AULA 17

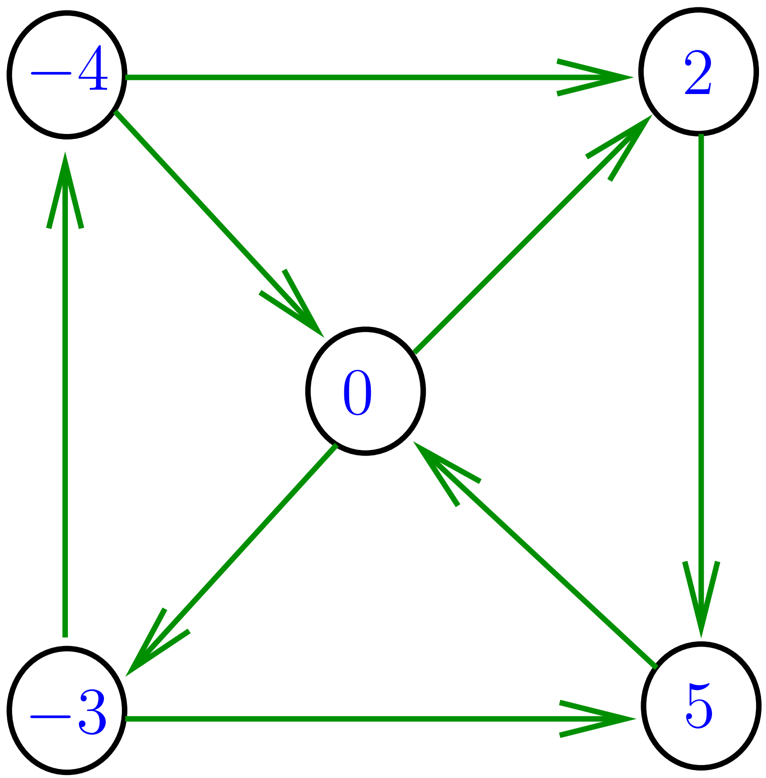
Fluxo viável

PF 19.1, 19.2, 19.3, 19.4

Função-demanda

Uma função-demanda em um grafo (N, A) é qualquer função que associa um número inteiro $b(i)$ a cada nó i, ou seja, qualquer função

$$b : N \to \mathbb{Z} \,.$$

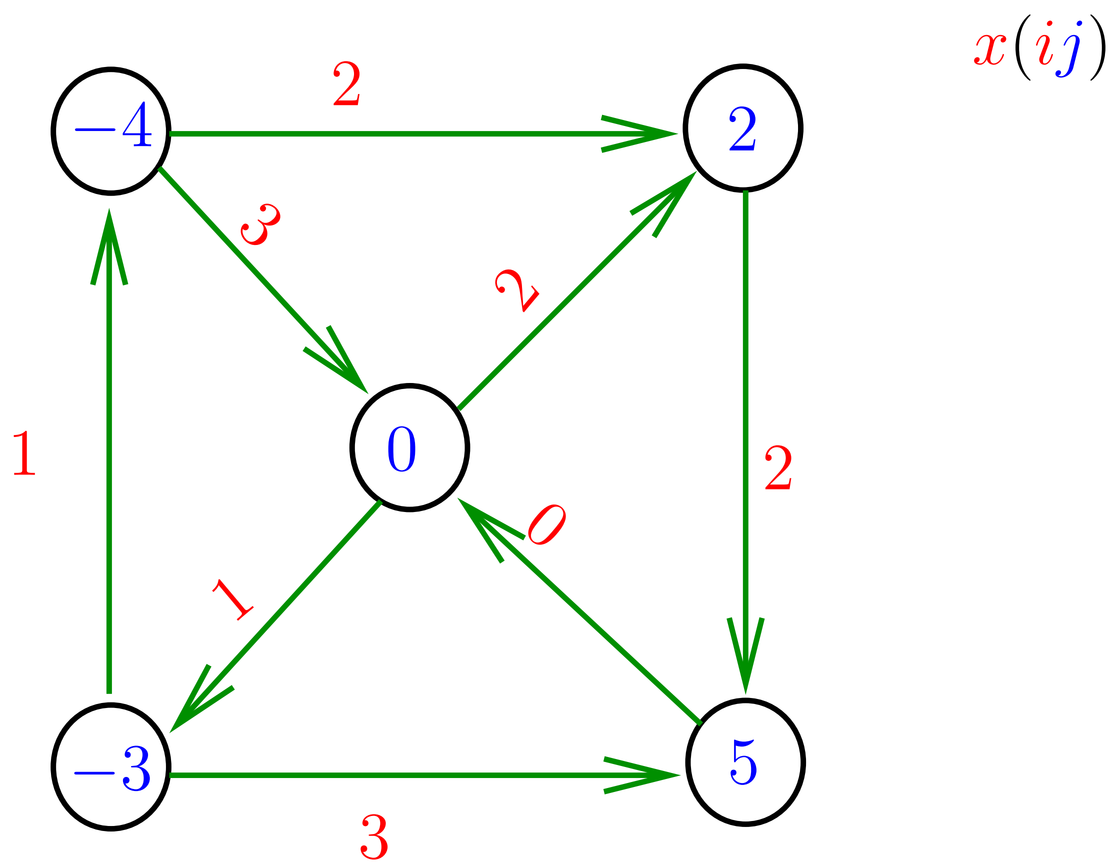


Fluxos e demandas

Um fluxo é uma função de N em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

