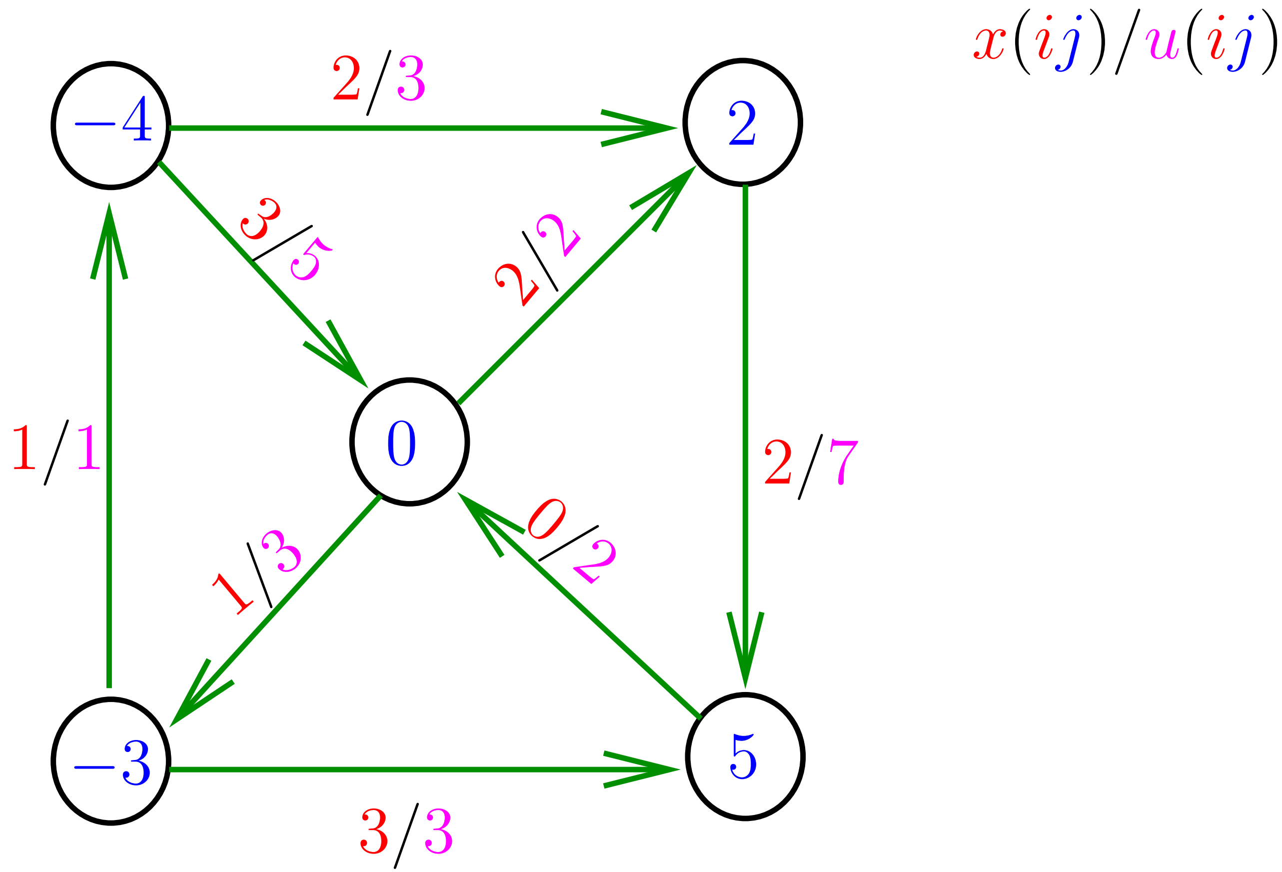
Melhores momentos

AULA PASSADA

Problema do fluxo viável

Problema: Dada uma rede (N, A, u, b) com função-capacidade u e função-demanda b, encontrar um fluxo que satisfaça b e respeite u.

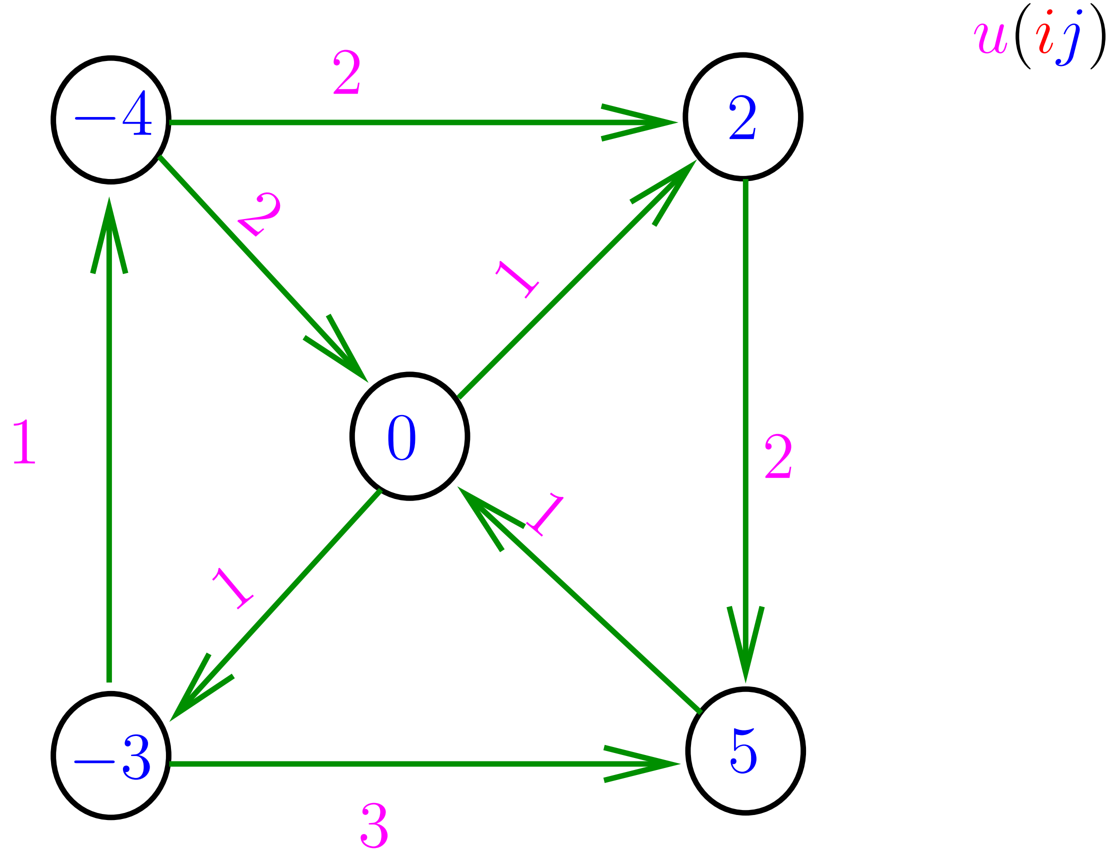


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto T de N,

$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.

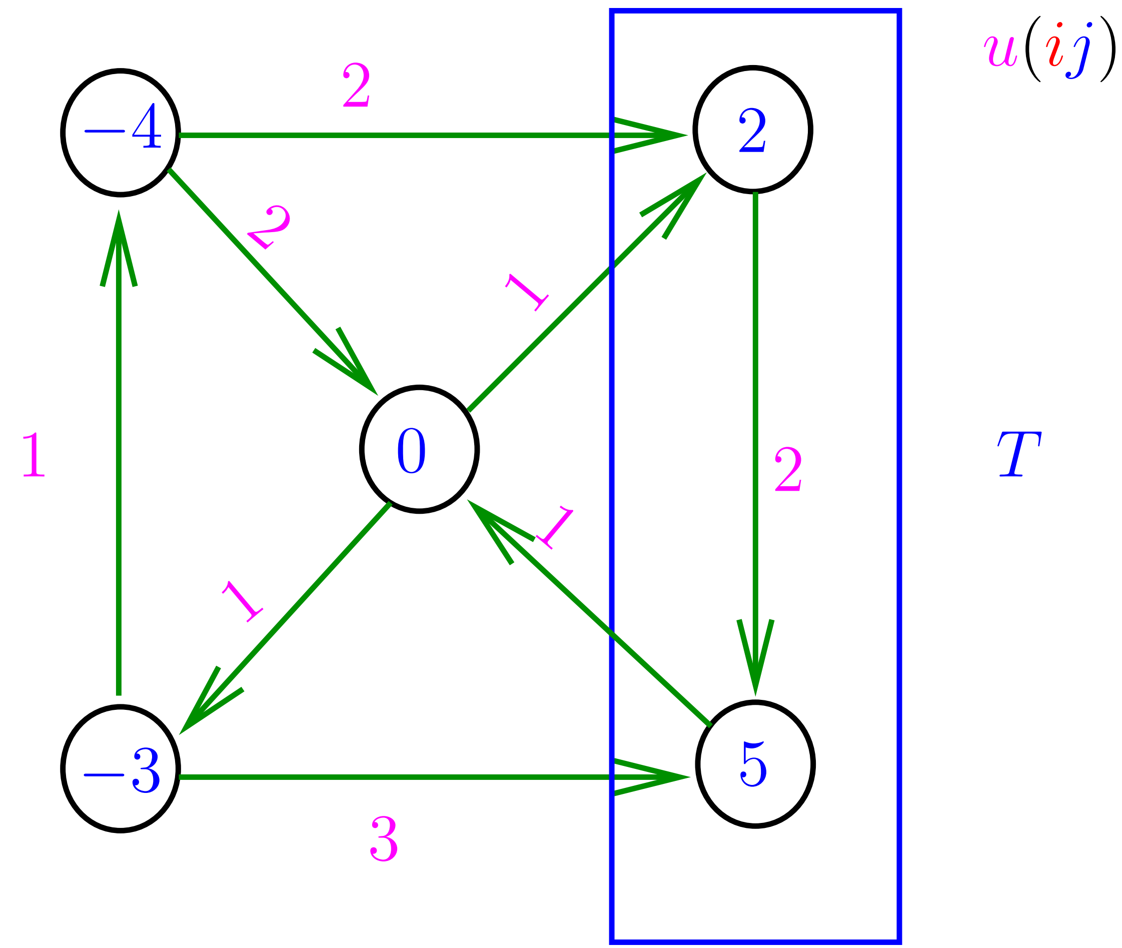


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto T de N,

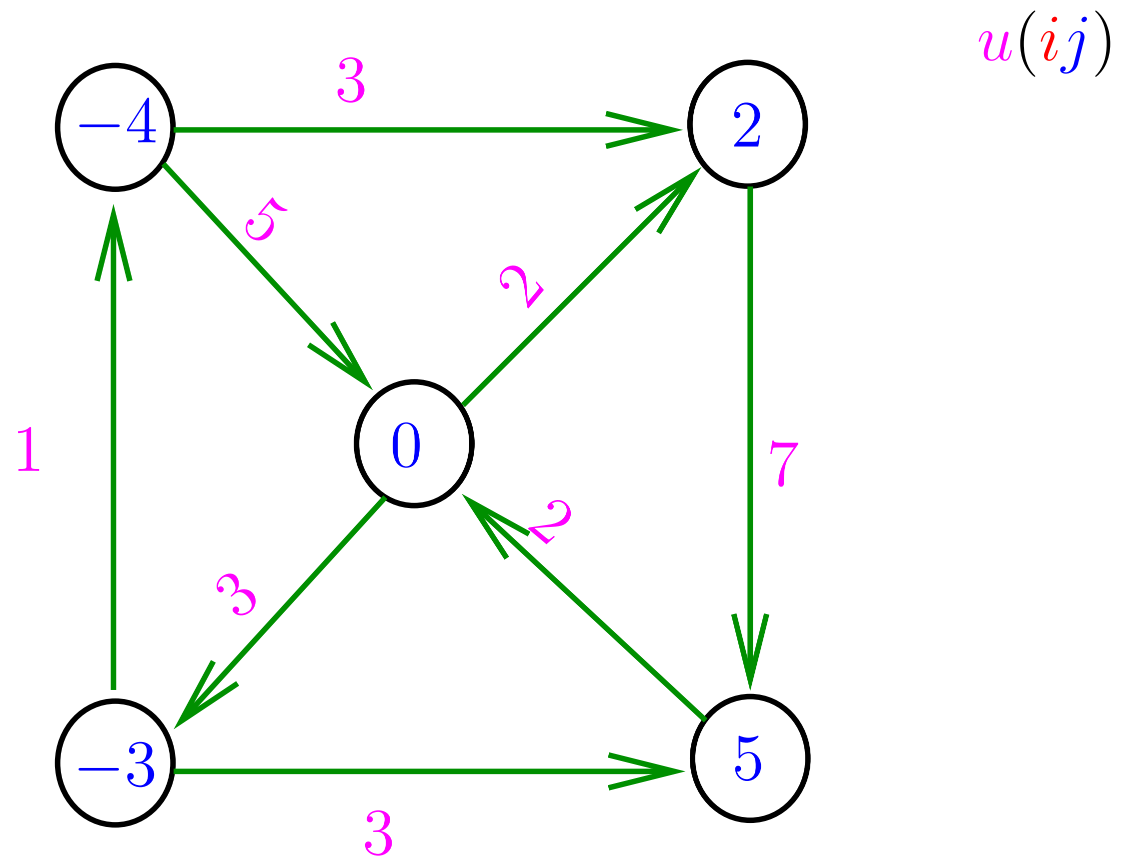
$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.



