $(N, A_x, s, c')$

  **se** existe $t$ em $N$ tal que $\pi(t) \neq \text{NIL}$ e $e(t) < b(t)$

    **então** INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL$(\check{x}, \pi, s, t)$

      $y \leftarrow y + y'$

    **senão** $T \leftarrow \{j \in N : \pi(j) = \text{NIL}\}$

      **devolva** $T$ $\quad \rhd$ conjunto de Gale

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

**devolva** $x$ e $y$

# Custo Reduzido

CUSTO-REDUZIDO $(A, c, y)$

1 **para** cada arco $ij$ em $A_{\check{x}}$ **faça**

2 $\quad c'(ij) \leftarrow c(ij) - (y(j) - y(i))$

3 **devolva** $c'$

Fato. Qualquer caminho que tem custo mínimo em $(N, A, c')$ também tem custo mínimo na rede $(N, A, c)$.

# Invariantes (1)

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

(i1) $e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})$ para cada nó $i$;

(i2) $\sum_i (b(i) - e(i)) = 0$; (Supondo que $b(N) = 0$)

(i3) $x$ respeita $u$.

(i4) $\check{x}(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij)$ para cada arco $ij$.

(i4) $y$ é um $c$-potencial no grafo $(N, A_{\check{x}})$.

(i4) não existe ciclo de custo negativo na rede $(N, A_{\check{x}}, c)$.

onde $x :=$ FLUXO$(\check{x})$ .

# Invariantes (2)

De (i1), (i3) e (i4) segue que

(i5) $x$ é um fluxo de custo mínimo que satisfaz $e(i)$ e respeita $u$.

# Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 2–8 é

$$< nB,$$

onde $B := \max\{|b(i)| : i \in N\}$ .

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | $\mathrm{O}(n+m)$ |
| 2 | $nB\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n^2B)$ |
| 3 | $nB\,\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(nmB)$ |
| 4 | $nB\,\mathrm{O}(n^2) = \mathrm{O}(n^3B)$ |
| 5-8 | $nB\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n^2B)$ |
| 9-10 | $\mathrm{O}(m)$ |
| total | $\mathrm{O}(n^3B)$ |

# Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo JEWEEL é $O(n^3 B)$.

Este consumo de tempo não é polinomial.

# Unimodularidade

CCPS 6.5

# Regra de Cramer

Seja $B$ uma matriz indexada por $M \times M$ tal que $\det(B) \neq 0$.

Se $b$ é um vetor indexado por $M$ então a única solução do sistema de equações

$$Bx = b$$

é dada por

$$x_j = \frac{\det(B_j)}{\det(B)}$$

onde $B_j$ é a matriz obtida de $B$ substituindo a coluna $j$ de $B$ por $b$.

# Conseqüência

Se $B$ é uma matriz indexada por $M \times M$ tal que $\det(B)$ é $+1$ ou $-1$ e $b$ é um vetor inteiro indexado por $M$ então a única solução do sistema de equações

$$Bx = b$$

é inteira.

# Unimodularidade

Um matriz inteira $A$ de “posto pleno” é unimodular se o determinante de cada base de $A$ é $+1$ ou $-1$.

Se $A$ é uma matriz unimodular então o sistema de equações

$$Ax = b$$

tem uma solução básica inteira para cada vetor inteiro $b$.

# Unimodularidade total

Uma matriz é totalmente unimodular se o determinante de qualquer de suas submatrizes é $0, -1$ ou $+1$.

Se $M$ é uma matriz de incidências, então $M$ é totalmente unimodular.

Demonstração: Por indução na dimensão da submatriz...

# Exemplo

| $N$ \ $A$ | $vw$ | $wz$ | $zt$ | $tv$ | $sv$ | $su$ | $sw$ | $uw$ | $uz$ | $wt$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | $-1$ | | | $+1$ | $+1$ | | | | | |
| $w$ | $+1$ | $-1$ | | | | | $+1$ | $+1$ | | $-1$ |
| $z$ | | $+1$ | $-1$ | | | | | | $+1$ | |
| $t$ | | | $+1$ | $-1$ | | | | | | $+1$ |
| $s$ | | | | | $-1$ | $-1$ | $-1$ | | | |
| $u$ | | | | | | $+1$ | | | $-1$ | $-1$ |