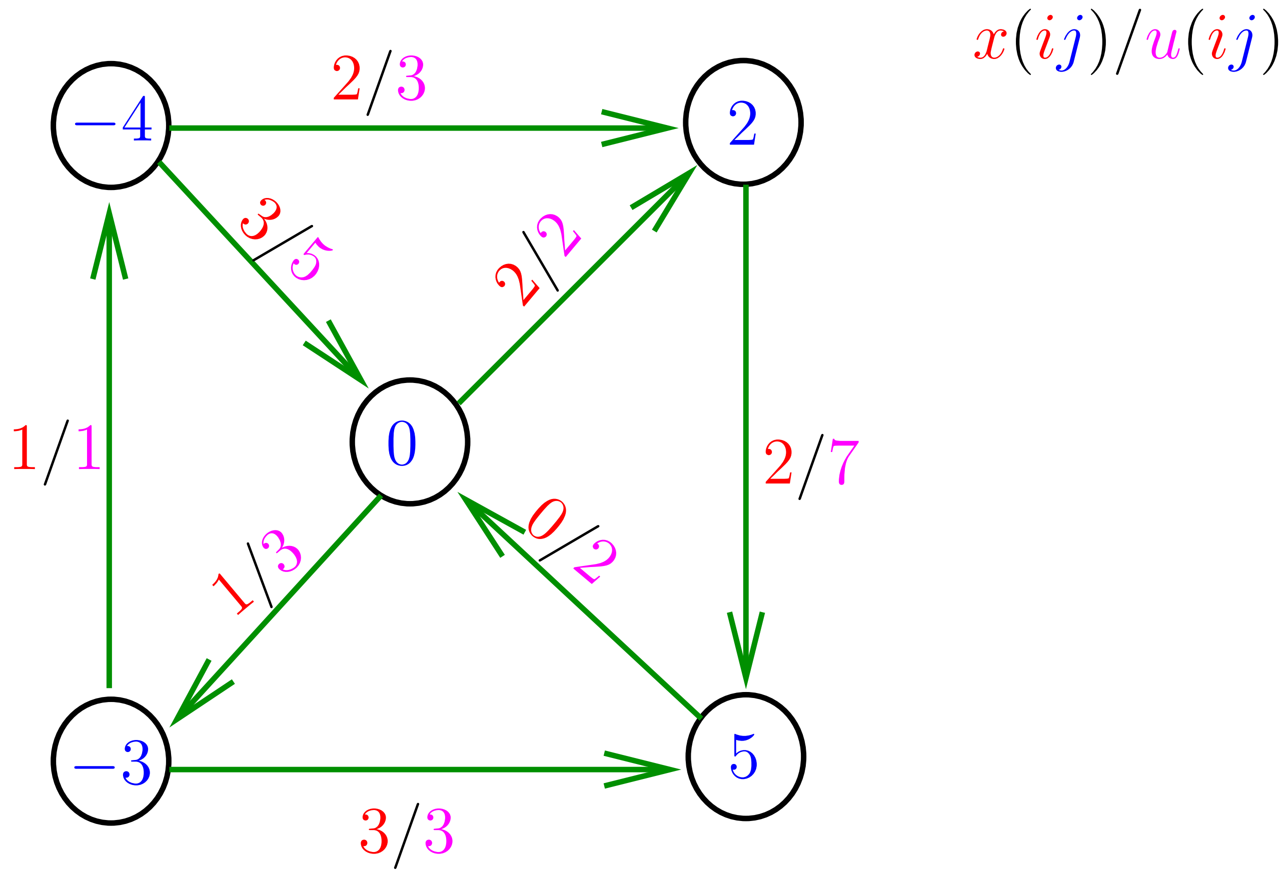
Um fluxo x **satisfaz** uma função-demanda b se, para cada no i,

$$e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i}) = b(i) \ .$$



Problema do fluxo viável

Problema: Dada uma rede (N, A, u, b) com função-capacidade u e função-demanda b, encontrar um fluxo que satisfaça b e respeite u.

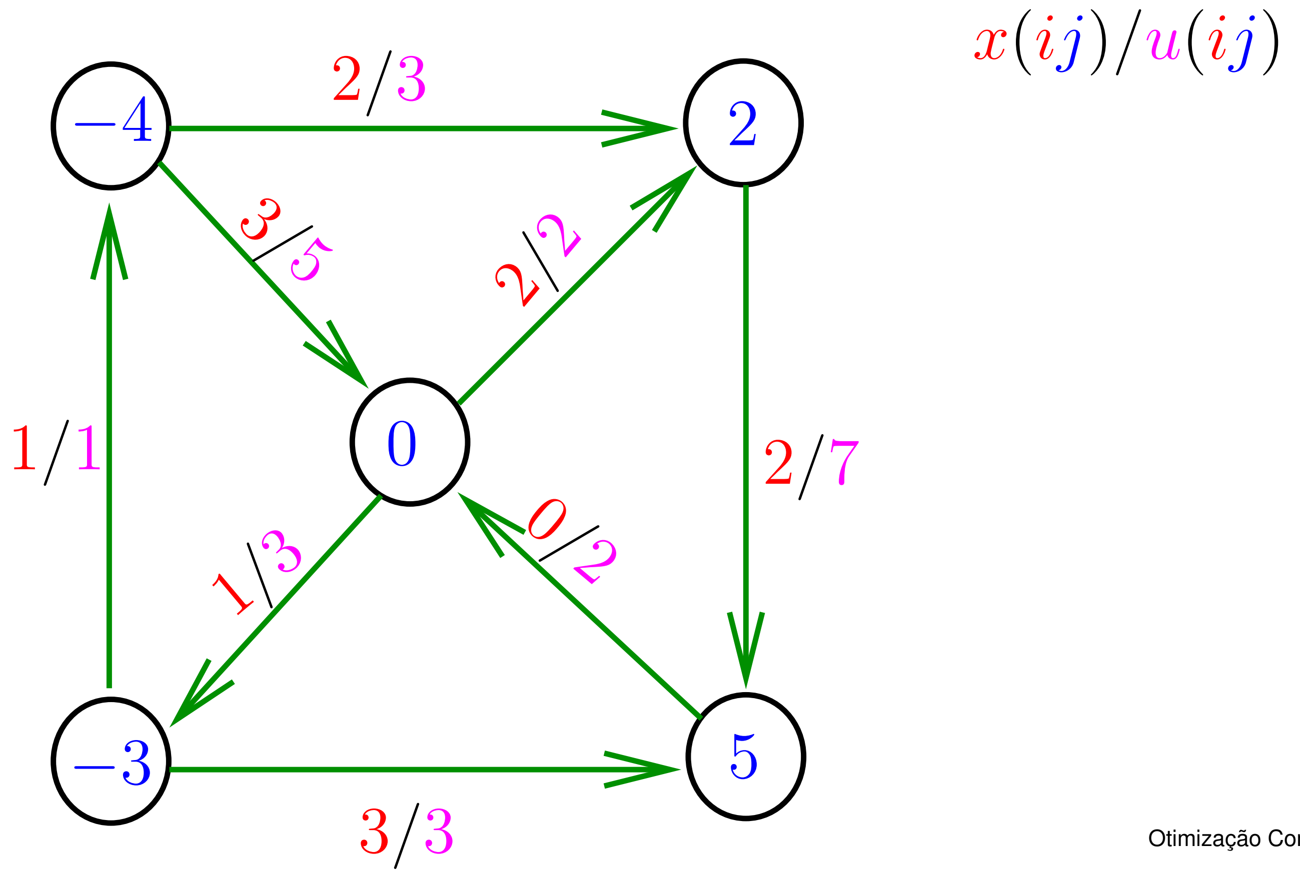


Condição de viabilidade

Dada uma rede (N, A, u, b) com função-capacidade u e função-demanda b, se existe fluxo que satifaz b e respeita u, então

$$-u(T, \overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

para todo subconjunto T de N.



