Melhores momentos

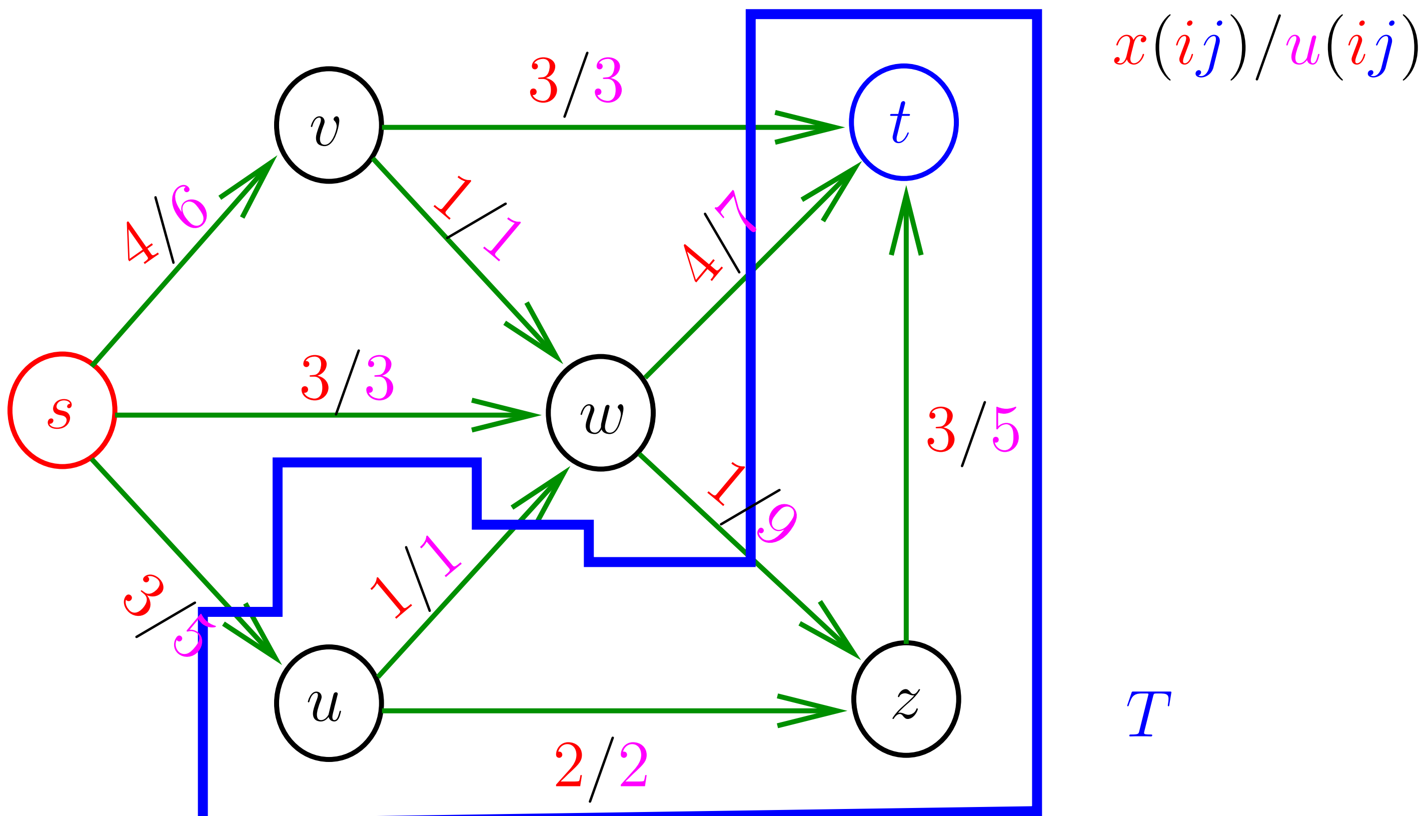
AULA PASSADA

Lema da dualidade

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte então

$$\text{val}(x) \leq u(\overline{T}, T).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 10 < 3 + 7 + 9 + 5 = 24 = u(\overline{T}, T)$.

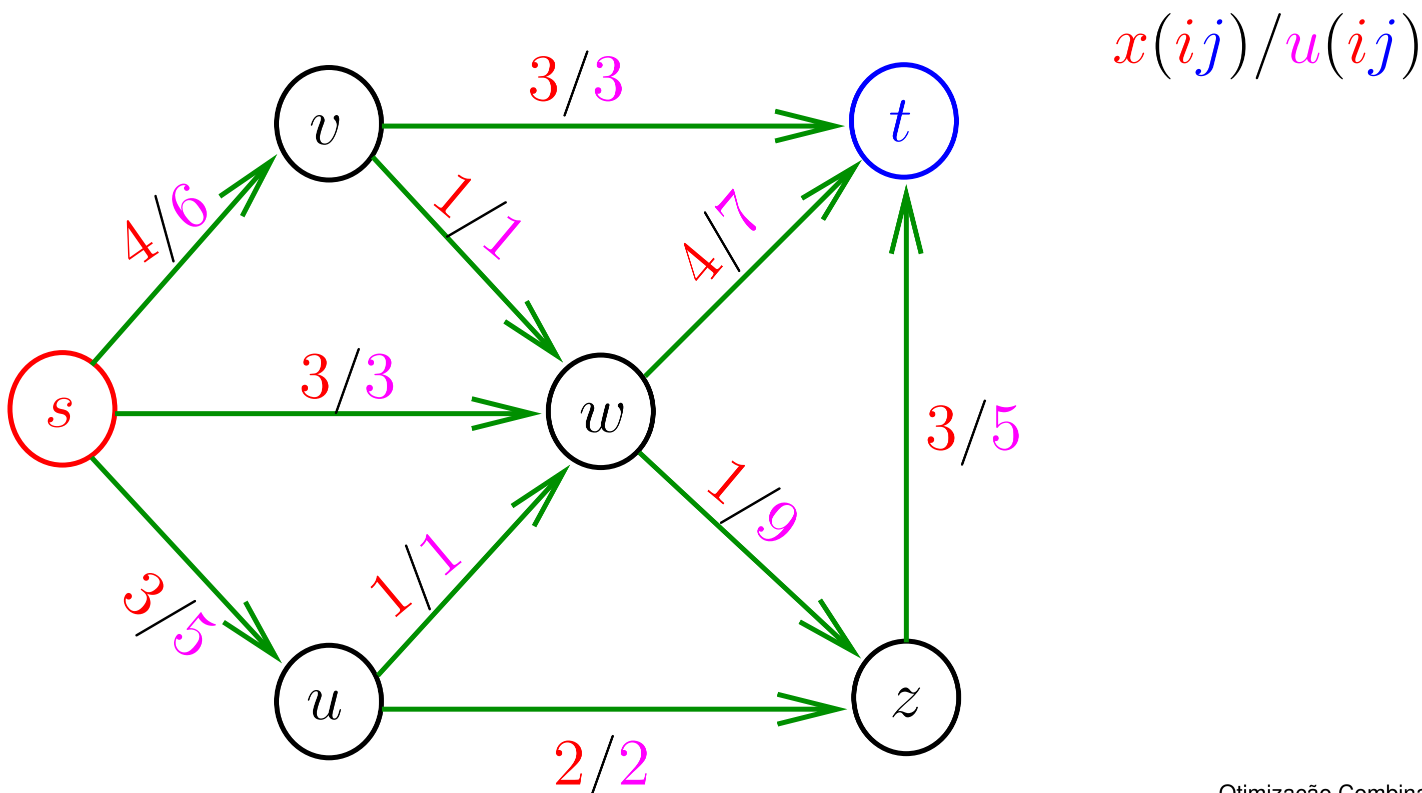


Conseqüência

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.