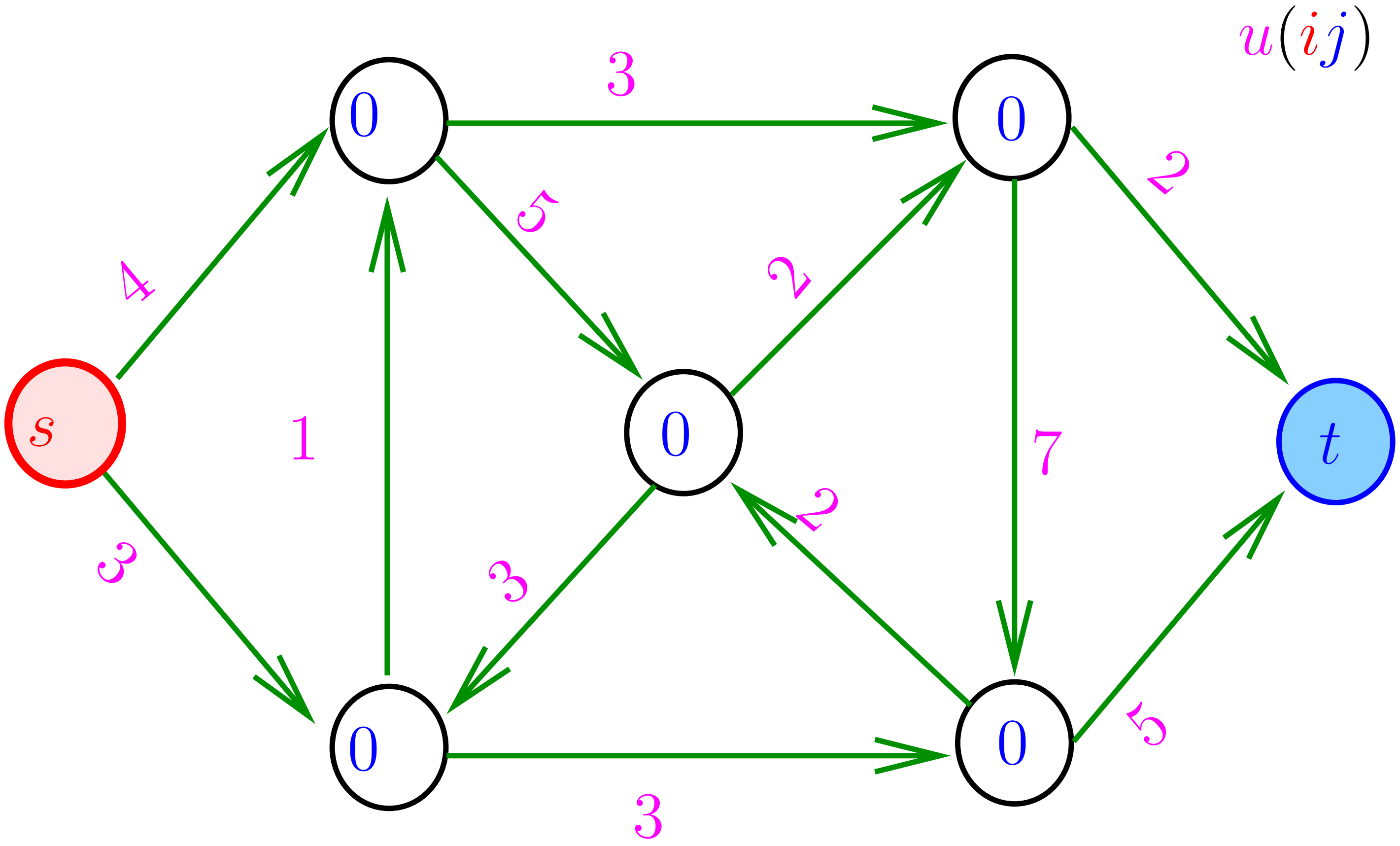
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



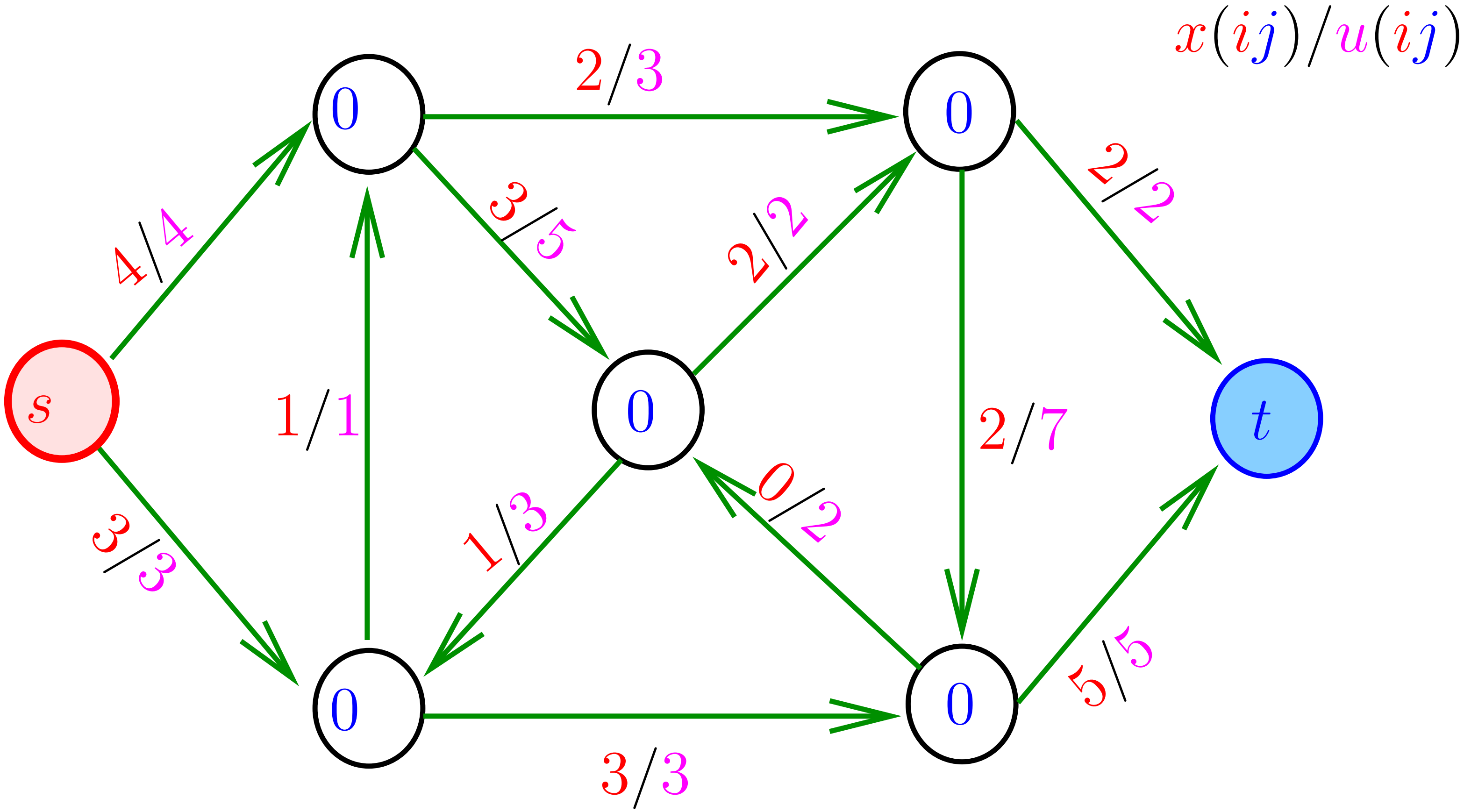
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



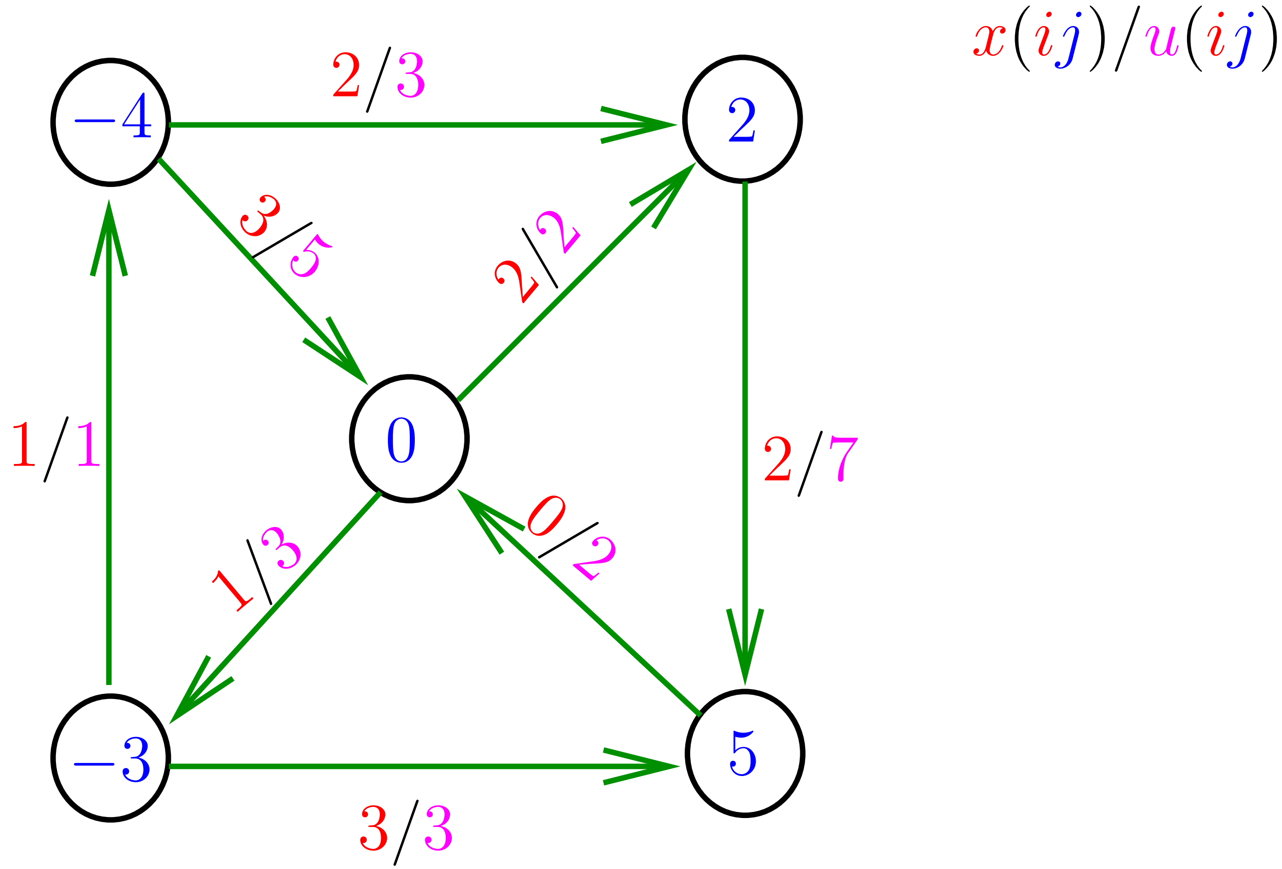
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