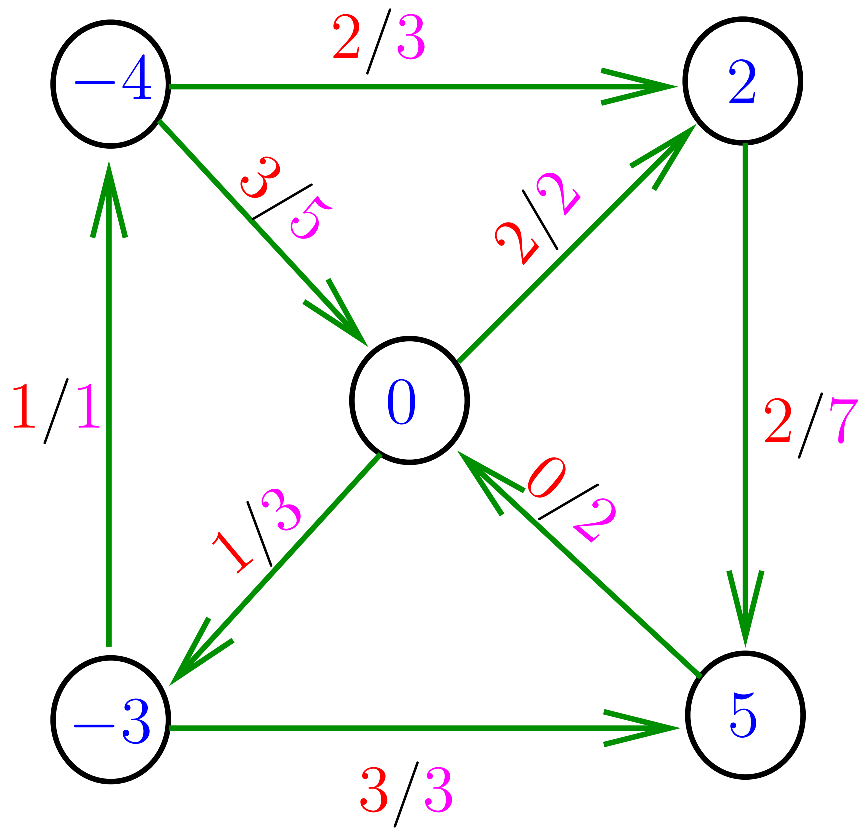
Condição de viabilidade (equivalente)

Se existe fluxo que satifaz b e respeita u, então

$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

para todo subconjunto T de N.

$x(ij)/u(ij)$



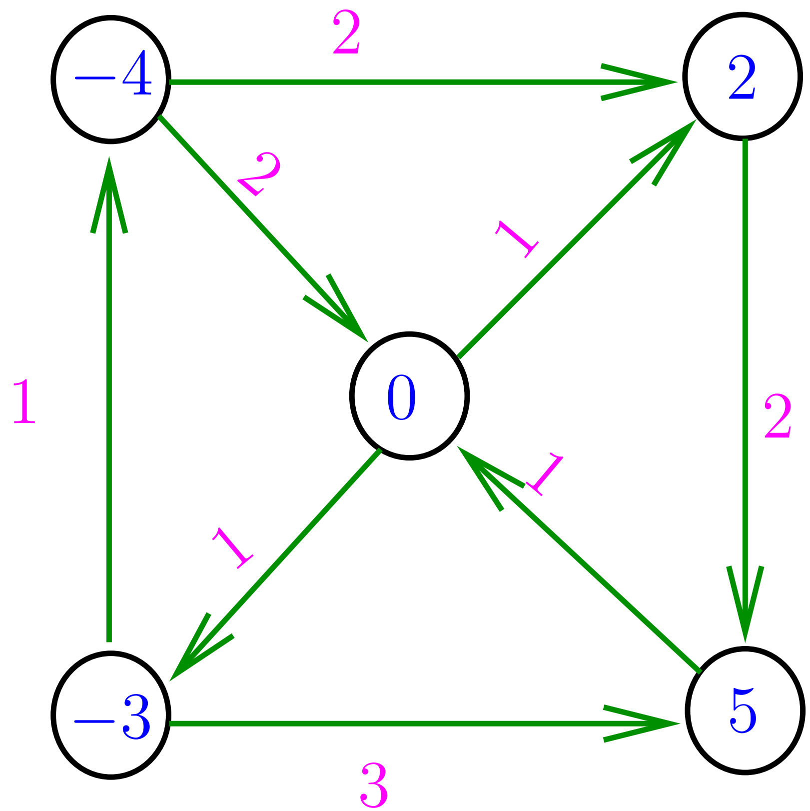
Teorema de Gale

Se para todo subconjunto $\overline{T}$ de N,

$$-u(T,\overline{T}) \le b(T) \le u(\overline{T},T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.