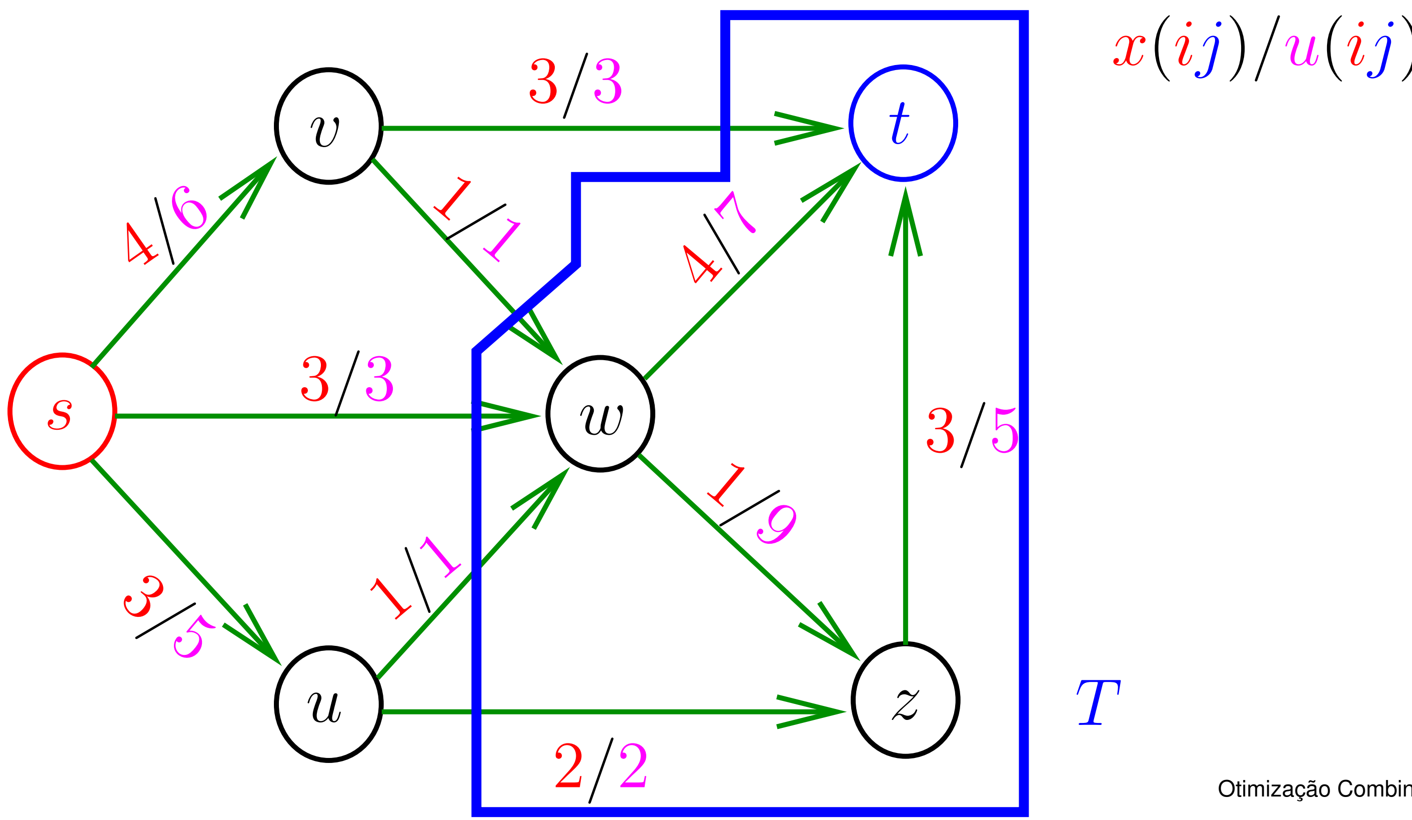


Conseqüência

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.



Pseudo-caminho

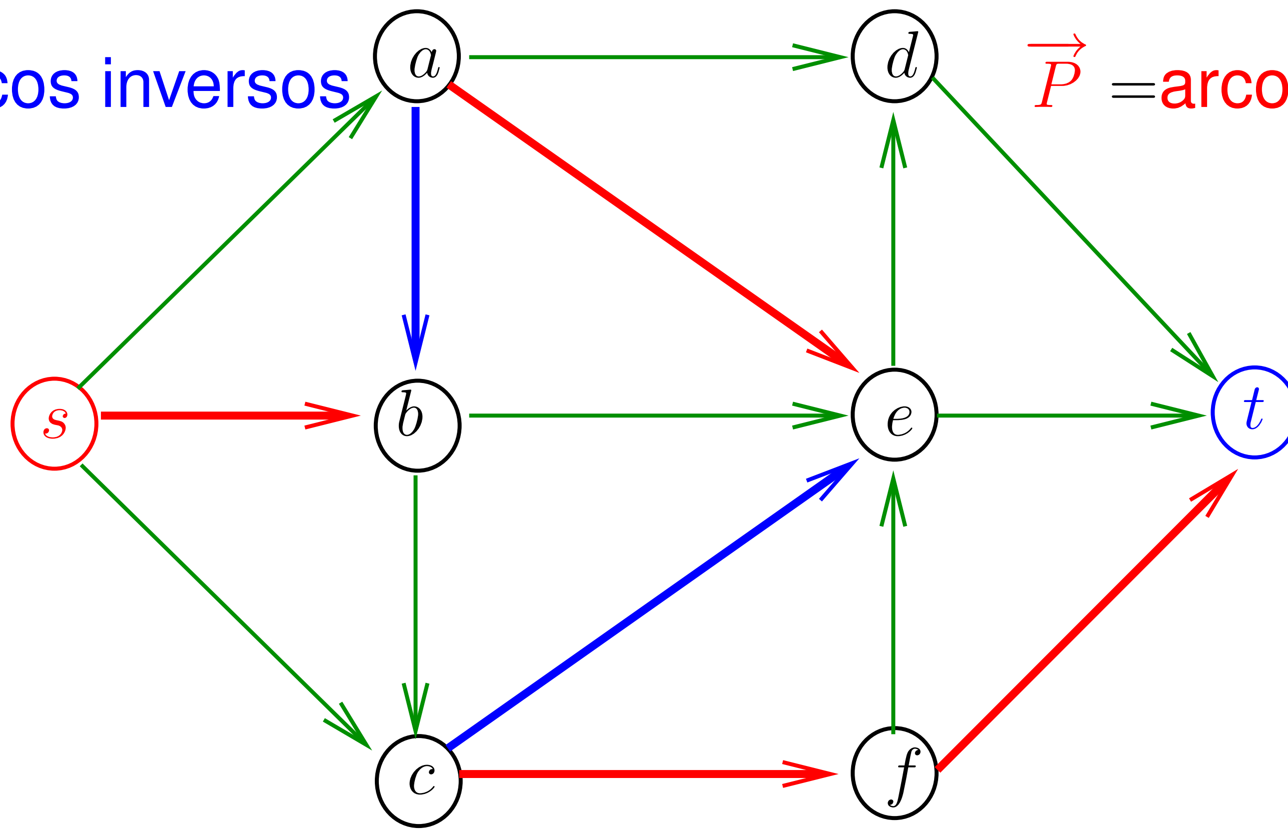
Um pseudo-caminho é uma seqüência

$$\langle i_0, a_1, i_1, \ldots, a_q, i_q \rangle$$

em que $i_0, \ldots, i_q$ são nós distintos e $a_k = i_{k-1} i_k$ ou $a_k = i_k i_{k-1}$.