AULA 18

Circulações

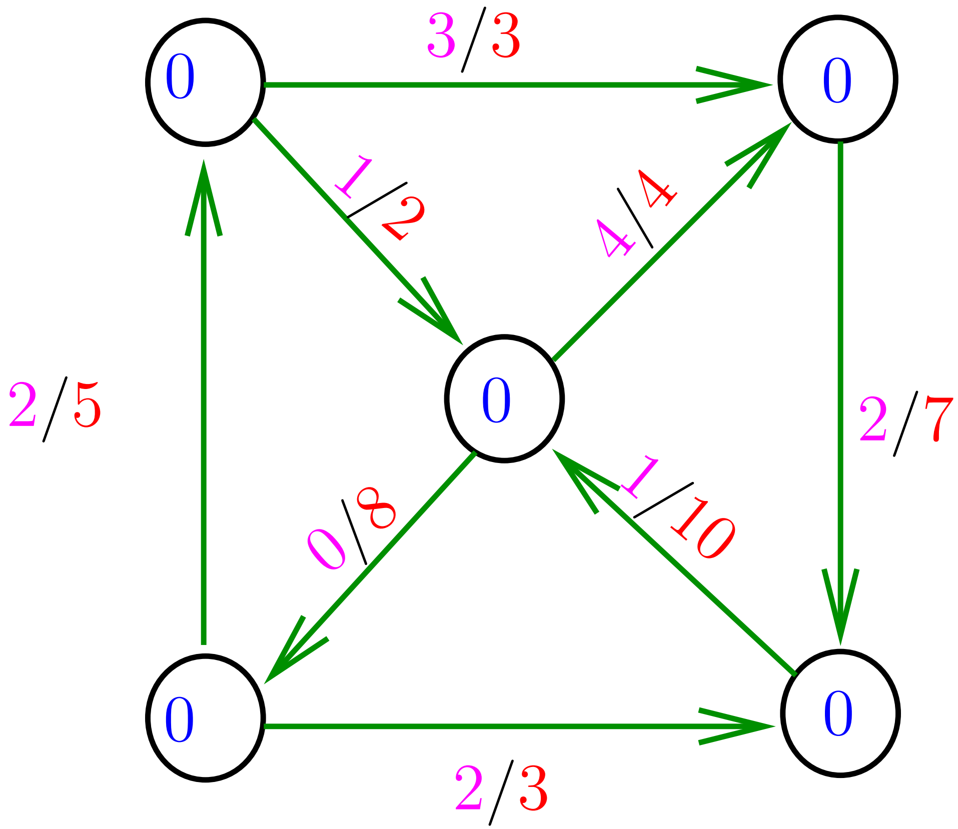
PF 26

Delimitação inferior

Uma função-limite-inferior é qualquer função l de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

Uma circulação satisfaz uma função l se $l \leq x$.

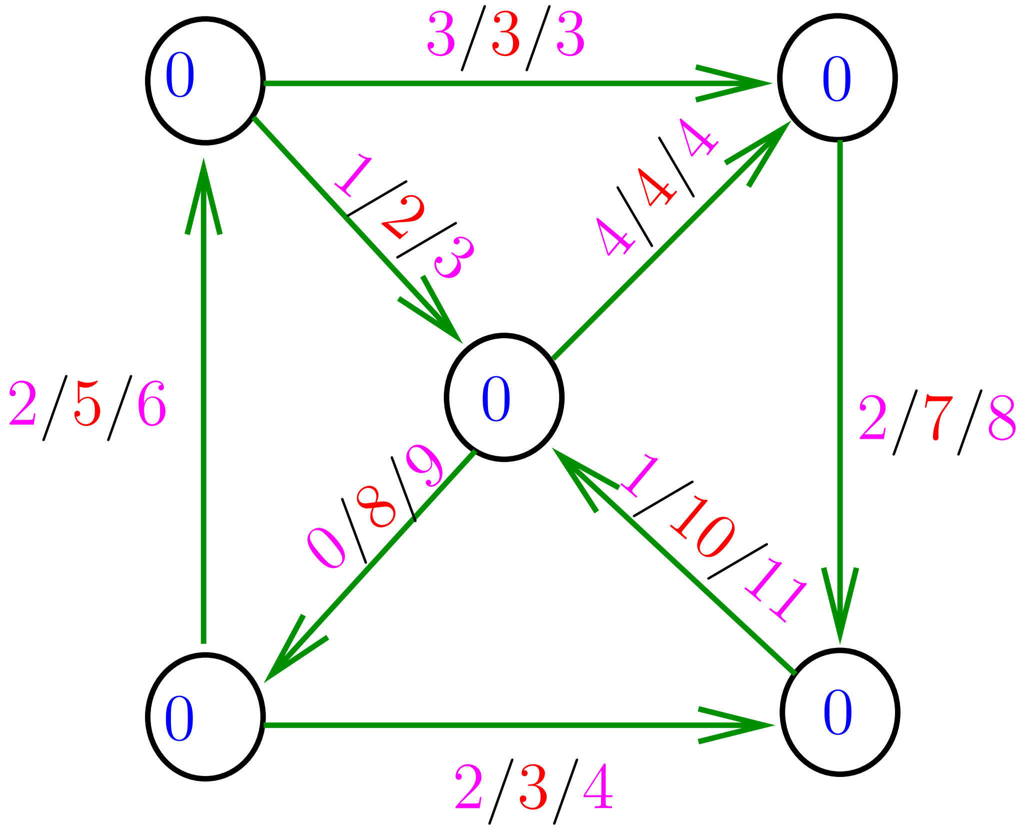
$l(ij)/x(ij)$



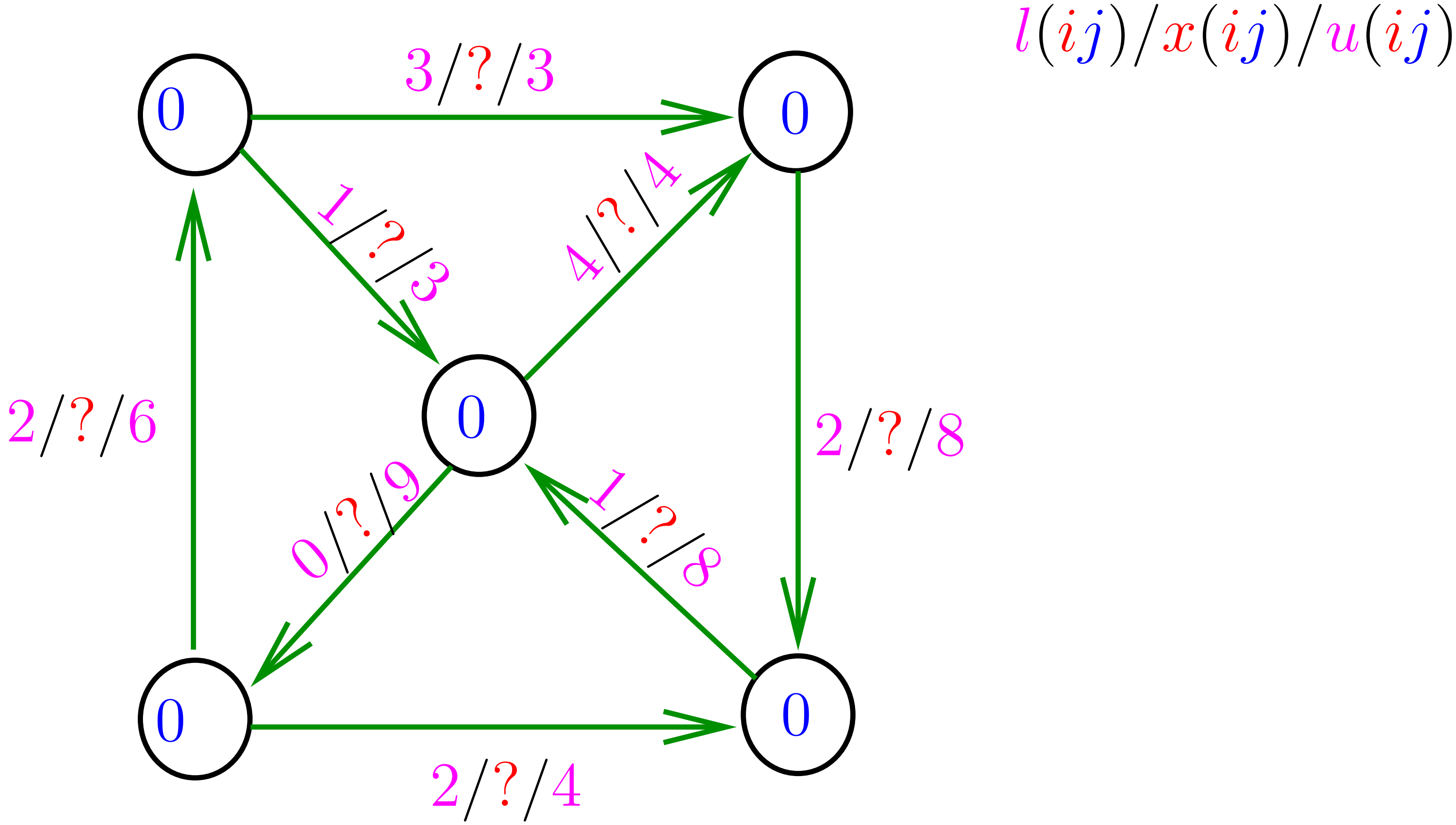
Problema da circulação viável

Dado uma rede (N, A, l, u) com função-limite-inferior l e função-capacidade u tais que $l \leq u$, encontrar uma circulação que satisfaz l e respeita u.

$l(ij)/x(ij)/u(ij)$



Existe circulação viável?