$u(ij)$

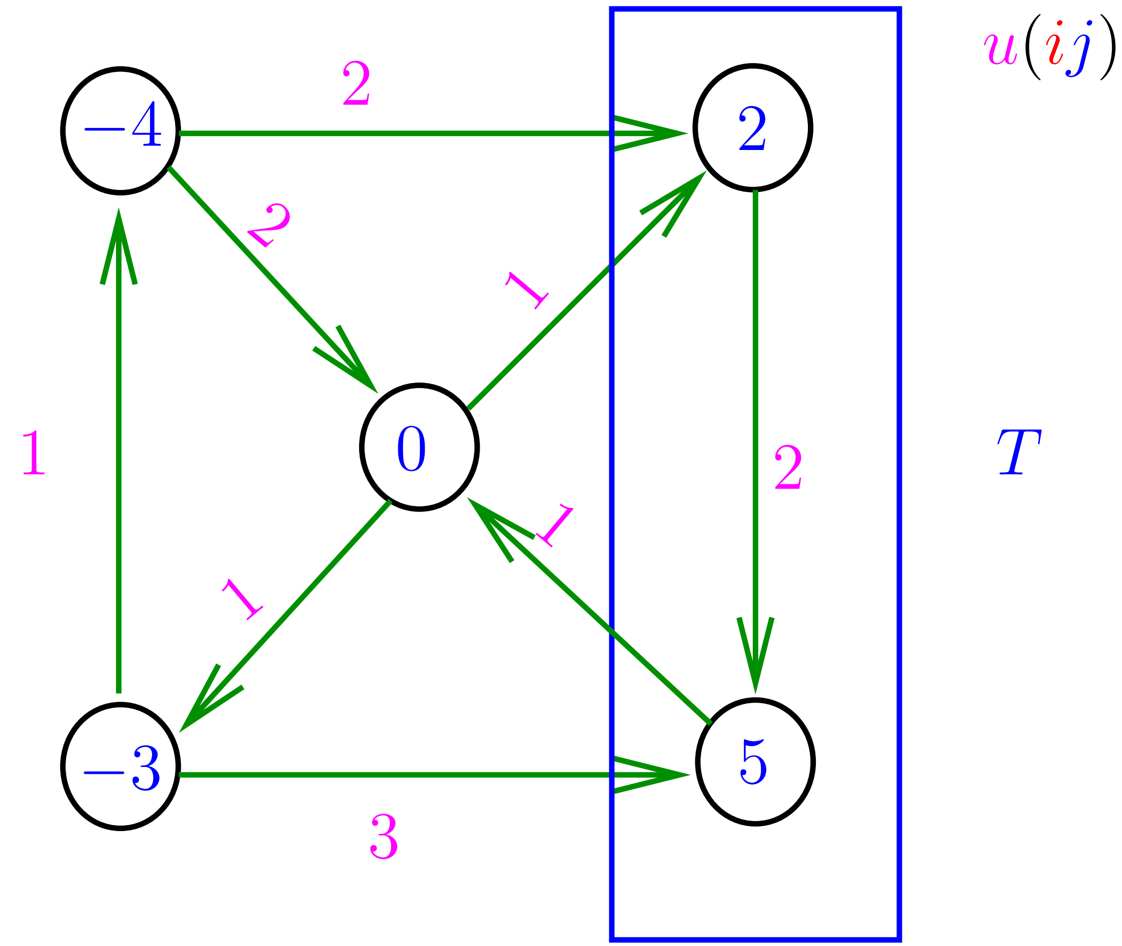


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto $\overline{T}$ de N,

$$-u(T,\overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T},T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.



Algoritmo de fluxo viável

Recebe uma rede simétrica (N, A, u, b) e devolve um fluxo viável x ou um subconjunto S de N que viola a condição de Gale.

FLUXO-VIÁVEL (N, A, u, b)

se $b(N) \neq 0$ **então devolva** N
$\check{x} \leftarrow 0 \quad e \leftarrow 0$
enquanto existe s em N tal que $e(s) > b(s)$ **faça**
    $A_{\check{x}} \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$
    $\langle y, P\rangle \leftarrow$ CAMINHO$(N, A_{\check{x}}, s)$
    se existe t tal que $y(t) = 0$ e $e(t) < b(t)$ **então**
        INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL$(u, \check{x}, A_\pi, s, t)$
    senão $S \leftarrow \{i : y(i) = 0\}$
        devolva S
$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$
devolva x

Incremente fluxo viável

INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL $(u, \check{x}, A_\pi, s, t)$

Seja P um caminho de s a t em (N, A_π)

$\delta_1 \leftarrow \min\{u(ij) - \check{x}(ij) : ij$ é arco de $P\}$

$\delta_2 \leftarrow \min\{e(s) - b(s), b(t) - e(t)\}$

$\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$

para cada arco ij em P **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

$e(s) \leftarrow e(s) - \delta$

$e(t) \leftarrow e(t) + \delta$

Invariantes

Na linha 3 valem as seguintes invariantes:

(i1) $e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})$, para cada nó i;

(i2) $\sum_{i \in N} (b(i) - e(i)) = 0$;

(i3) x respeita u.

Consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo é
FLUXO-VIÁVEL $O((n+m)nB)$.

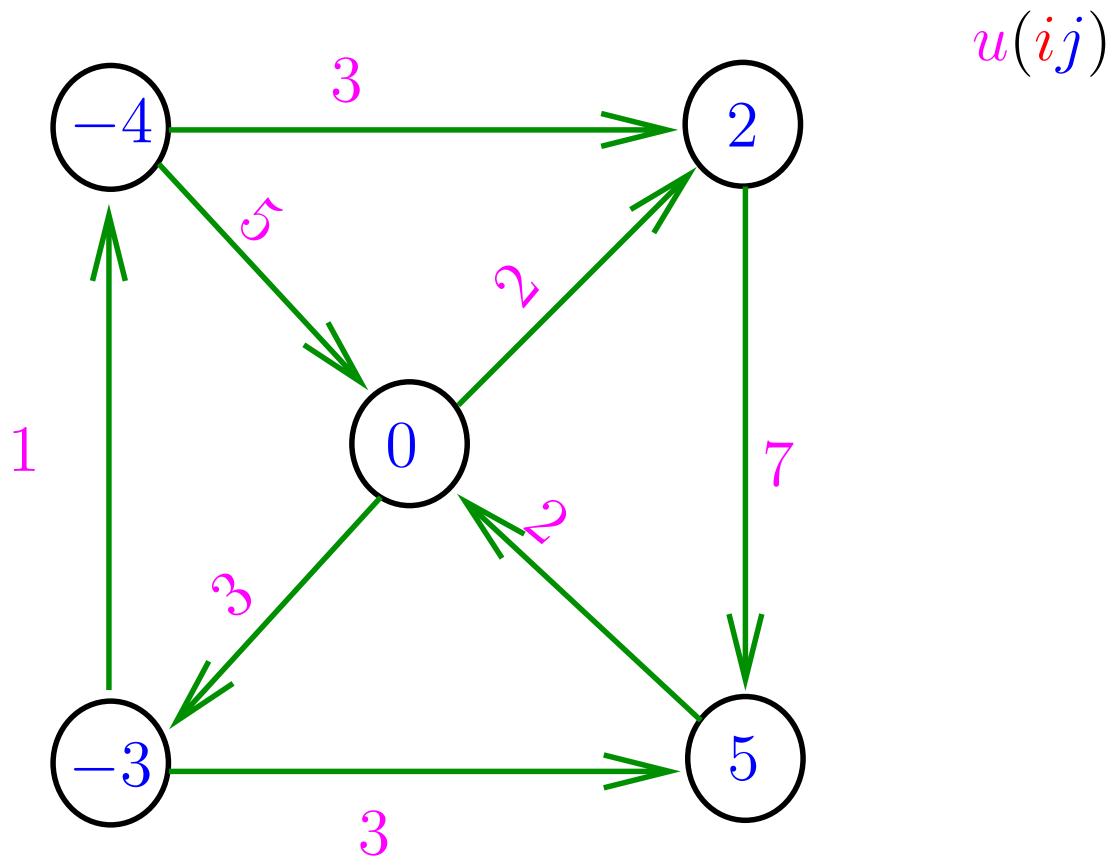
$B := \max\{|b(i)| : i \in N\}$

Este consumo de tempo não é polinomial.