$\overleftarrow{P}$ =arcos inversos

$\overrightarrow{P}$ =arcos diretos



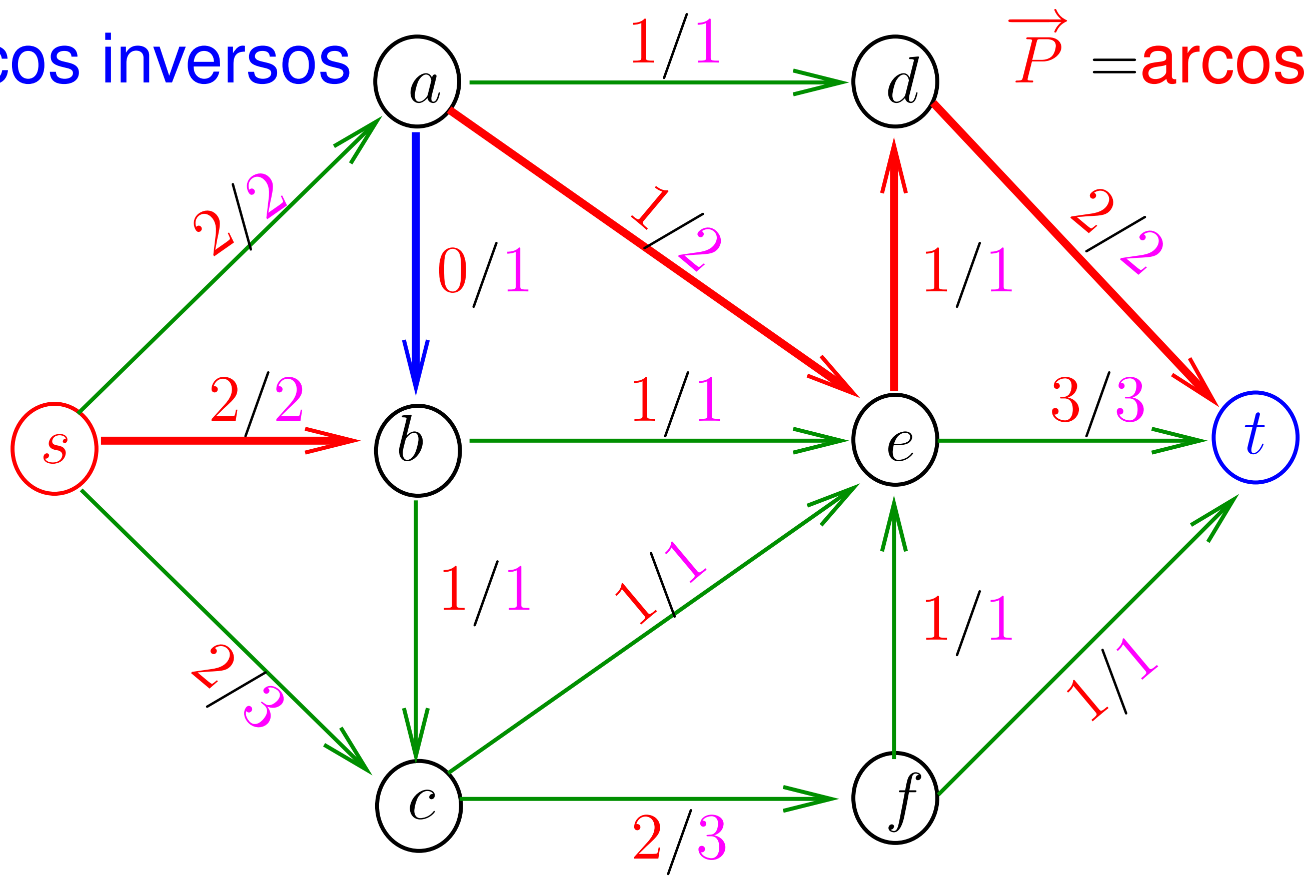
Pseudo-caminho de incremento

Um pseudo-caminho P é de incremento se

$$
\begin{array}{lclll}
x(ij) & < & u(ij) & \text{para cada } ij \text{ em } & \overrightarrow{P} \\
x(ij) & > & 0 & \text{para cada } ij \text{ em } & \overleftarrow{P}
\end{array}
$$

$\overleftarrow{P}$ =arcos inversos

$\overrightarrow{P}$ =arcos diretos



Lema do incremento

Se x é um st-fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento se s a t, então x não é um fluxo máximo.

Rascunho da demonstração: Seja δ o maior valor tal que

$$\begin{array}{lcll} \delta & \leq & u(ij) - x(ij) & \text{para cada } ij \in \overrightarrow{P} \\ \delta & \leq & x(ij) & \text{para cada } ij \in \overleftarrow{P}. \end{array}$$

É evidente que $\delta > 0$. Seja x' o st-fluxo

$$x'(ij) := \begin{cases} x(ij) + \delta & \text{se } ij \in \overrightarrow{P} \\ x(ij) - \delta & \text{se } ij \in \overleftarrow{P} \\ x(ij) & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Temos que $\mathrm{val}(x') = \mathrm{val}(x) + \delta$.

Lema do certificado

Se x é um st-fluxo e não existe um pseudo-caminho de incremento de s a t, então existe um st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T).$$

Rascunho da demonstração: Seja S o conjunto de nós que são términos de algum pseudo-caminho de incremento que começa em s e seja $T := \overline{S}$.
Da definição segue que $x(\overline{T}, T) = u(\overline{T}, T)$ e $x(T, \overline{T}) = 0$.
Logo,

$$\begin{aligned}\text{val}(x) &= x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) \\ &= x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) \\ &= x(\overline{T}, T) \\ &= u(\overline{T}, T)\end{aligned}$$

Ford e Fulkerson

Método dos caminhos de incremento

> PASSO DE INCREMENTO: encontre um pseudo-caminho de incremento (para o fluxo corrente). Incremente o valor do fluxo “enviando $\delta > 0$ unidades de fluxo através do caminho”.

Note que o método não especifica como encontrar o pseudo-caminho de incremento.

Algoritmo de Ford e Fulkerson

Recebe uma rede (N, A, u) com função-capacidade u e nós s e t e devolve um st fluxo máximo x e um st-corte mínimo $\nabla(\overline{T}, T)$.

FORD-FULKERSON (N, A, u, s, t)

$x \leftarrow 0$

repita

  $A_x \leftarrow \{ij \in A : x(ij) < u(ij)\} \cup \{ji : x(ij) > 0\}$

  $\langle y, P\rangle \leftarrow$ BUSCA(N, A_x, s, t)

  se $y(t) - y(s) = 0$

    então $x \leftarrow$ INCREMENTE-FLUXO(x, P)

até que $y(t) - y(s) > 0$

$T \leftarrow \{j : y(j) - y(s) > 0\}$

devolva x e T

Algoritmo de incremento

Recebe um st-fluxo x e um pseudo-caminho de incremento P e **devolve** o fluxo x após enviar "δ unidades de fluxo através de P".

INCREMENTE-FLUXO (x, P)

$\delta_1 \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arco de $\overleftarrow{P}\}$

$\delta_2 \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $\overrightarrow{P}\}$

$\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$

para cada arco ij em P **faça**

    se $ij \in \overrightarrow{P}$

        então $x(ij) \leftarrow x(ij) + \delta$

        senão $x(ij) \leftarrow x(ij) - \delta$

devolva x

Invariante

Na linha 2 e na linha 7 valem as seguintes invariantes:

(i0) x é inteiro;

(i1) x é um st-fluxo;

(i2) x respeita u.