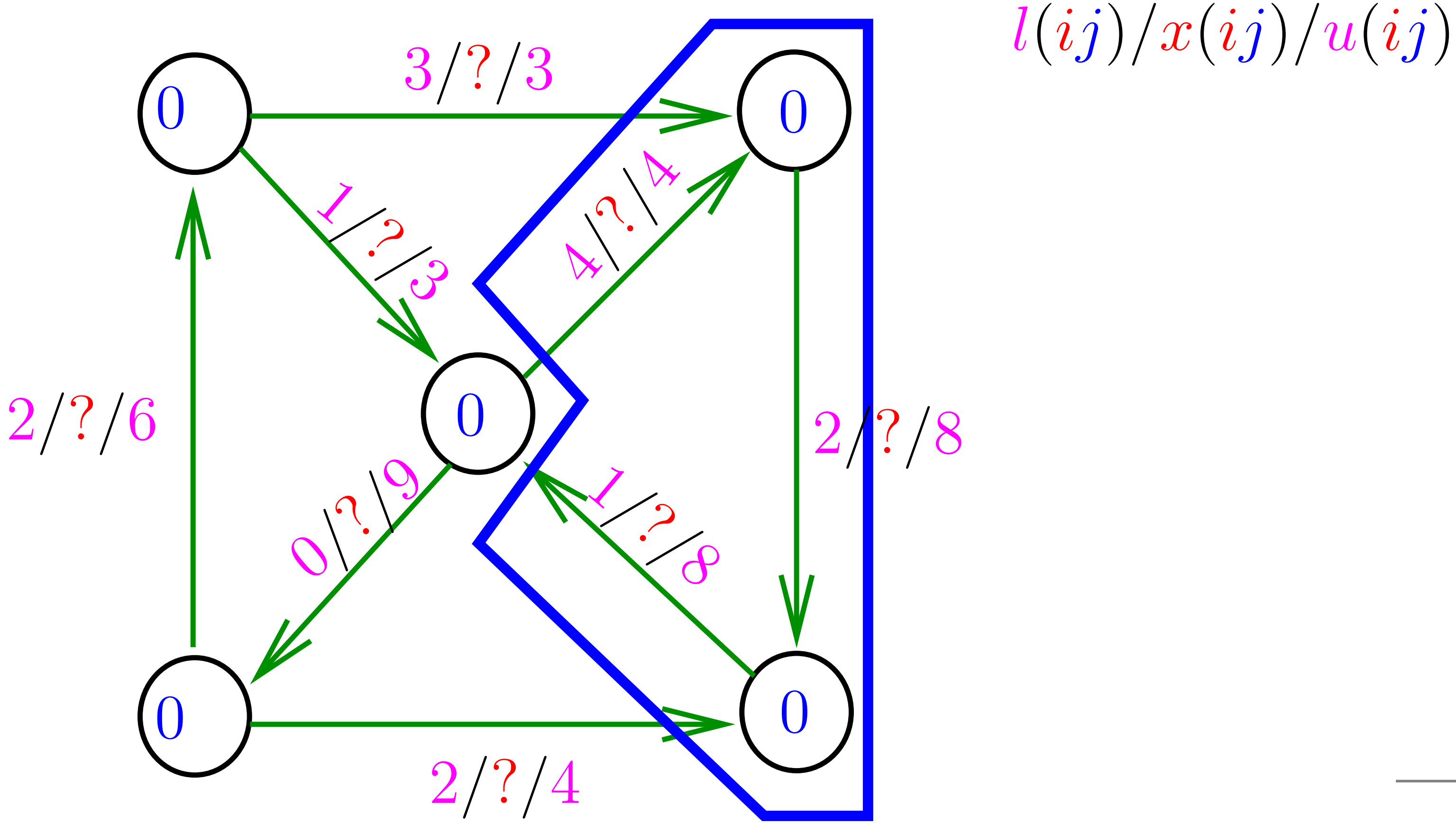


Teorema de Hoffman

Existe uma circulação x tal que $l \leq x \leq u$ se e somente se

$$l(\overline{T}, T) \leq u(T, \overline{T})$$

para todo subconjunto T de N.



Teorema de Hoffman (2)

Seja (N, A, u, l) uma rede com funções capacidades u e l. Existe uma circulação x tal que $l \leq x \leq u$ se e somente se

$$l(\overline{T}, T) \leq u(T, \overline{T})$$

para todo subconjunto T de N.

Demonstração (esboço):

$(\Rightarrow)$ Suponha que x é uma circulação satisfazendo as condições e T é um subconjunto de N, então

$$\begin{aligned} l(\overline{T}, T) &\leq x(\overline{T}, T) \\ &= x(T, \overline{T}) \\ &\leq u(T, \overline{T}) \ . \end{aligned}$$

Teorema de Hoffman (3)

Demonstração (esboço):

$(\Leftarrow)$ Escolha um fluxo x tal que $l \le x \le u$ e

$$\Phi = \sum(|e(i)| : i \in N)$$

é mínimo.

Se $\Phi = 0$, então x é uma circulação.

Podemos supor $\Phi > 0$. Seja $t \in N$ tal que $e(t) > 0$.

Seja $T := \{i \in N$: existe ti-pseudo-caminho incremento$\}$.

$$\begin{aligned} 0 &< e(T) \\ &= x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) \\ &= l(\overline{T}, T) - u(T, \overline{T}) \ . \end{aligned}$$

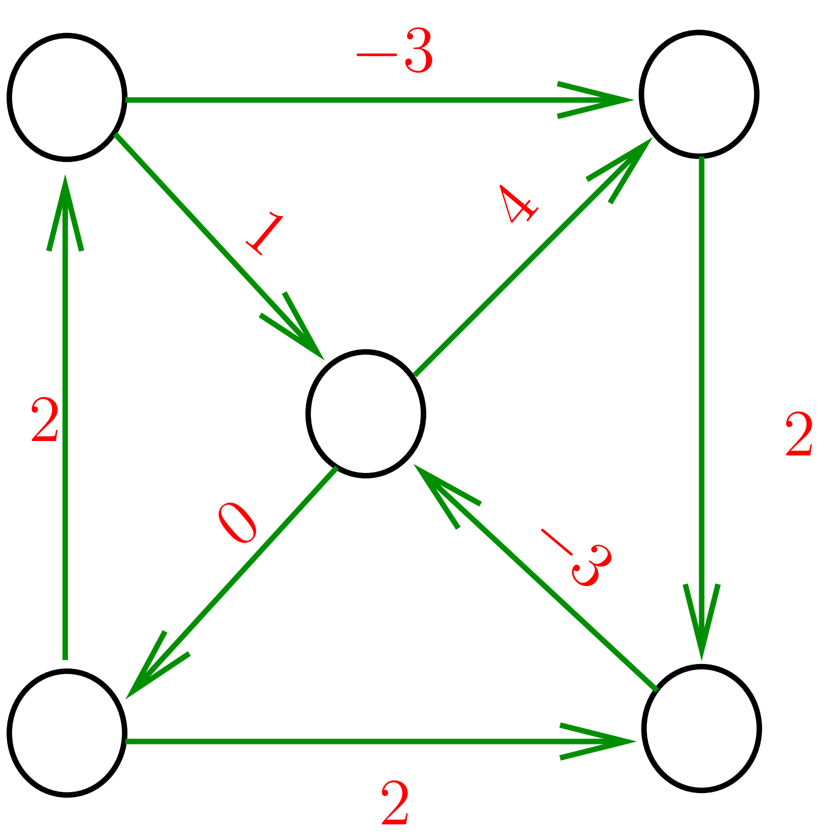
Fluxo viável de custo mínimo

PF 20.1, 20.2, 20.3

Função-custo

Uma função-custo em um grafo (N, A) é qualquer função que associa um número inteiro $c(ij)$ a cada arco ij, ou seja, qualquer função