Ele é pseudo-polinomial.

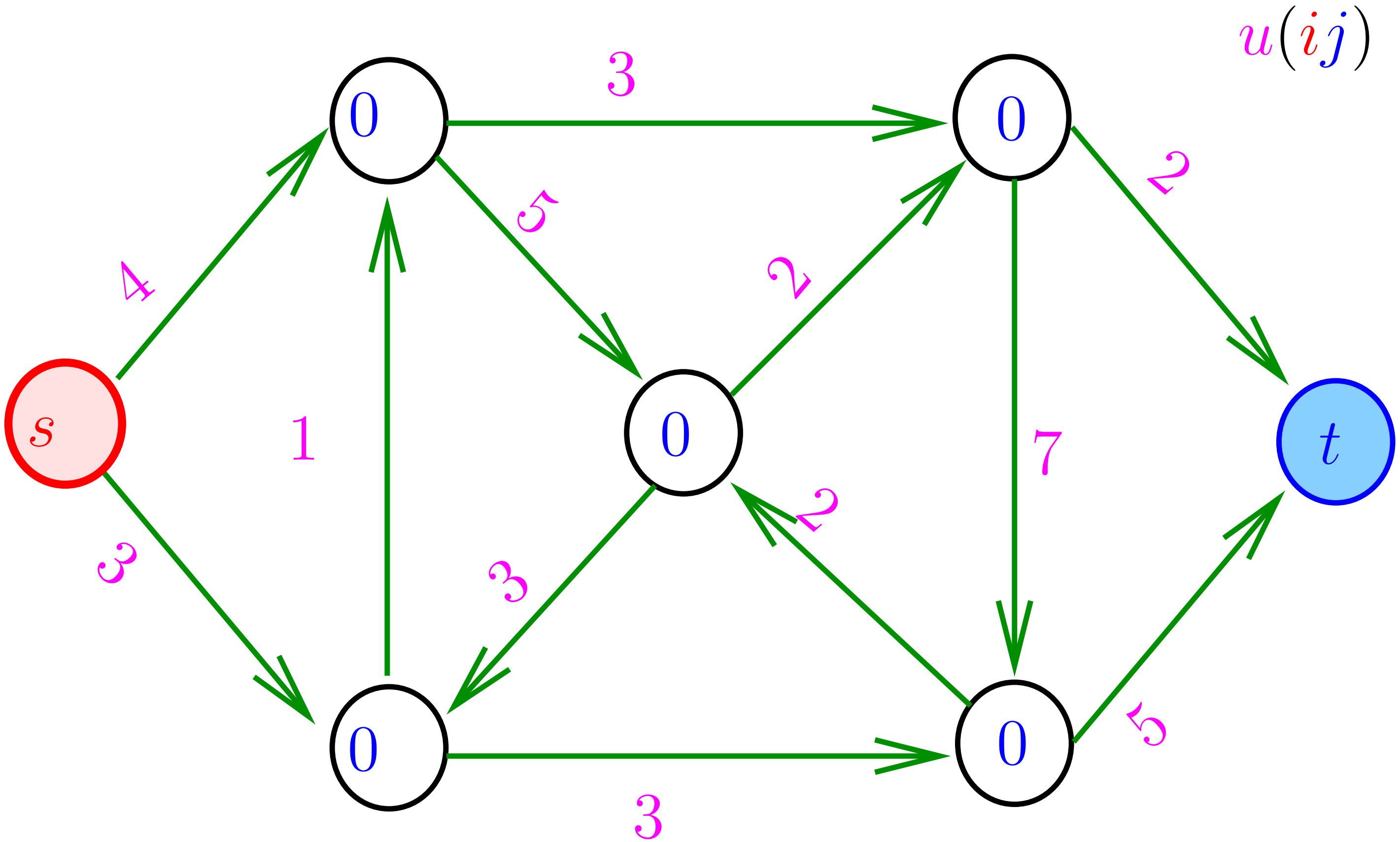
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