AULA 10

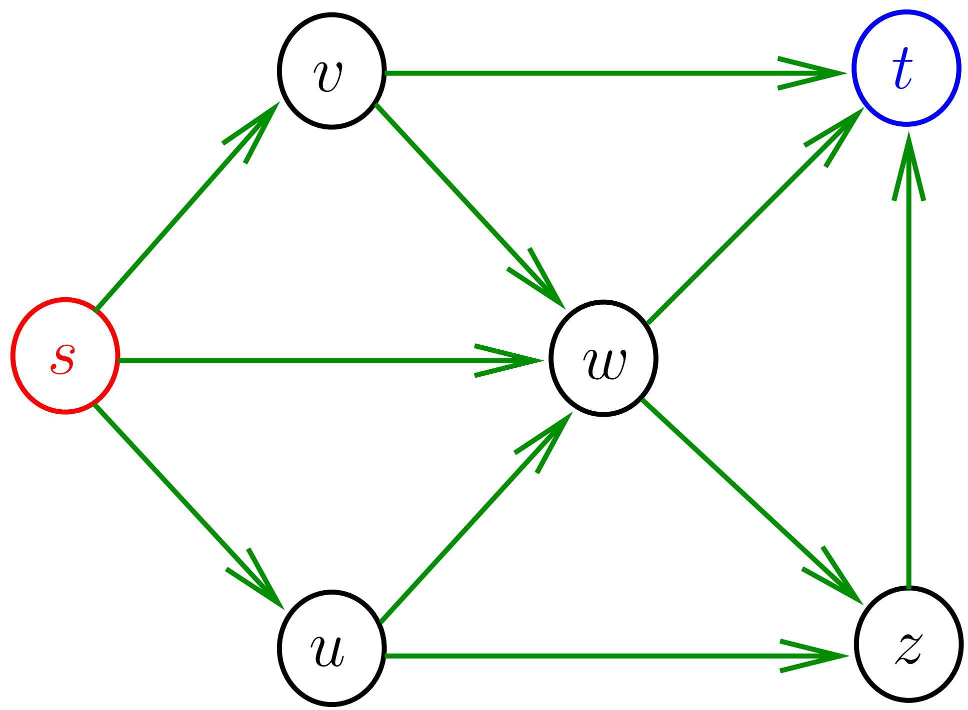
Redes simétricas e pseudofluxos

PF 12.1, 12.2, 12.3, 12.4

Grafos simétricos

Um grafo (N, A) é simétrico se $ji \in A$ sempre que $ij \in A$.

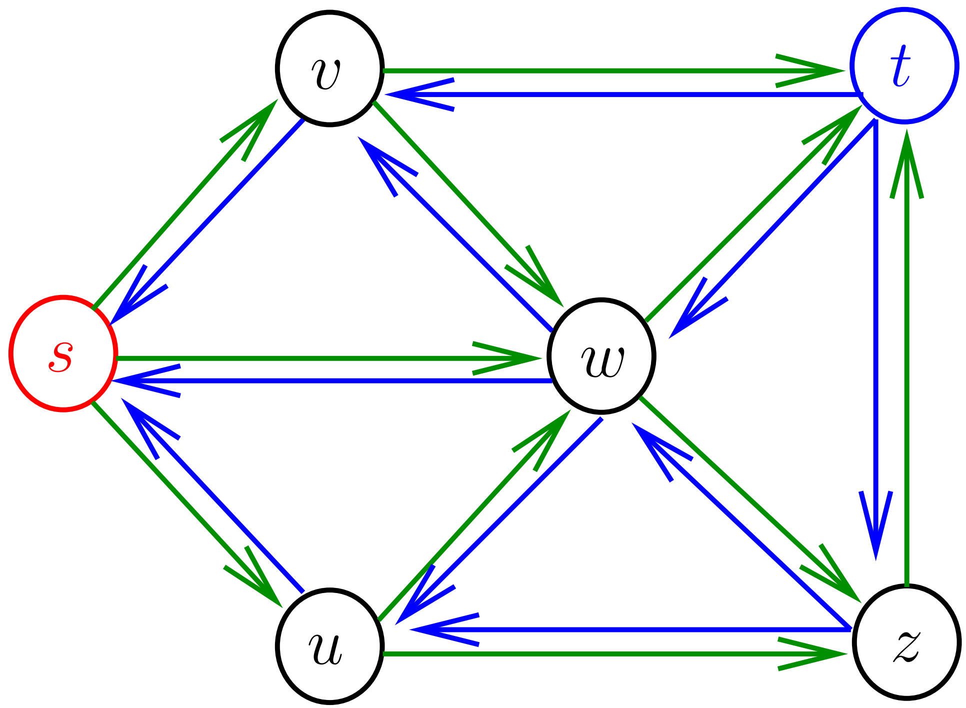
Exemplo: grafo não-simétrico



Grafos simétricos

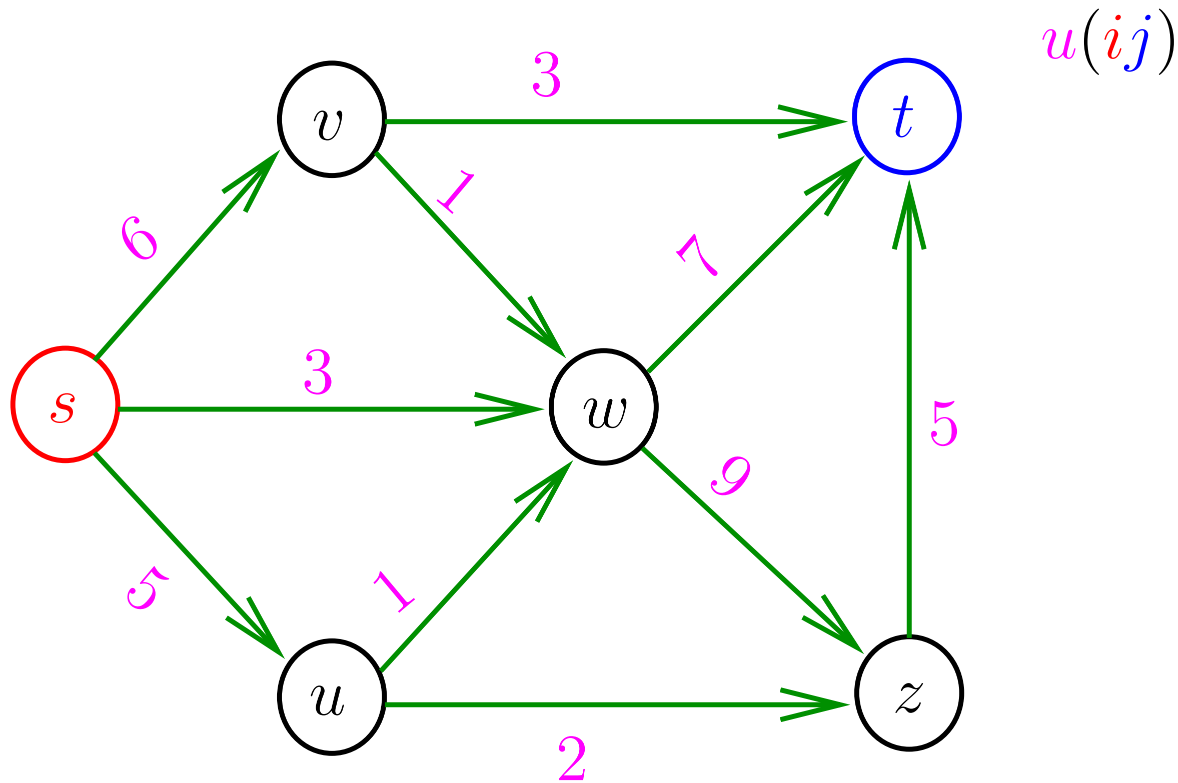
Um grafo (N, A) é simétrico se $ji \in A$ sempre que $ij \in A$.