$$c : A \rightarrow \mathbb{Z} .$$

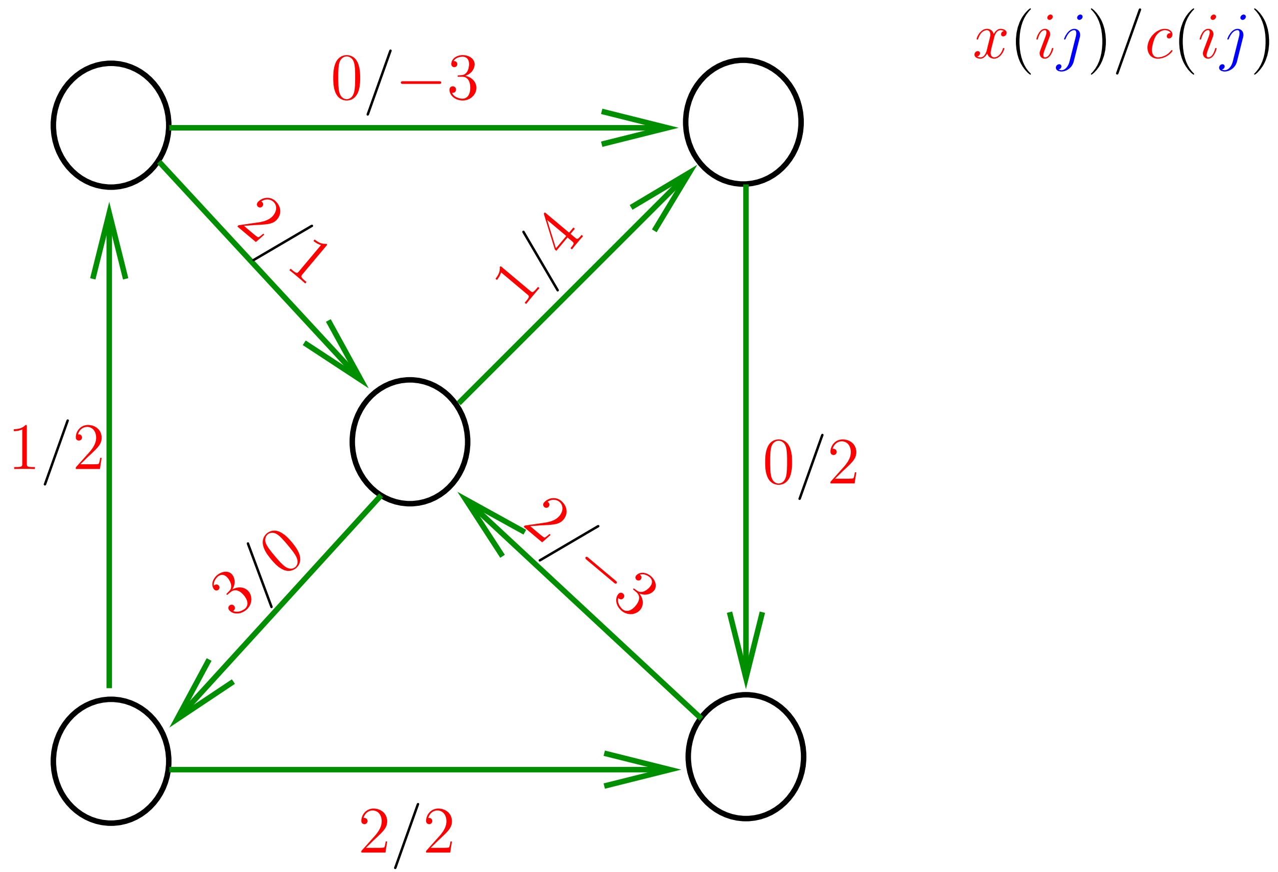


Fluxos e custos

O custo de um fluxo x é o número i,

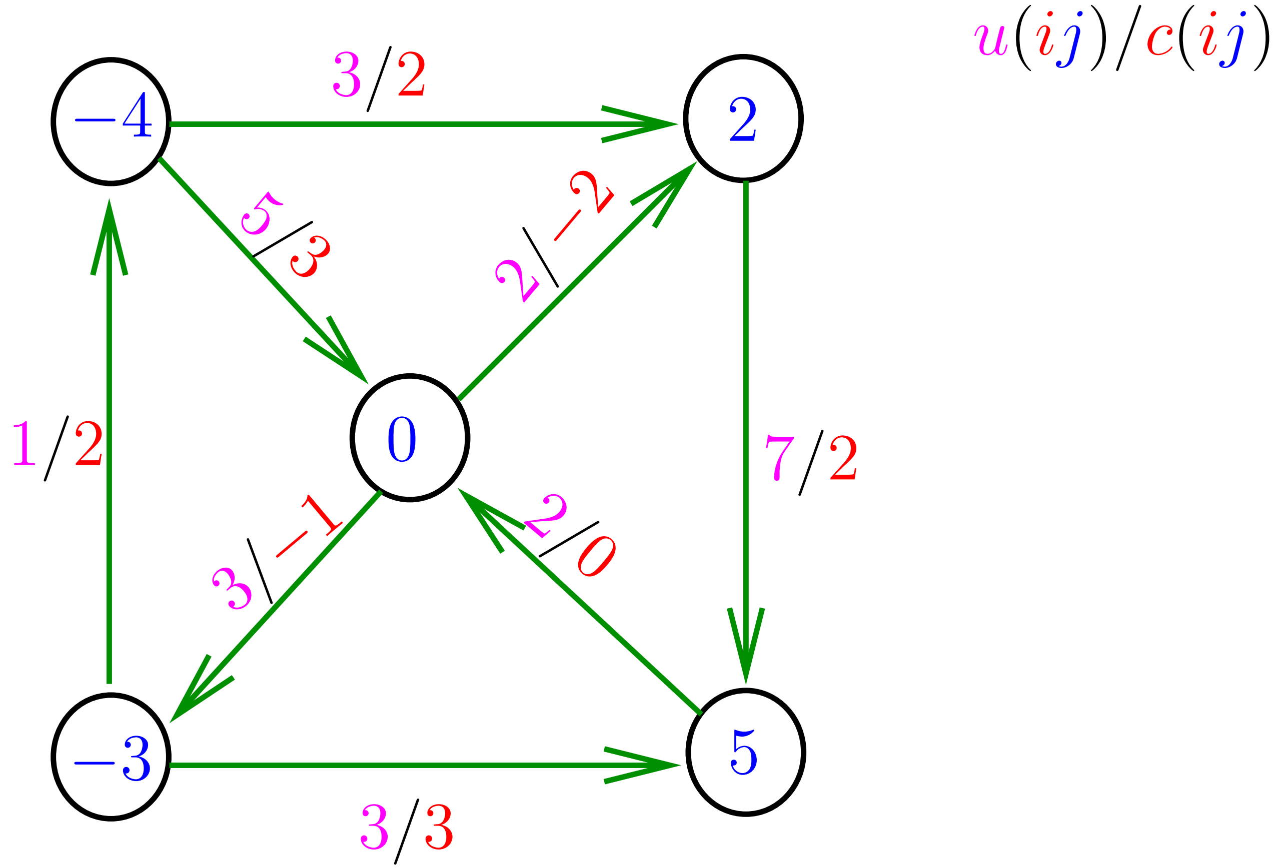
$$cx := \sum (c(ij)x(ij) : ij \in A) .$$

Exemplo: um fluxo de custo 2

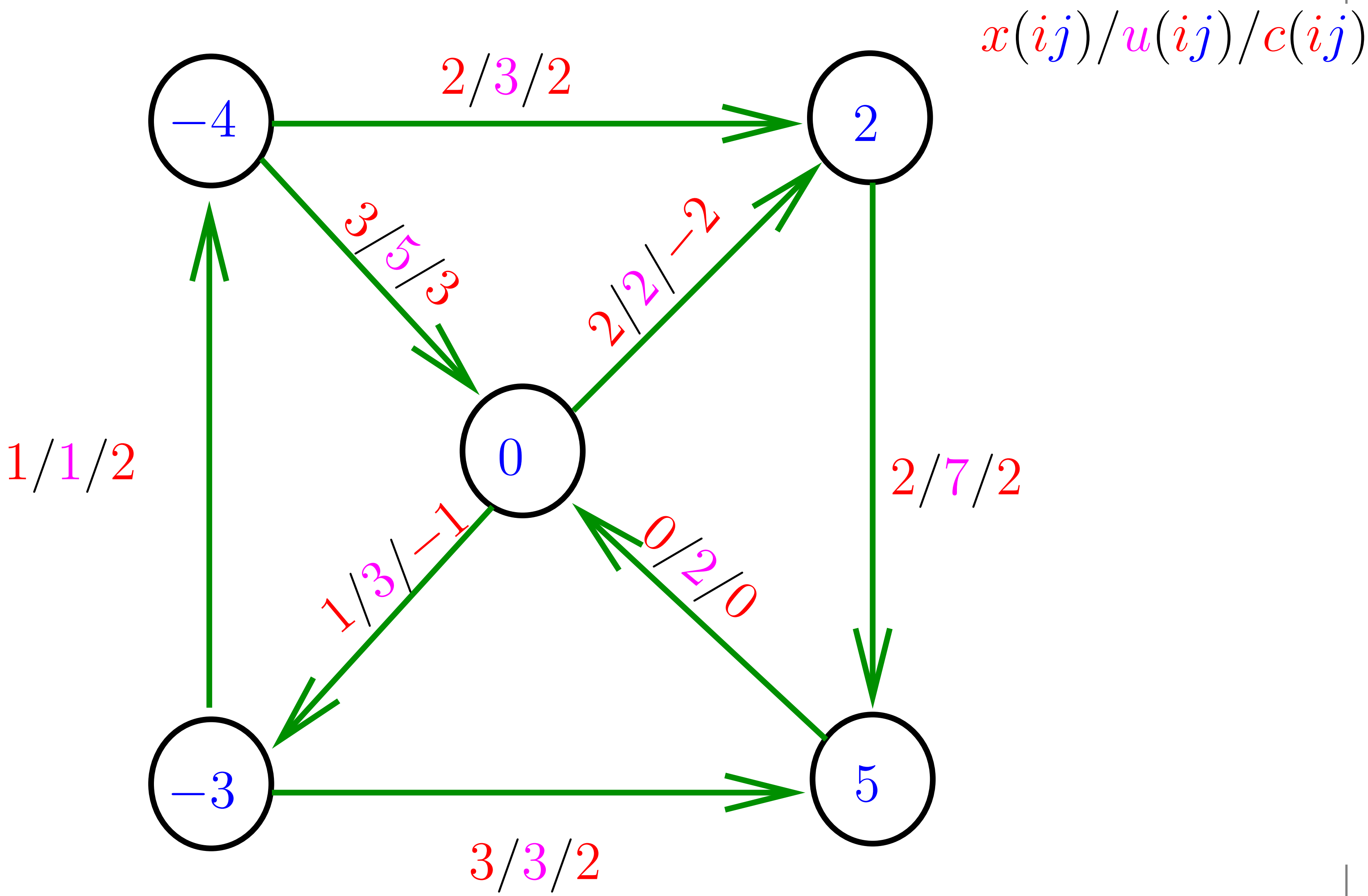


Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede (N, A, u, b, c) com função-capacidade u, função-demanda b e função-custo c, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça b e respeite u.



É fluxo de custo mínimo?



Lema da dualidade

Se x é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c + w)$-potencial y.

Chamaremos tal par (y, w) de solução dual-viável.

Conseqüência. Se x é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c + w)$-potencial y então x é um fluxo ótimo.

Demonstração

$$
\begin{aligned}
yb &= \sum_i y(i)b(i) \\
&= \sum_i y(i)(x(\bar{\imath}, i) - x(i, \bar{\imath})) \\
&= \sum_j y(j)x(\bar{\imath}, i) - \sum_i y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} y(j)x(ij) - \sum_{ij} y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\
&\leq \sum_{ij} (c(ij) + w(ij))x(ij) \\
&= (c+w)x \quad \leq \quad cx + wu\ .
\end{aligned}
$$

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$
$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \; .$$

Folgas complementares (2)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij)\ .$$

Folgas complementares (3)

Fato. Se x é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial y então x é ótimo.

Demonstração (esboço):
Defina w de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$: para cada arco ij,

$$w(ij) := \max\{0, y(j) - y(i) - c(ij)\}$$

e defina

$$A_{<} := \{ij : y(j) - y(i) < c(ij)\}$$
$$A_{=} := \{ij : y(j) - y(i) = c(ij)\}$$
$$A_{>} := \{ij : y(j) - y(i) > c(ij)\}$$

Folgas complementares (4)

$$cx = \sum_{A_=} (y(j) - y(i))x(ij) + \sum_{A_>} c(ij)u(ij)$$

$$wu = \sum_{A_>} (y(j) - y(i))x(ij) - \sum_{A_>} c(ij)u(ij)$$

Logo,

$$\begin{aligned} cx + wu &= \sum_{A_=} (y(j) - y(i))x(ij) + \sum_{A_>} (y(j) - y(i))x(ij) \\ &= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\ &= yb \,. \end{aligned}$$

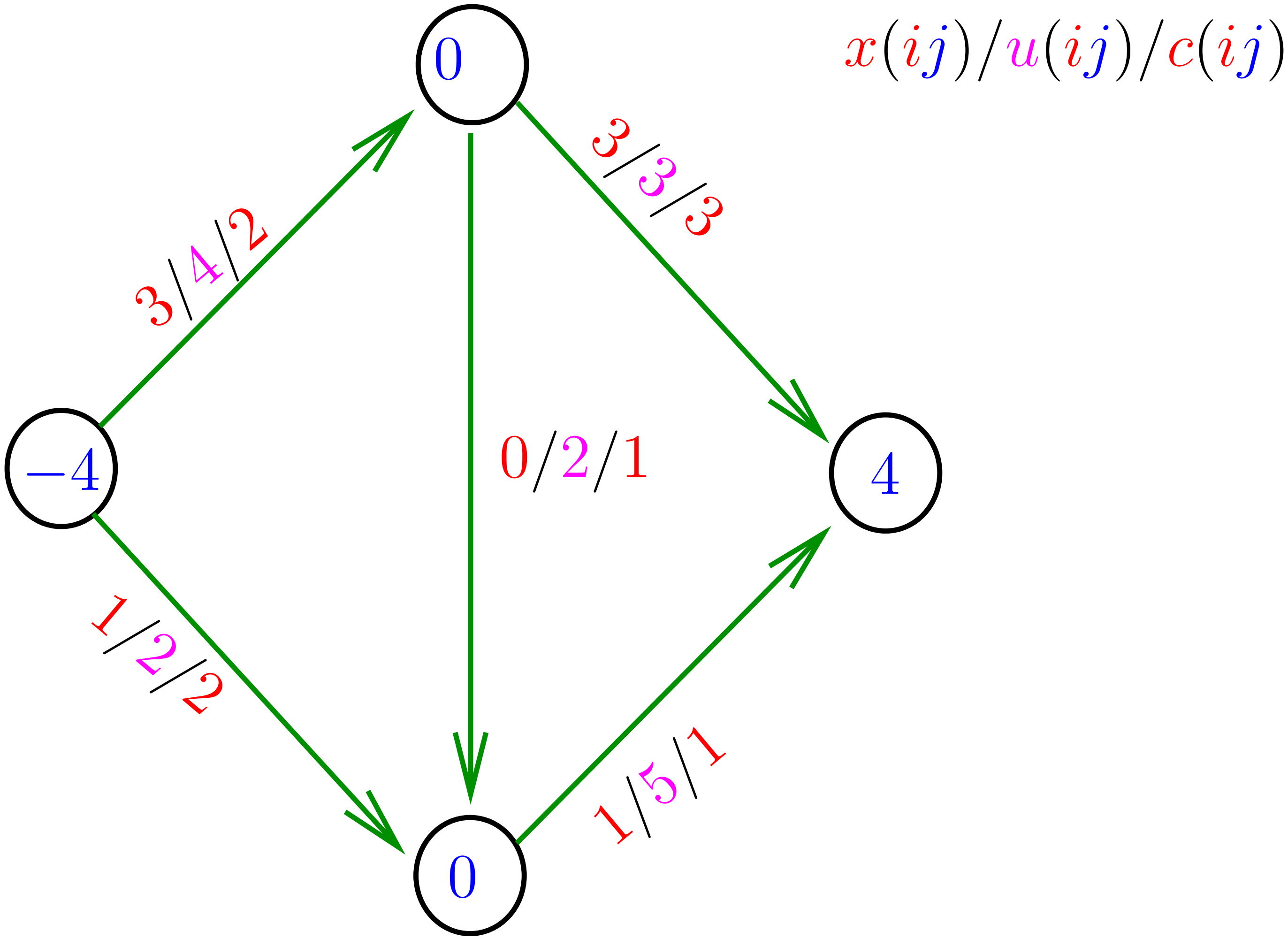
(-6)