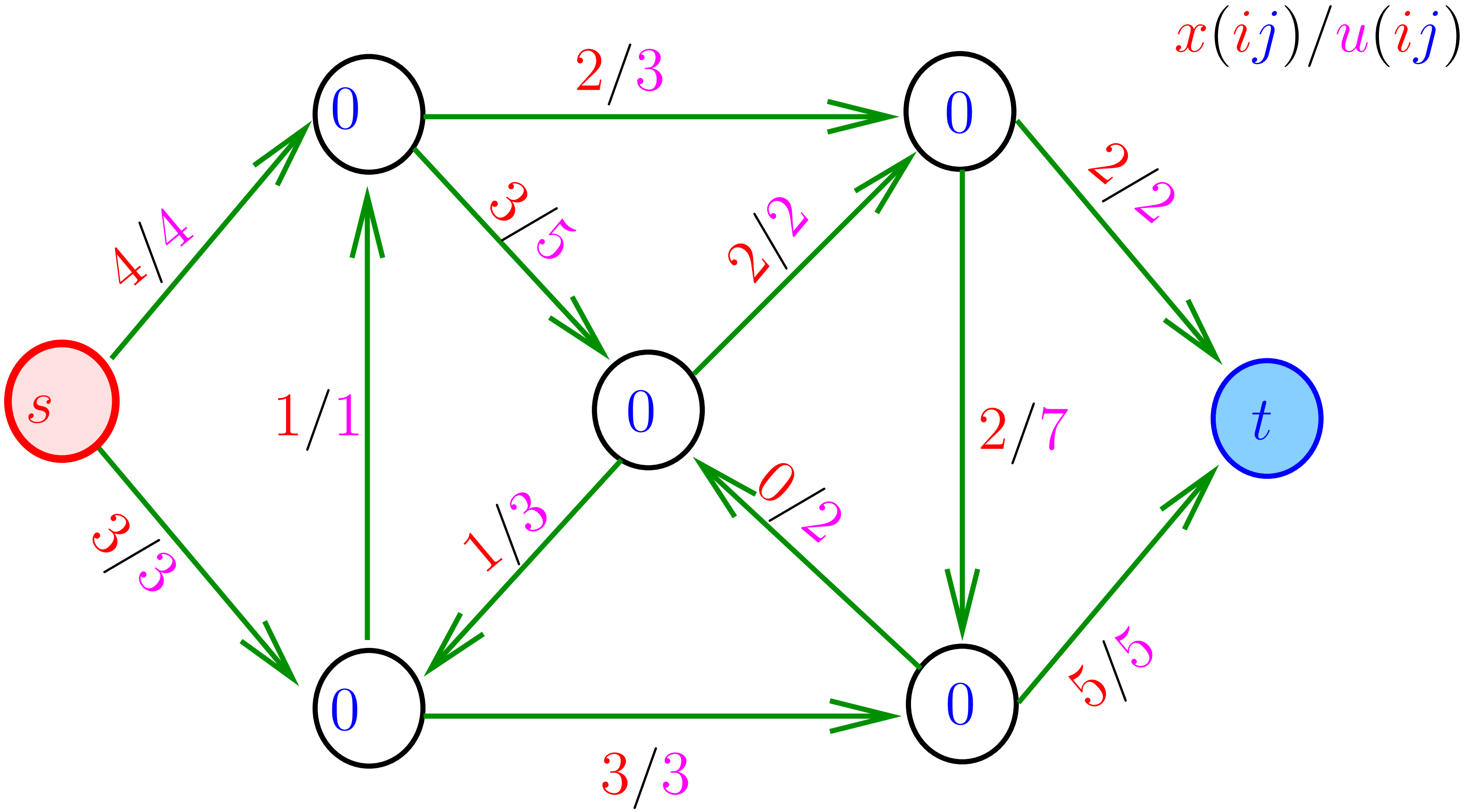
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



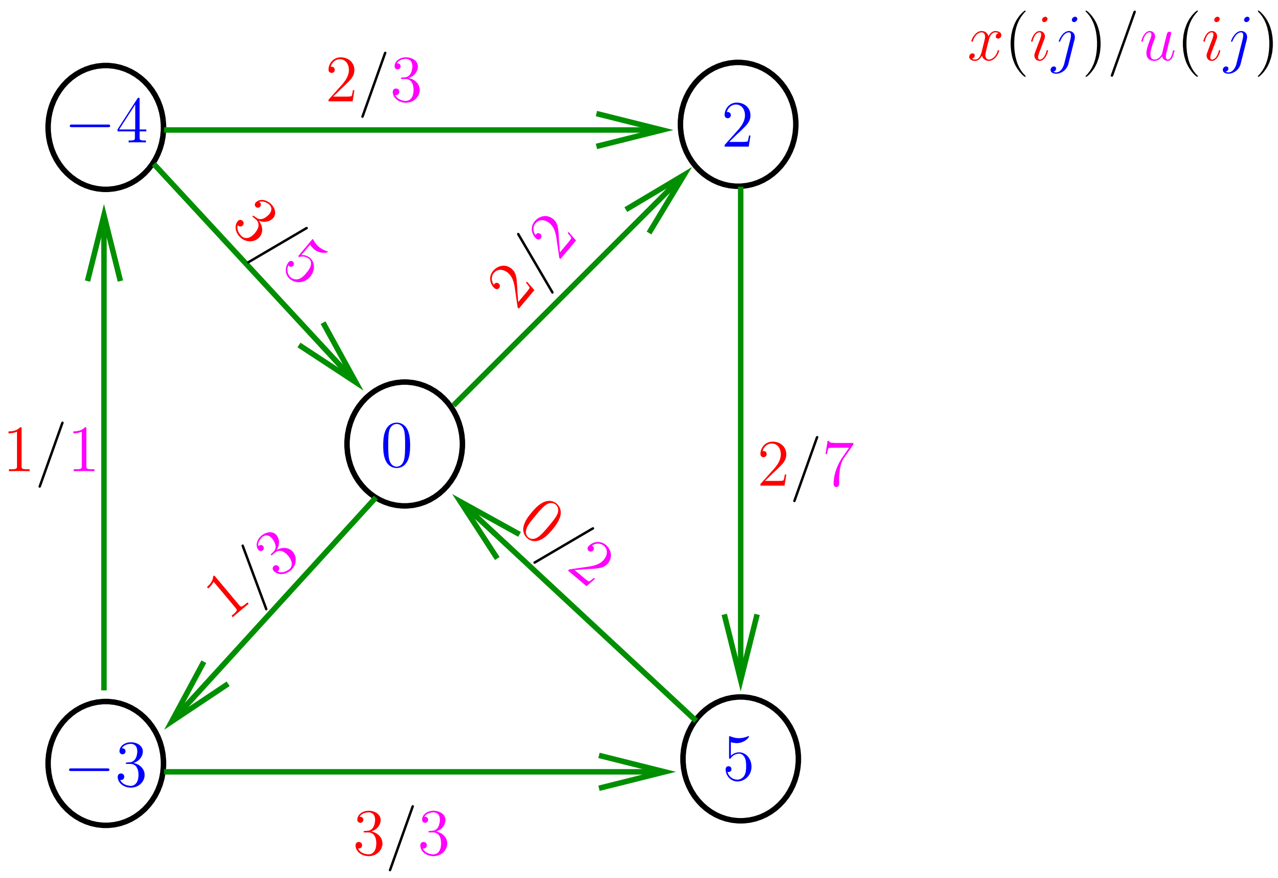
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