Exemplo: grafo simétrico



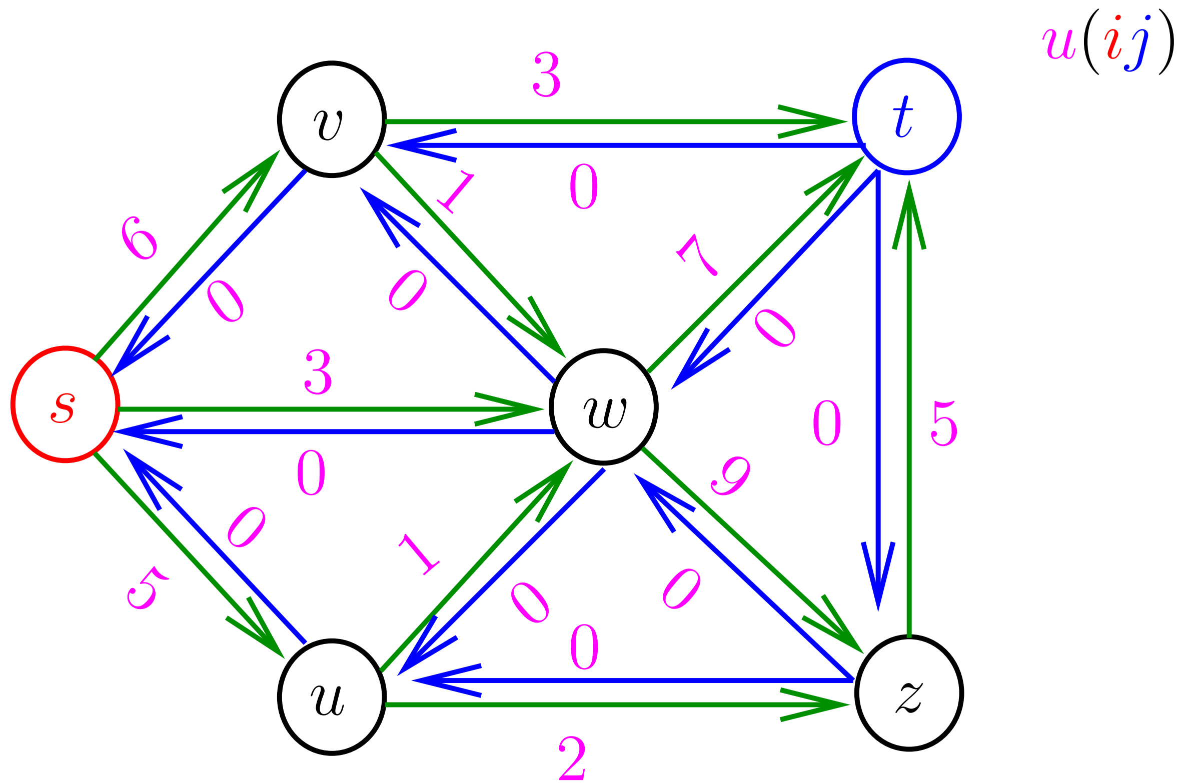
Fluxos em redes simétricas

Basta saber resolver o problema do fluxo máxima em redes simétricas.



Fluxos em redes simétricas

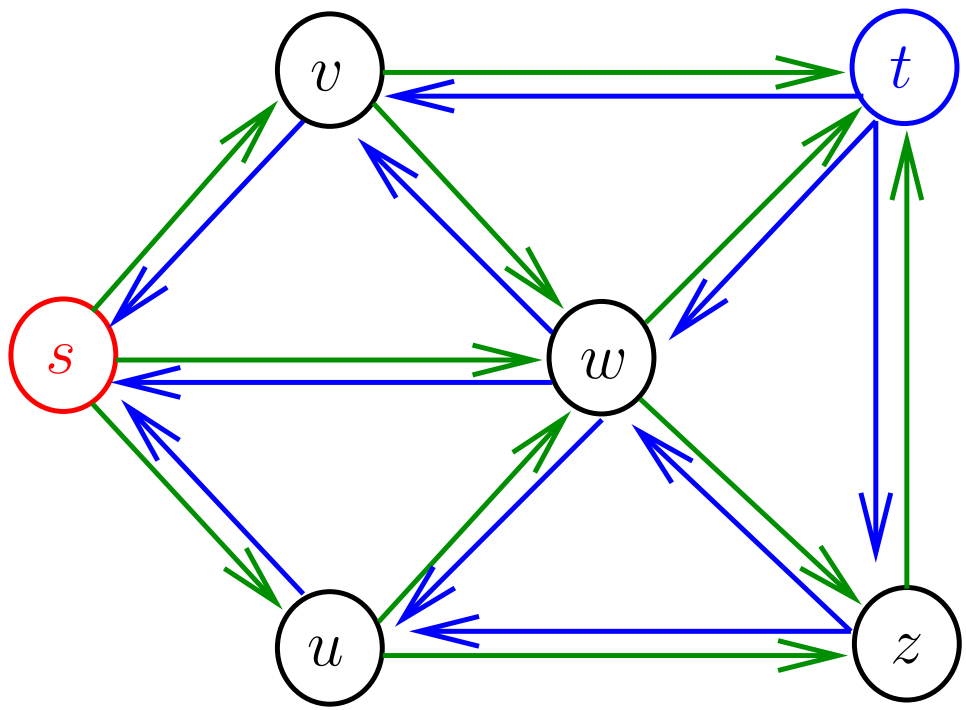
Basta saber resolver o problema do fluxo máxima em redes simétricas.



Estrutura de dados

Suporemos que a estrutura que representa o grafo simétrico permite acesso rápido ao "irmão" de cada arco:

> dado uma arco ij, é possível obter o arco ji em tempo $\mathrm{O}(1)$.



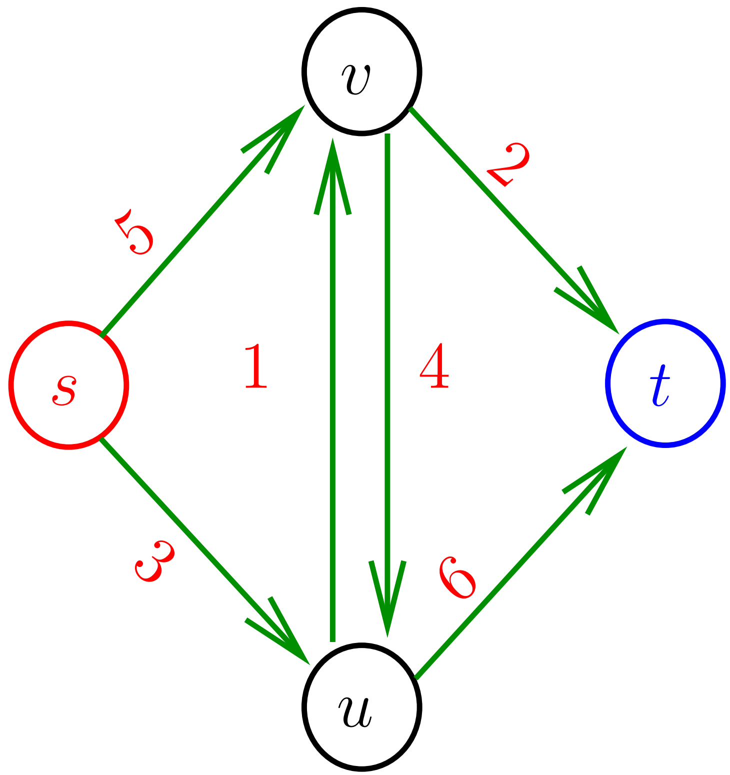
Fluxos normalizados

Um fluxo x é normalizado se, para cada arco ij, tem-se que

$$x(ij) = 0 \text{ ou } x(ji) = 0.$$

É facil transformar um fluxo num normalizado de mesmo valor.