Algoritmo de Klein

PF 26

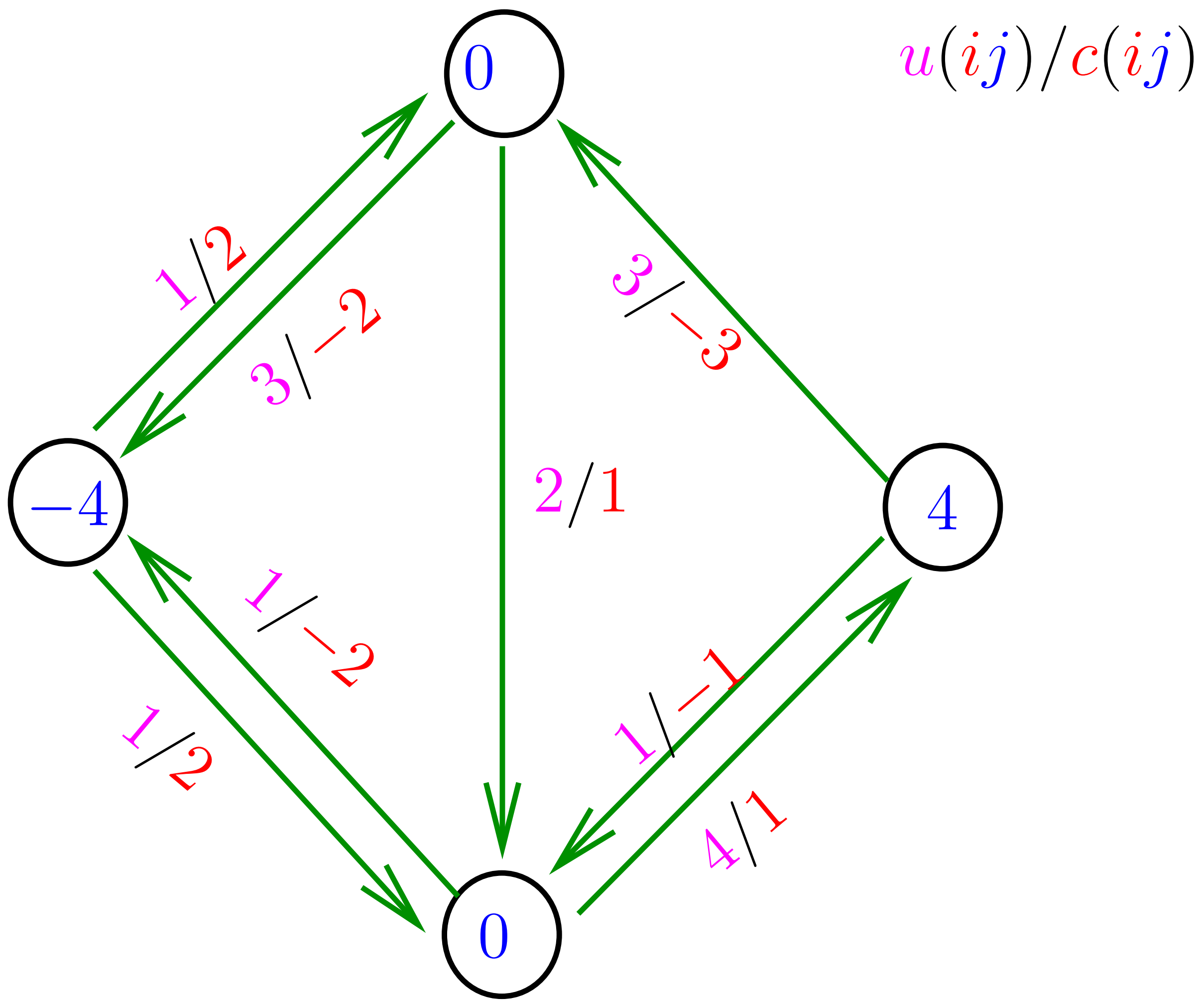
Cycle Cancelling Algorithm

É fluxo de custo mínimo?