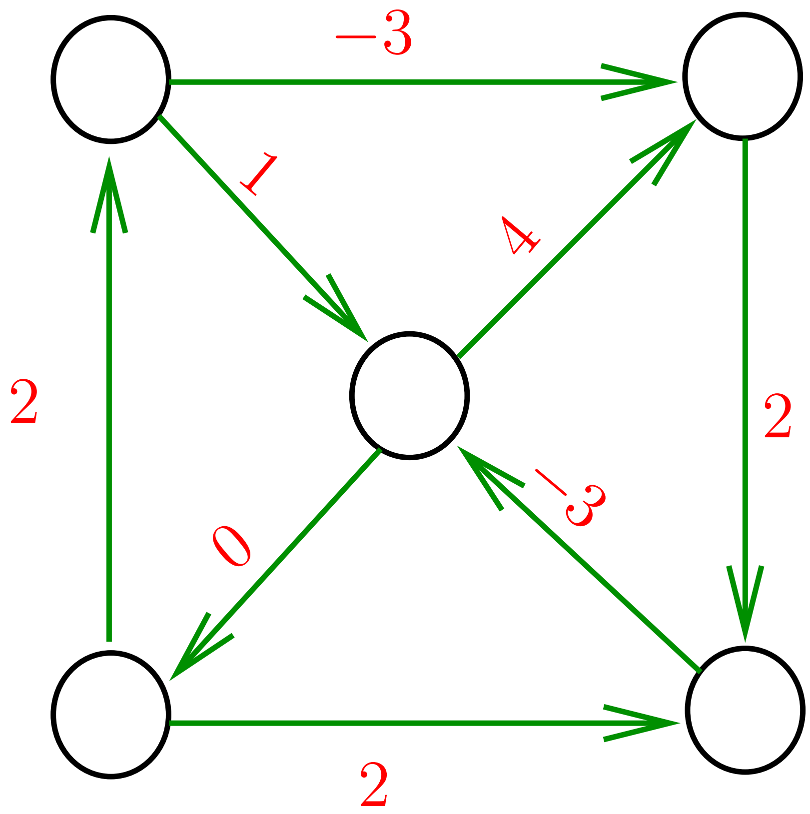
Fluxo viável de custo mínimo

PF 20.1, 20.2, 20.3

Função-custo

Uma função-custo em um grafo (N, A) é qualquer função que associa um número inteiro $c(ij)$ a cada arco ij, ou seja, qualquer função