val$(x) = 8$ $\qquad$ $x(ij)$



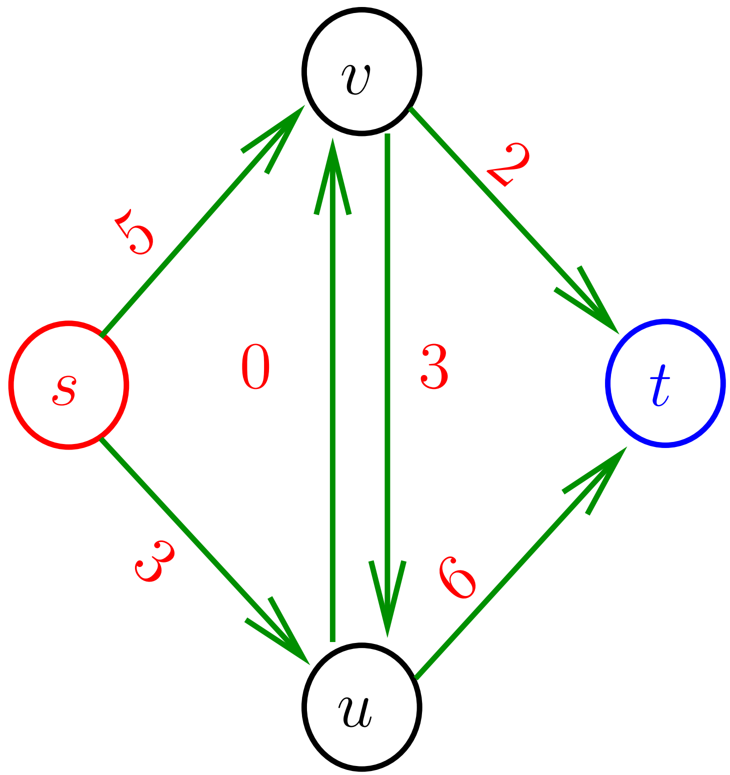
Fluxos normalizados

Um fluxo x é normalizado se, para cada arco ij, tem-se que

$$x(ij) = 0 \text{ ou } x(ji) = 0.$$

É facil transformar um fluxo num normalizado de mesmo valor.

$\text{val}(x) = 8$ $\qquad x(ij)$



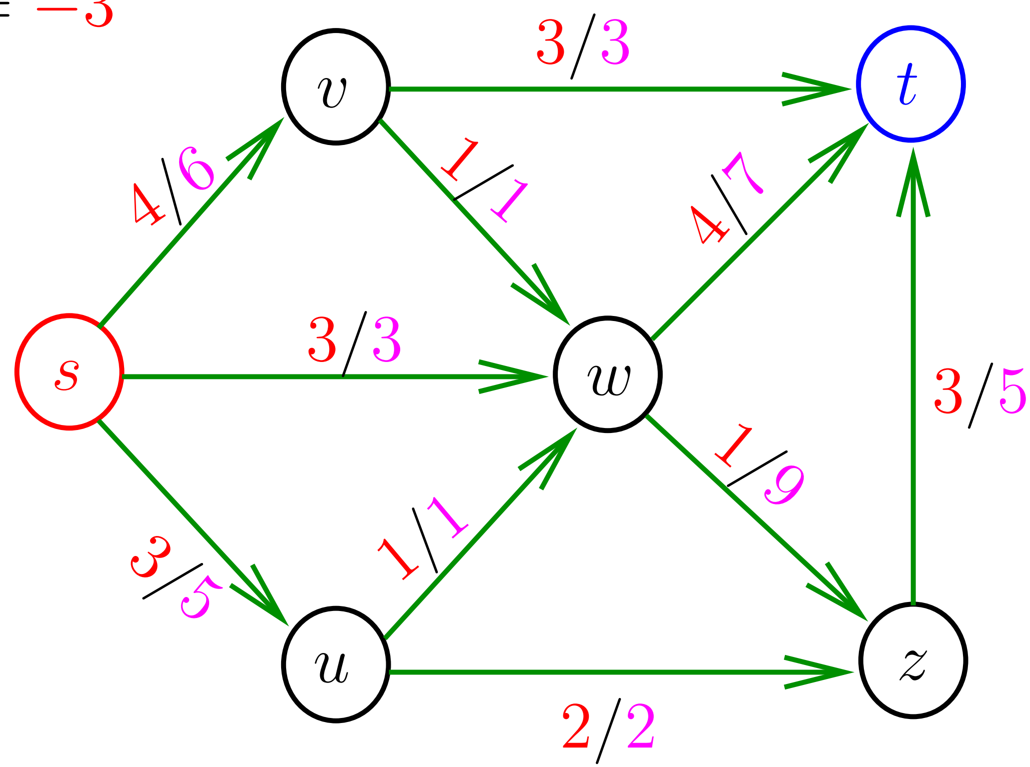
Fluxos e pseudofluxos

Dado um fluxo x em um grafo simétrico (N, A), o correspondente pseudofluxo $\check{x}$ é definido da seguinte maneira:

$$\check{x}(ij) := x(ij) - x(ji)$$

para cada arco ij.

$\check{x}(tv) = -3$

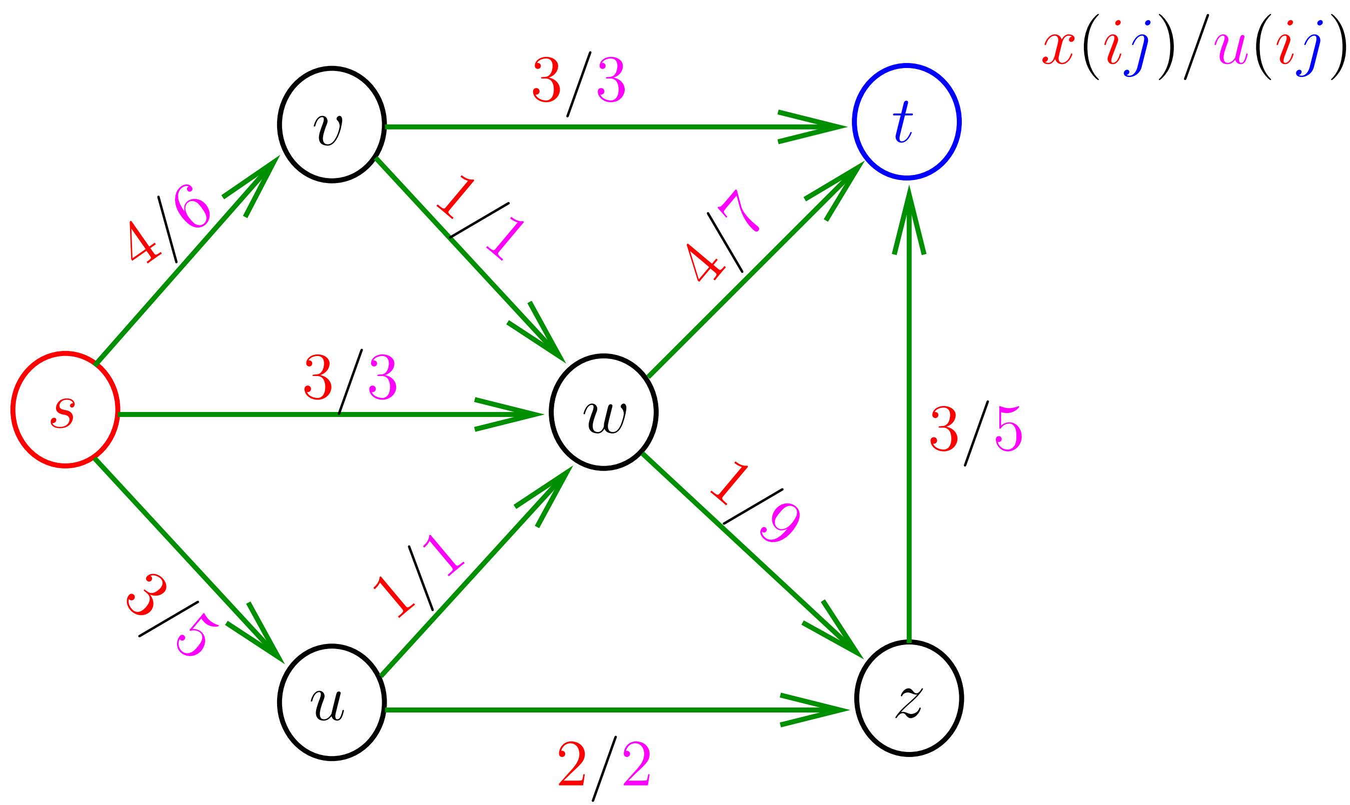


Fluxos e pseudofluxos

O valor $\check{x}(ij)$ pode ser entendido como a "intensidade do fluxo de i a j ao logo do par (ij, ji)".