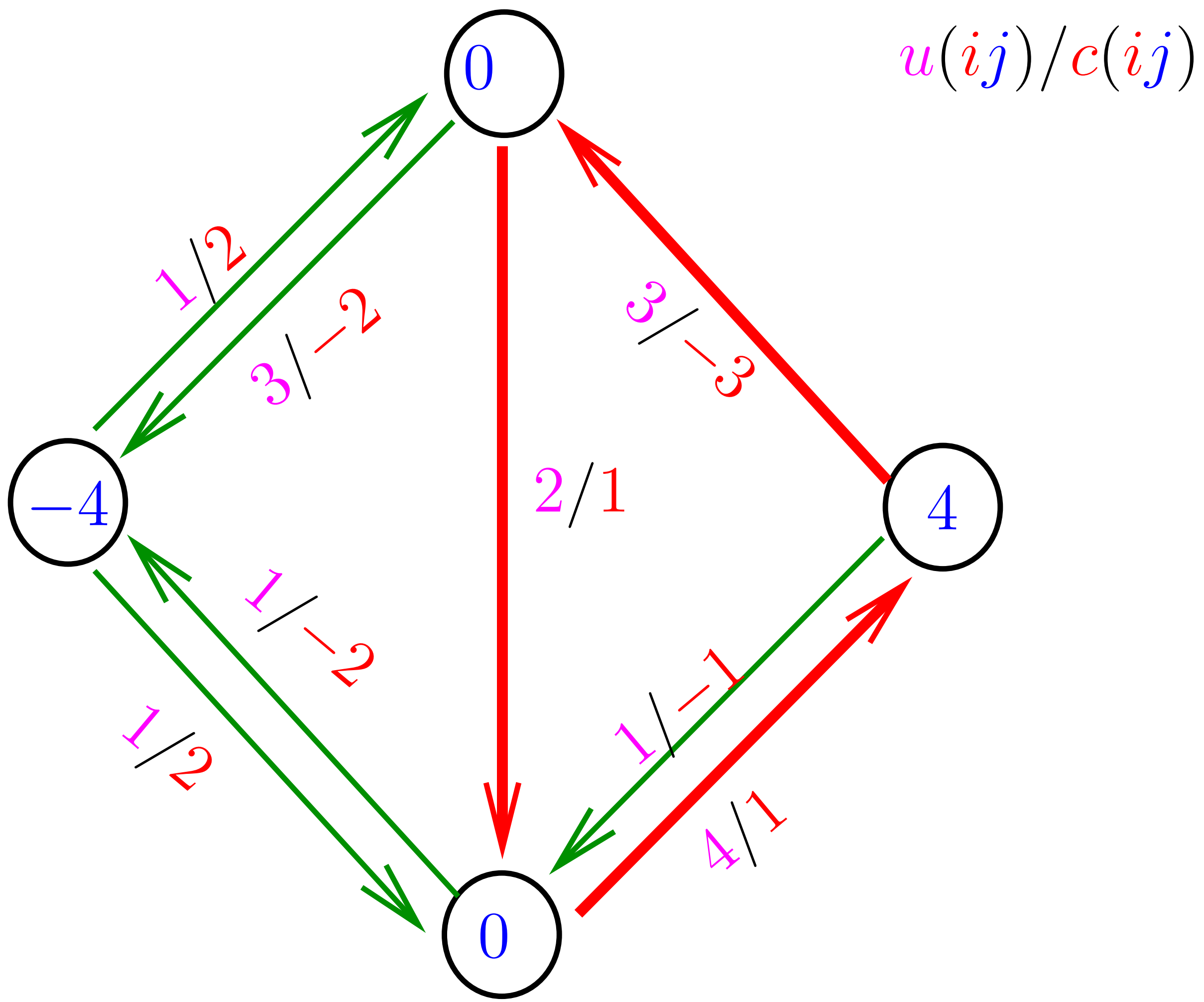


Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 18$

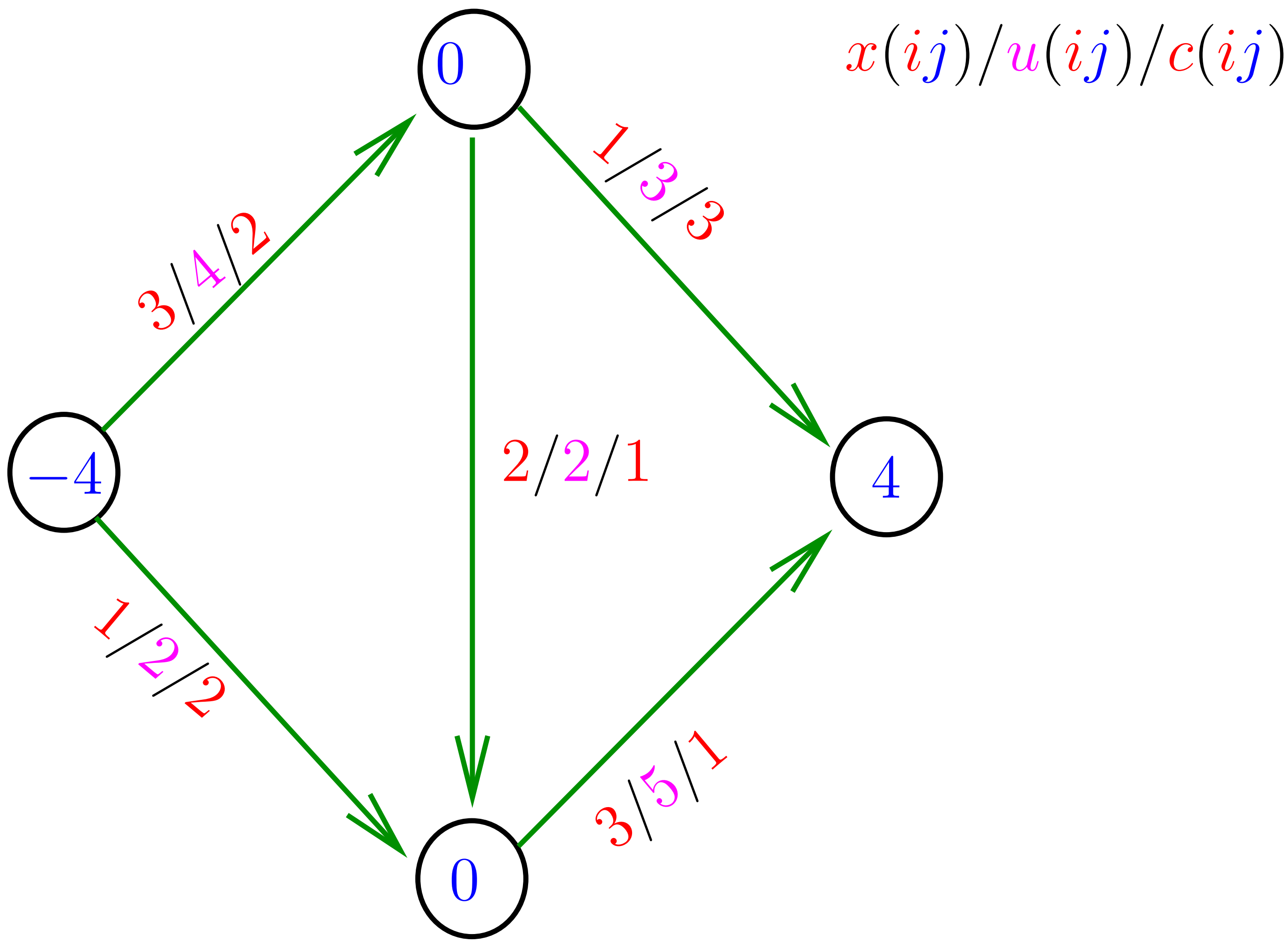
Rede residual



Ciclo negativo

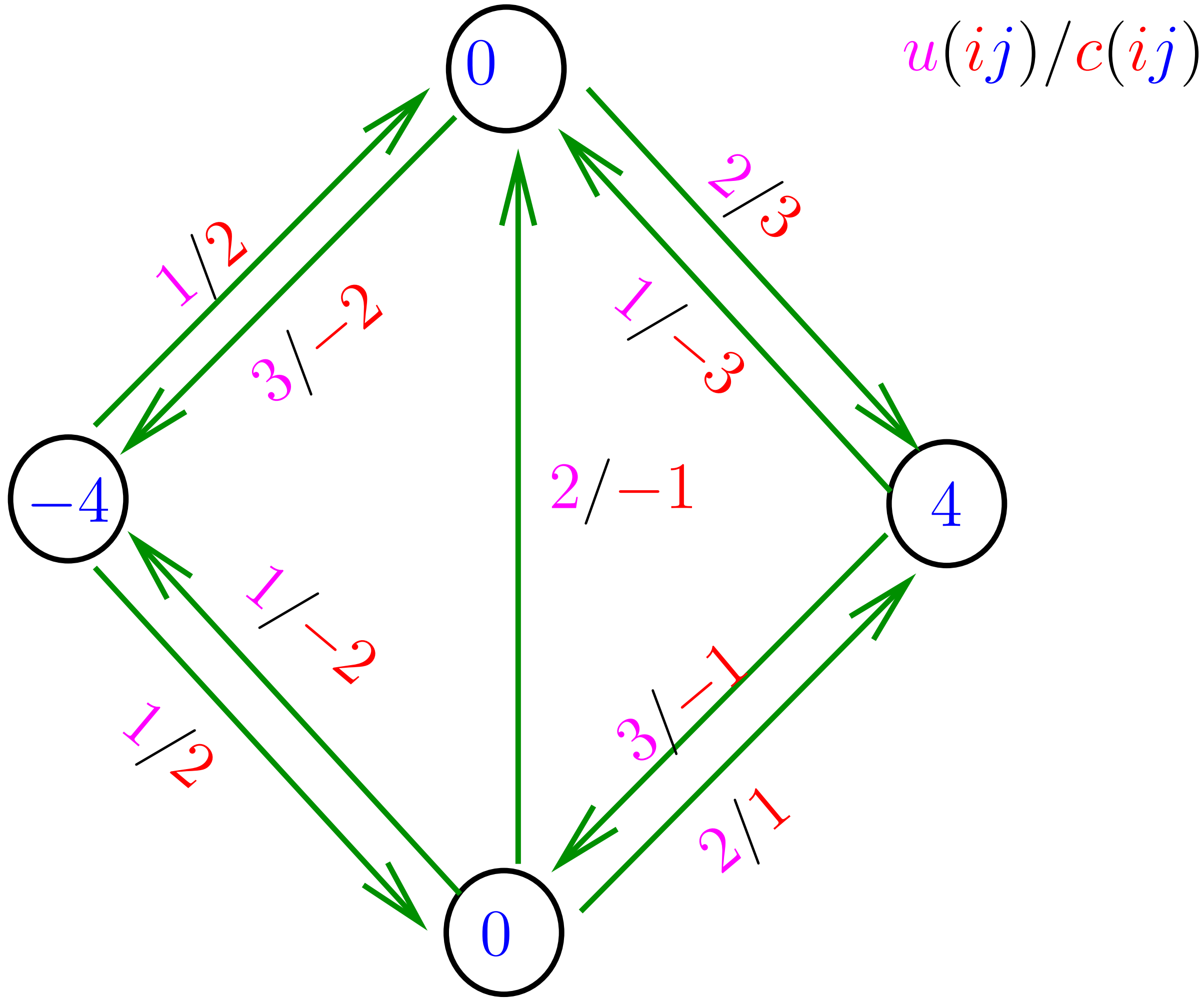


É fluxo de custo mínimo?