$$c : A \to \mathbb{Z}\ .$$



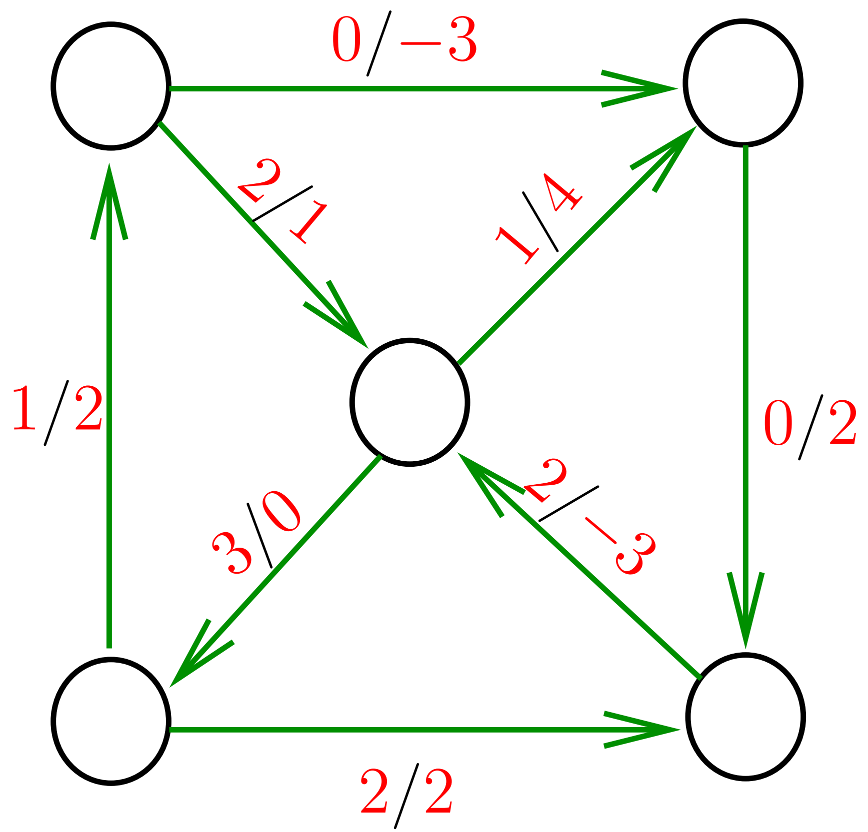
Fluxos e custos

O custo de um fluxo x é o número i,

$$cx := \sum(c(ij)x(ij) : ij \in A) \ .$$

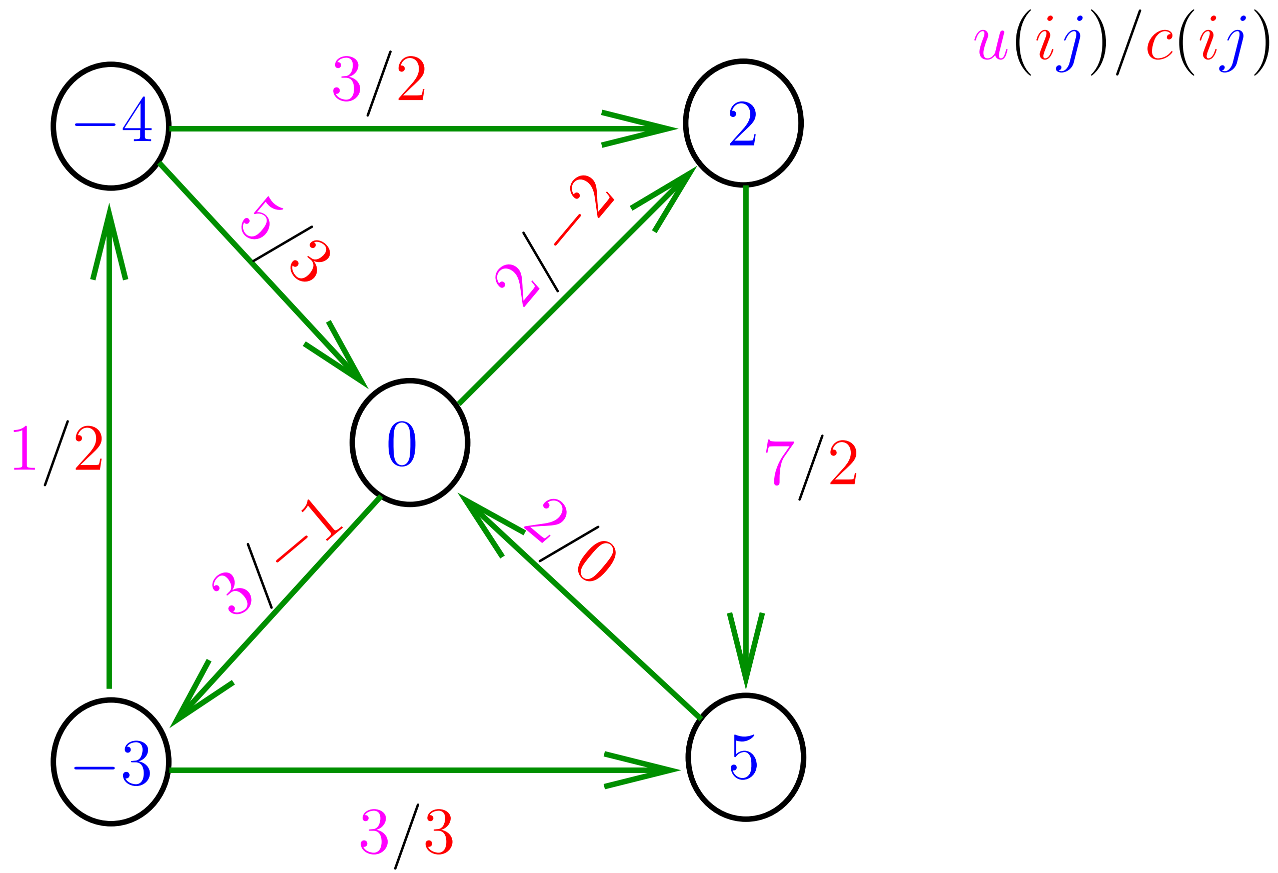
Exemplo: um fluxo de custo 2

$x(ij)/c(ij)$

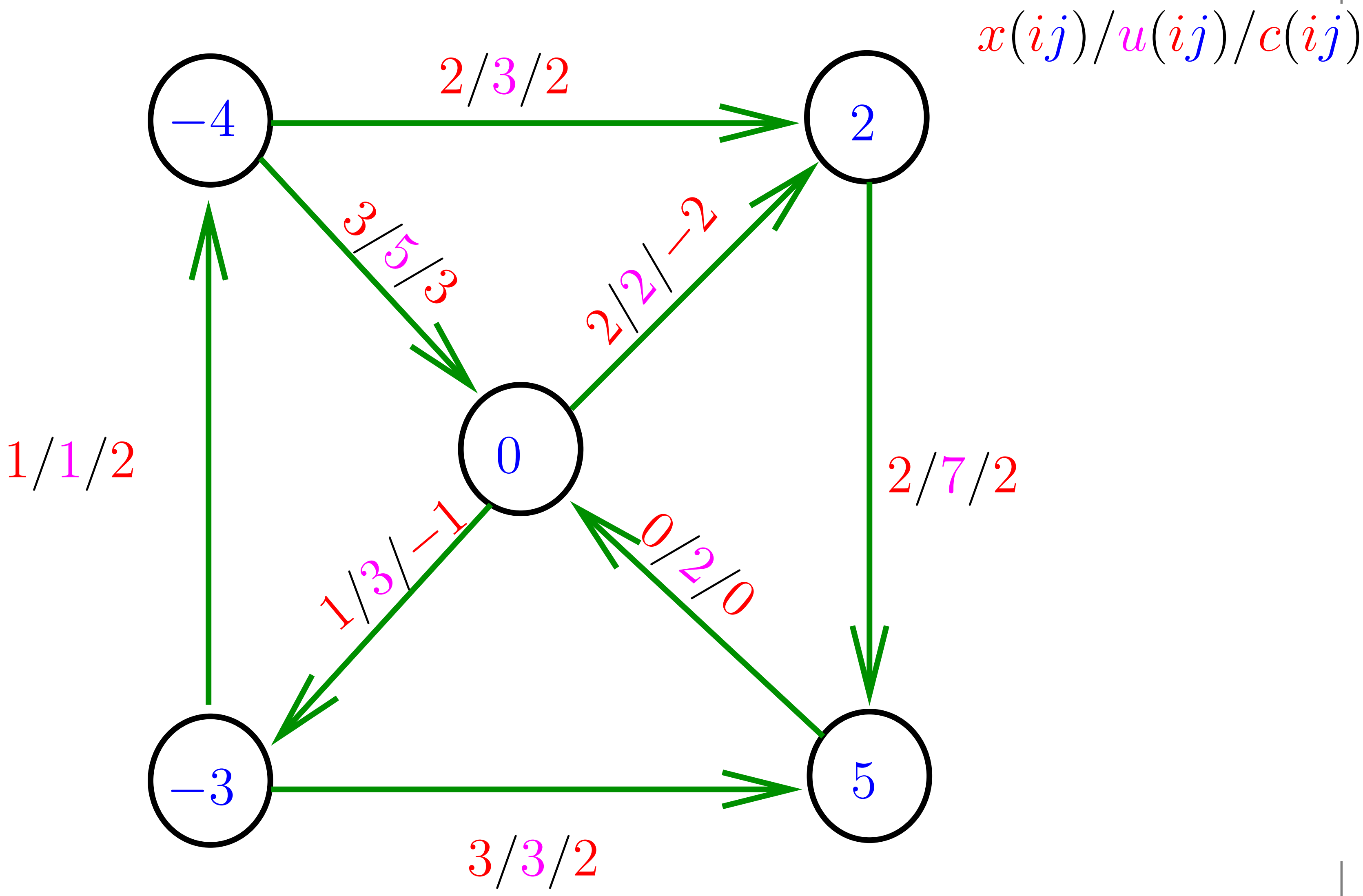


Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede (N, A, u, b, c) com função-capacidade u, função-demanda b e função-custo c, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça b e respeite u.



É fluxo de custo mínimo?



Lema da dualidade

Se x é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c + w)$-potencial y.

Chamaremos tal par (y, w) de solução dual-viável.

Conseqüência. Se x é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c + w)$-potencial y então x é um fluxo ótimo.

Demonstração

$$
\begin{aligned}
yb &= \sum_i y(i)b(i) \\
&= \sum_i y(i)(x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})) \\
&= \sum_j y(j)x(\bar{i}, i) - \sum_i y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} y(j)x(ij) - \sum_{ij} y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\
&\leq \sum_{ij} (c(ij) + w(ij))x(ij) \\
&= (c + w)x \quad \leq \quad cx + wu\ .
\end{aligned}
$$

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$

$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \ .$$

Folgas complementares (2)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$
$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$