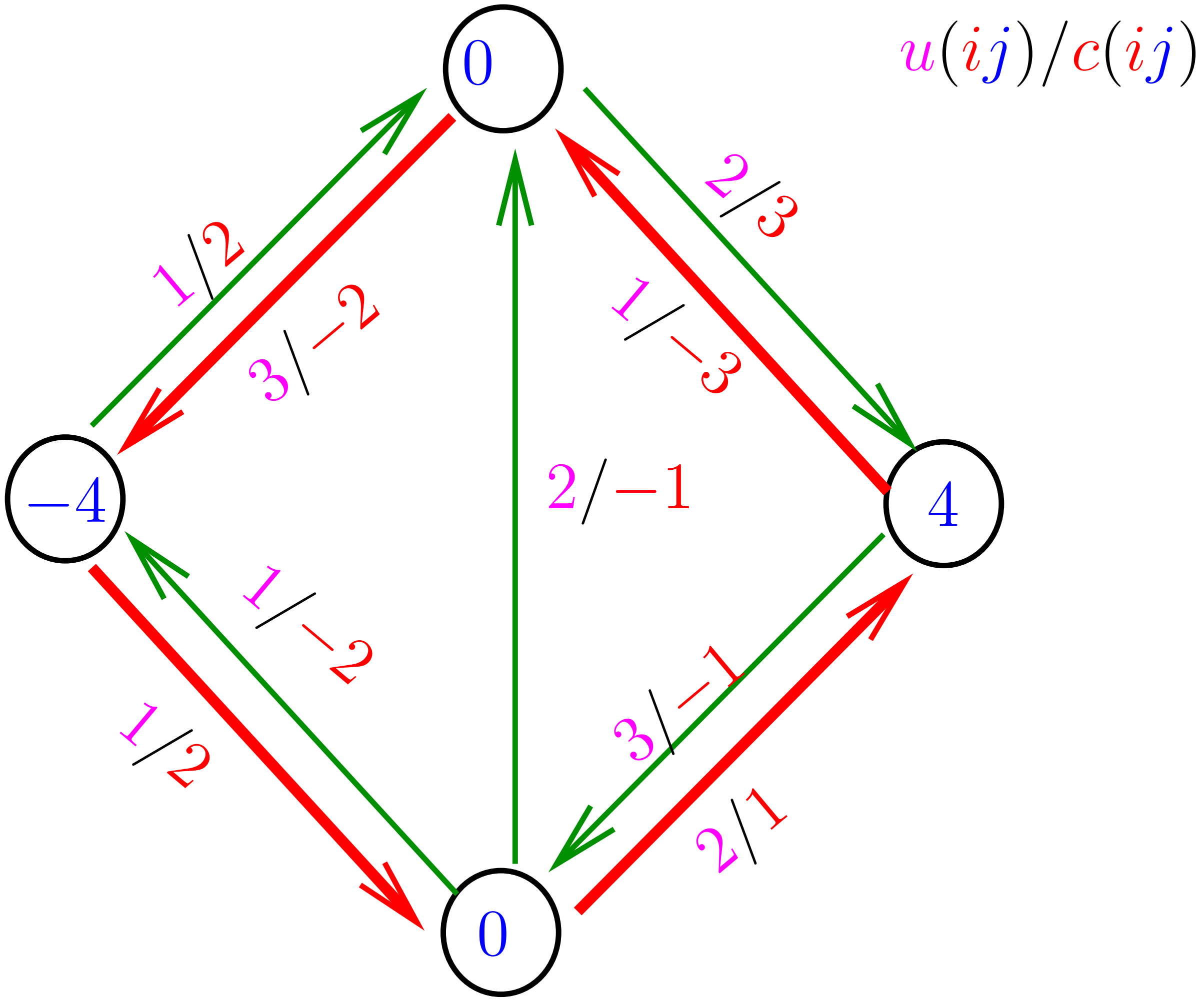


Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 16$

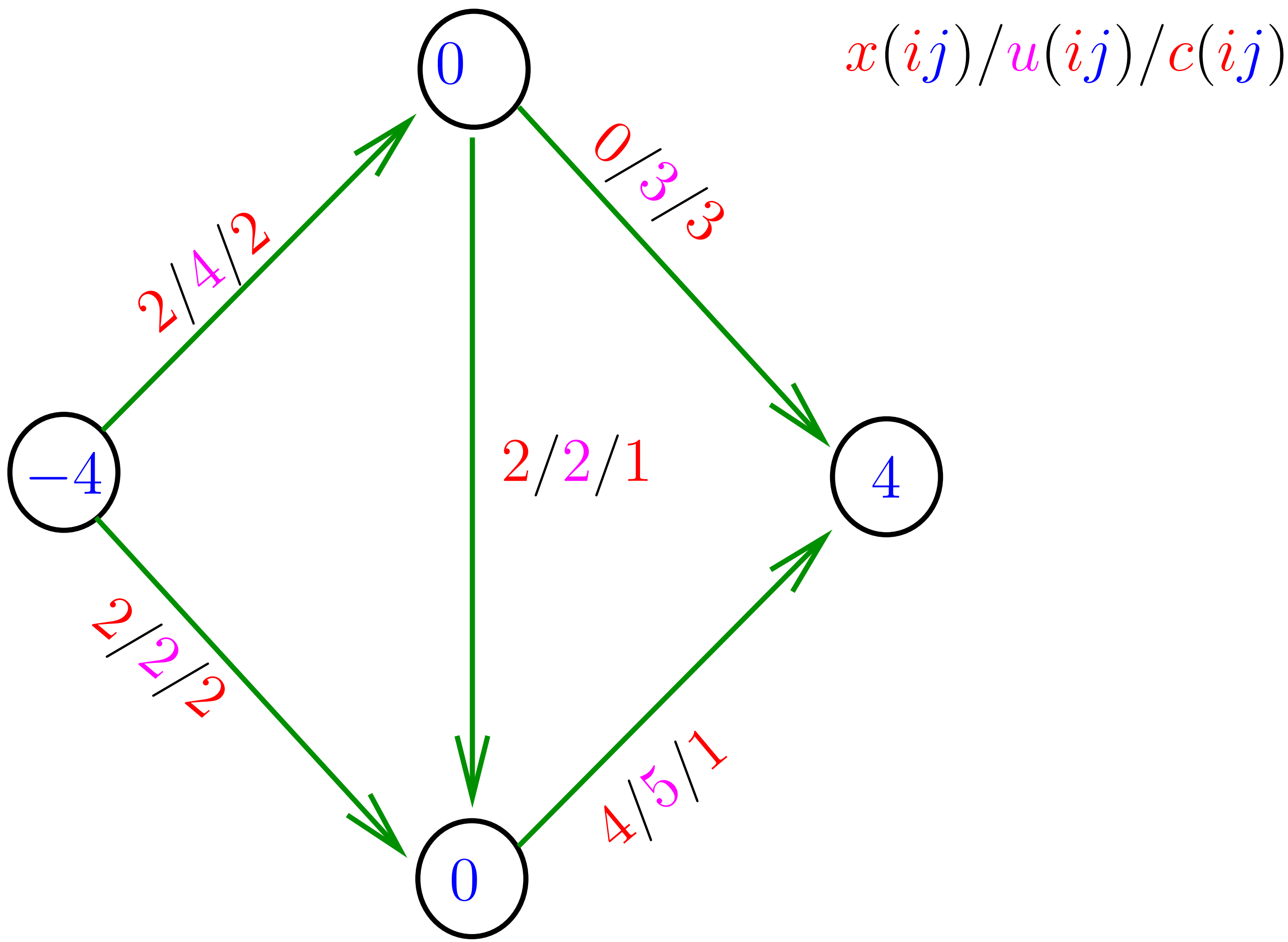
Rede residual



Rede residual

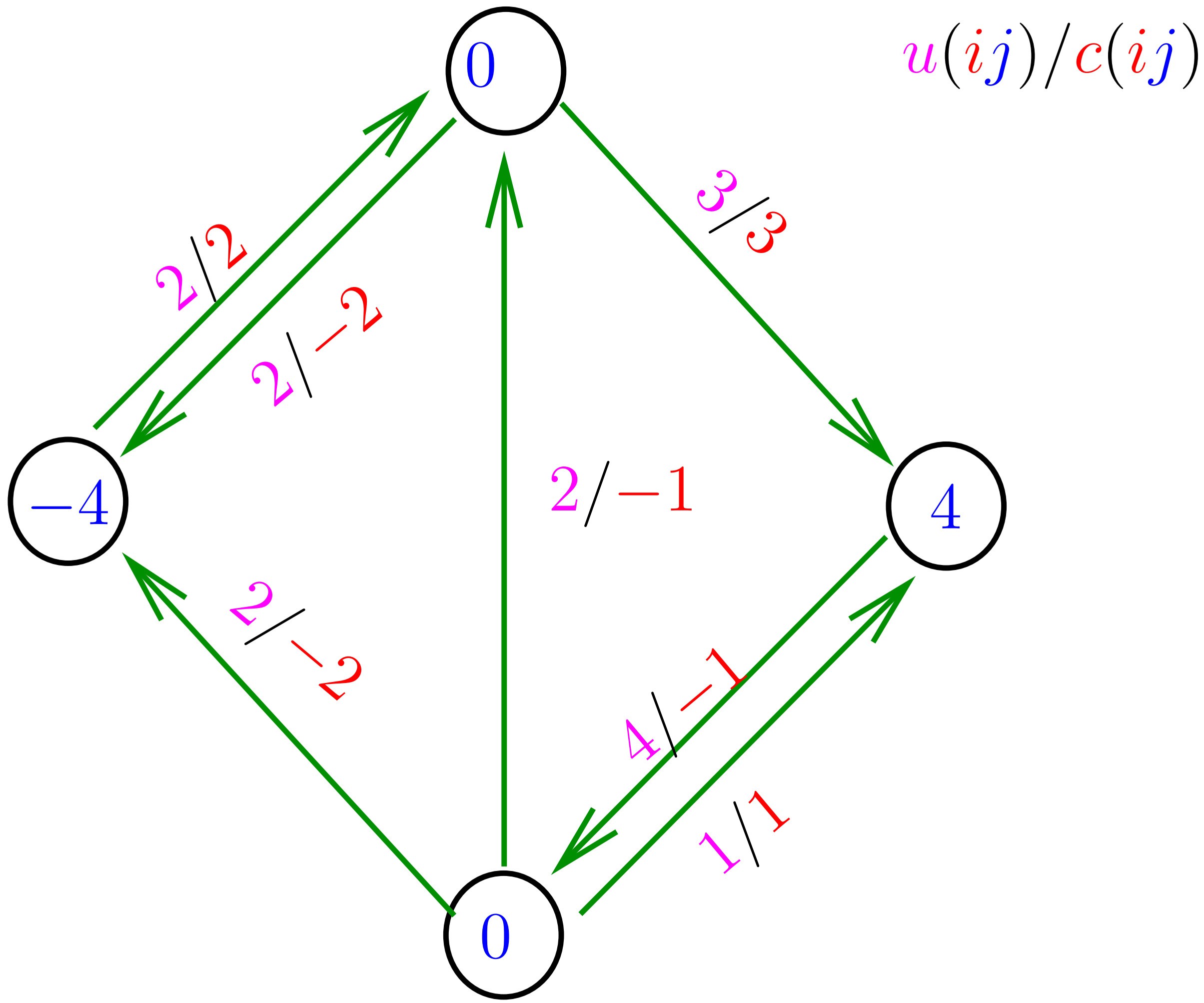


É fluxo de custo mínimo?

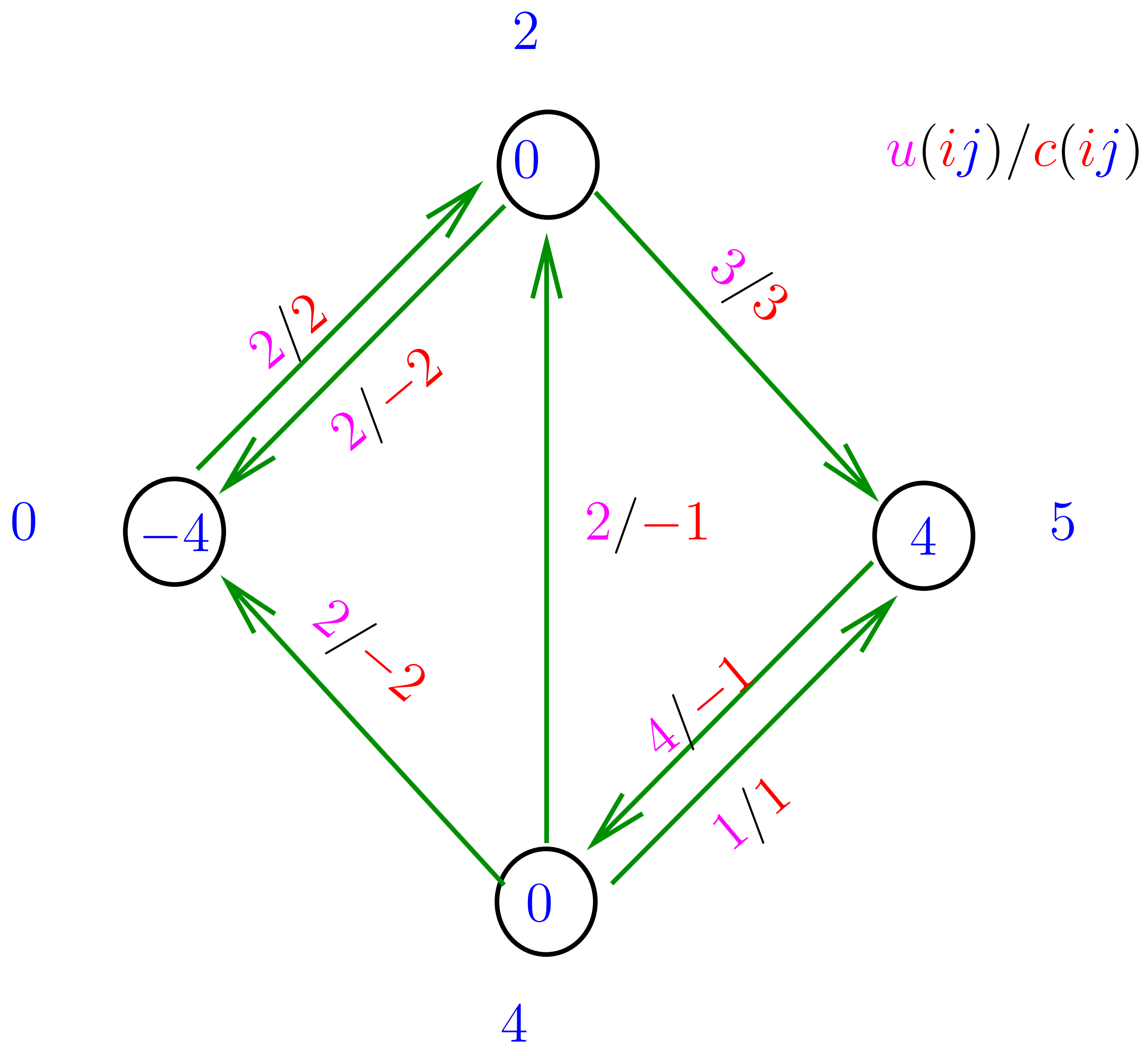


Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

Rede residual



Potencial



Folgas complementares

Seja x o fluxo encontrado.

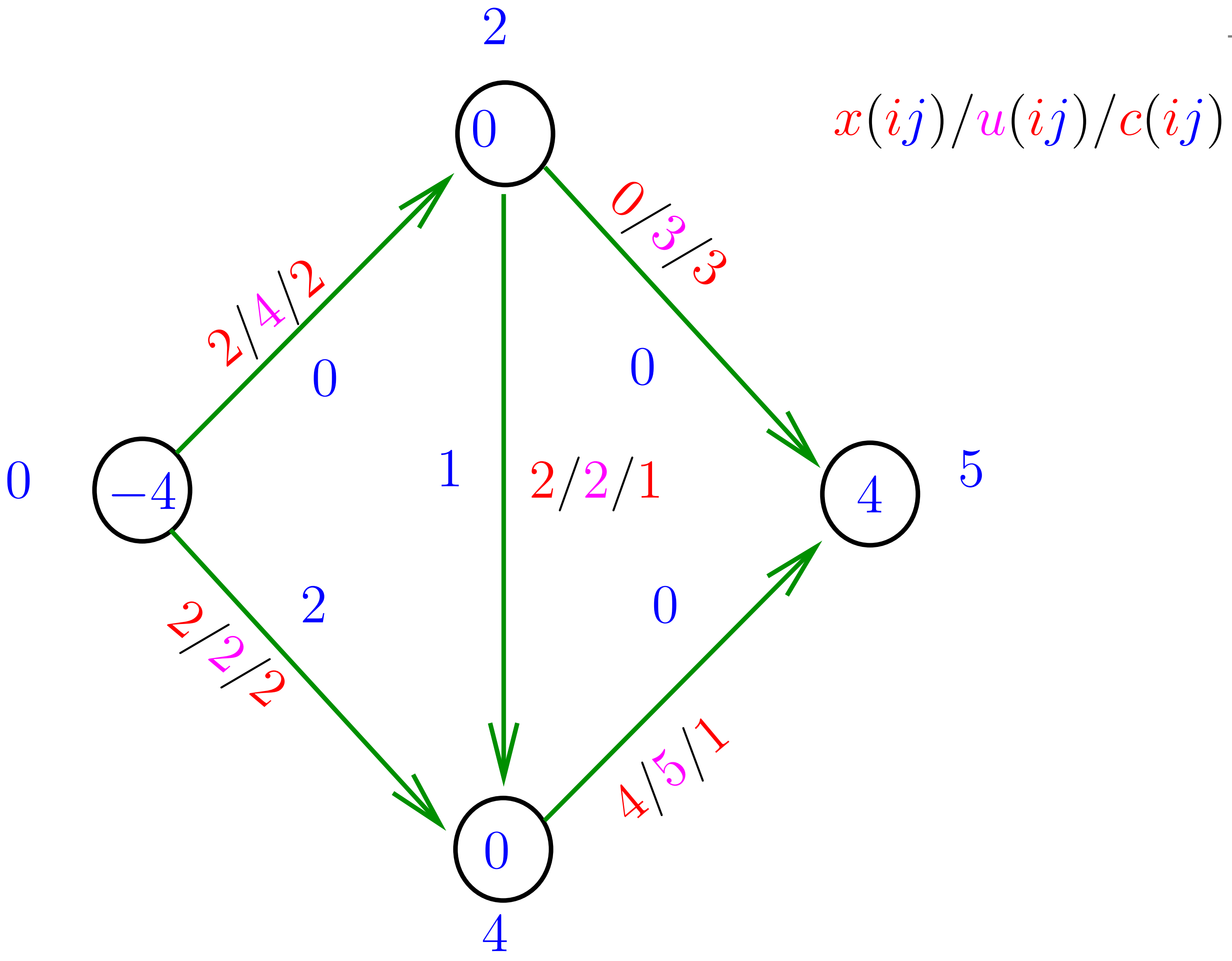
Seja y o potencial encontrado.

Temos as folgas de x e y são complementares já que,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \; .$$

Conclusão: x é um fluxo viável de custo mínimo.

Solução dual viável



$$yb - wu = 4 \times 5 - 2 \times 2 - 1 \times 2 = 14$$