Propriedade: $\check{x}(ij) = -\check{x}(ji)$

Exemplo: $\check{x}(tv) = -3, \check{x}(vt) = 3, \check{x}(vs) = -4$



Tradução

O excesso ou acúmulo de um pseudofluxo $\check{x}$ em uma subconjunto T de N é

$$\check{x}(\overline{T}, T) := \sum(\check{x}(ij) : i \in \overline{T} \;\text{ e }\; j \in T\}$$

Um st-pseudofluxo é qualquer pseudofluxo $\check{x}$ tal que

$\check{x}(\bar{j}, j) = 0$ para cada nó j em $N - \{s, t\}$ e $\check{x}(\bar{t}, t) \geq 0$.

Numa rede simétrica com função-capacidade u, dizemos que um pseudofluxo $\check{x}$ respeita u se

$$-u(ji) \leq \check{x}(ij) \leq u(ij)$$

para todo arco ij em A.

Fluxo para pseudofluxo

Recebe um fluxo x em uma rede simétrica e devolve, em tempo $\mathrm{O}(m)$, o correspondente pseudofluxo.

PSEUDOFLUXO (x)
1 **para** cada ij em A **faça**
2 $\check{x}(ij) \leftarrow x(ij) - x(ji)$
3 **devolva** $\check{x}$

- val$(x) = x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) = \check{x}(\bar{t}, t)$
- x repeita u se e só se $\check{x}$ respeita u
- $\check{x}(\overline{T}, T) = -\check{x}(T, \overline{T})$

Pseudofluxo para fluxo

Recebe um pseudofluxo $\check{x}$ em uma rede simétrica e devolve, em tempo $O(m)$, o correspondente fluxo.

FLUXO $(\check{x})$
para cada ij em A **faça**
  se $\check{x}(ij) \geq 0$
    então $x(ij) \leftarrow \check{x}(ij)$
    senão $x(ij) \leftarrow 0$
devolva x

- x é um fluxo normalizado
- $\mathsf{val}(x) = x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) = \check{x}(\bar{t}, t)$
- se $\check{x}$ respeita u então x repeita u

Grafo residual

Suponha que x é um fluxo que respeita u numa rede simétrica.

Seja $\check{x}$ o correspondente pseudofluxo.

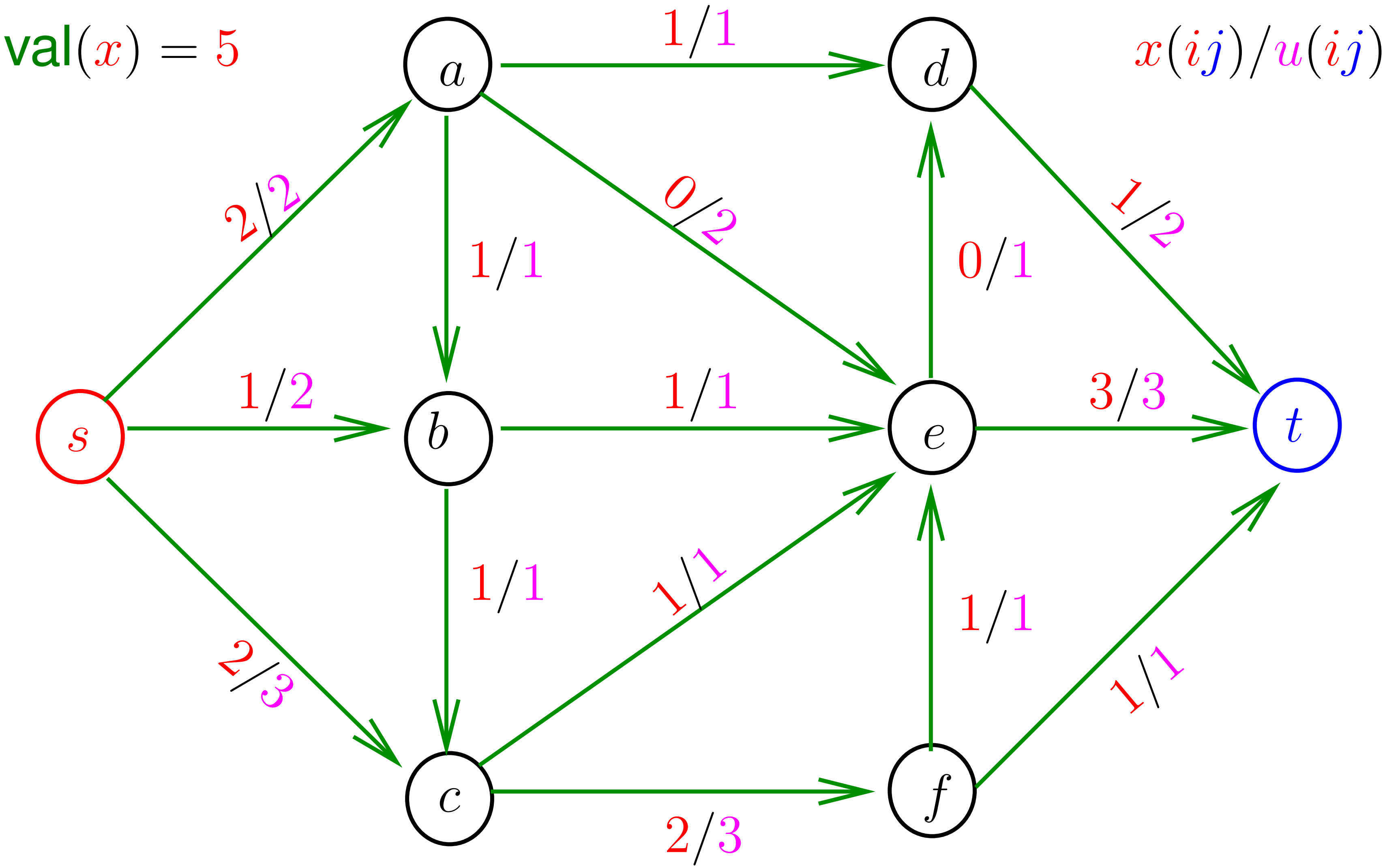
Seja $A_{\check{x}}$ o conjunto dos arcos ij que têm $\check{x}(ij) < u(ij)$:

$$A_{\check{x}} := \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}.$$

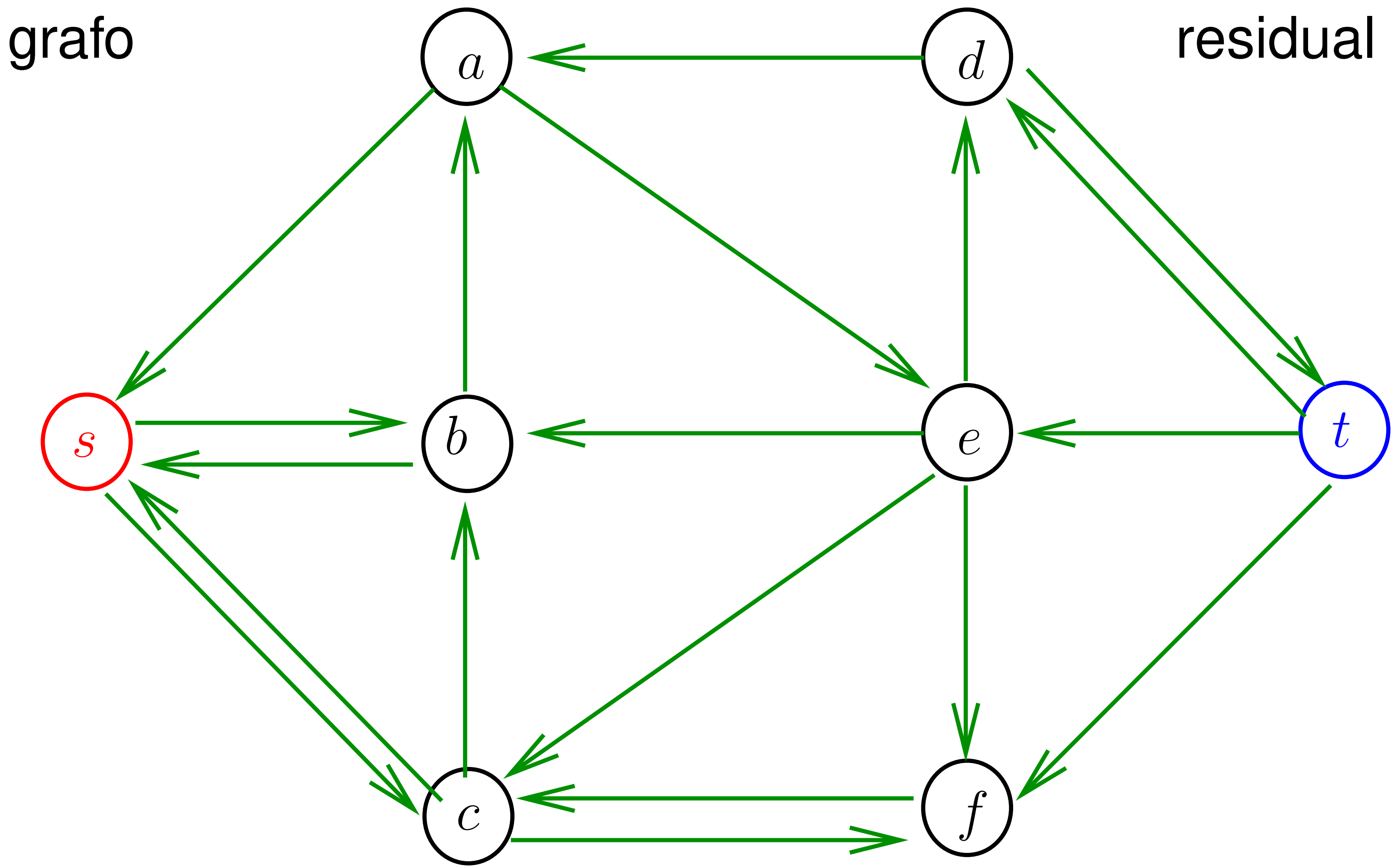
Diremos que $(N, A_{\check{x}})$ é o grafo residual (= *residual graph*) correspondente a x.

Propriedade: pseudo-caminhos de incremento são meros caminhos (dirigidos) no grafo residual.

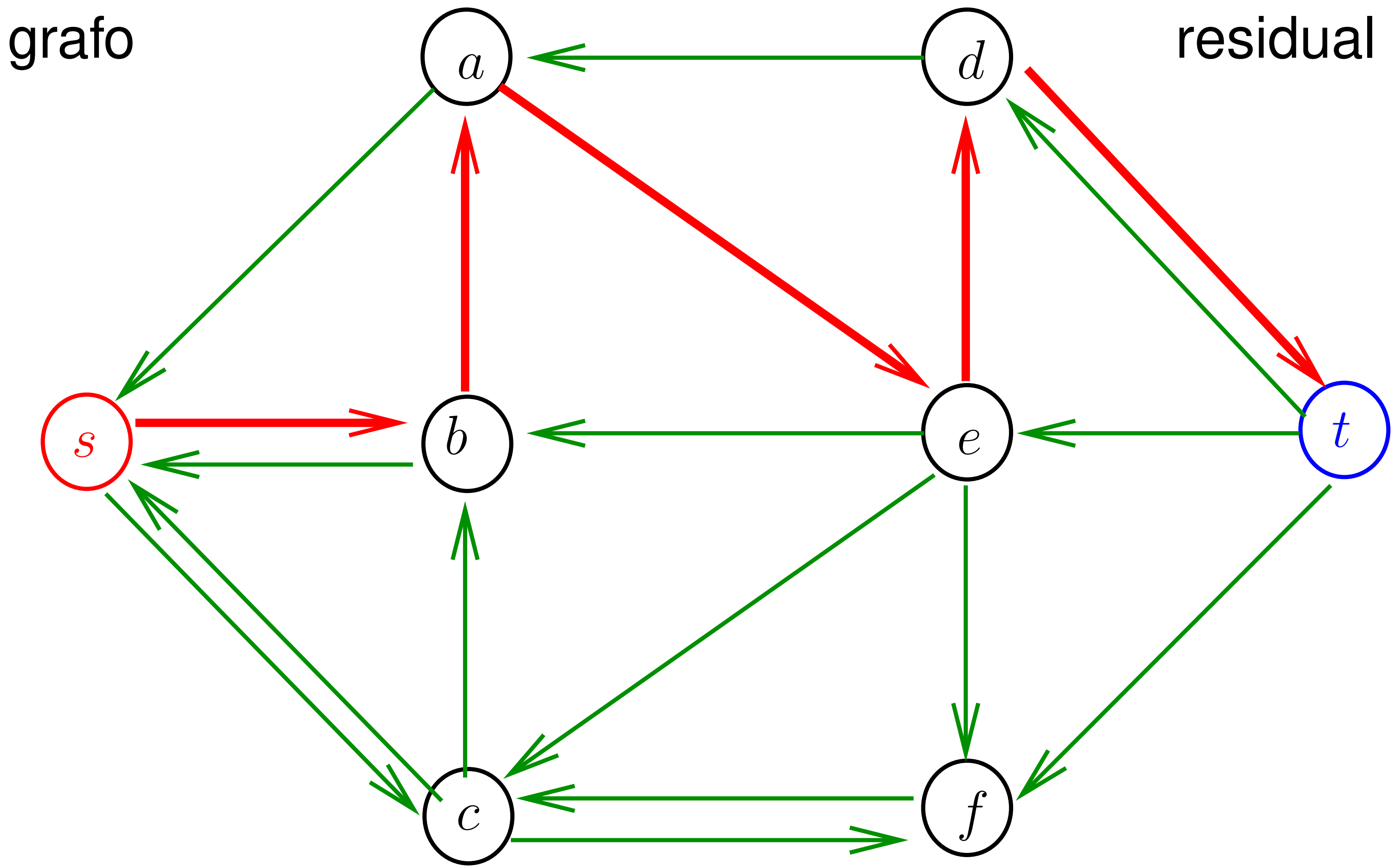
Um fluxo



Correspondente grafo residual



Exemplo de caminho de incremento



Rede residual

Suponha que x é um fluxo que respeita u numa rede simétrica.

Seja $\check{x}$ o correspondente pseudofluxo.

Sejam $A_{\check{x}}$ o conjunto dos arcos ij que têm $\check{x}(ij) < u(ij)$ e u' a função-capacidade residual de $A_{\check{x}}$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$ dada por

$$u'(i,j) := u(ij) - \check{x}(ij)$$

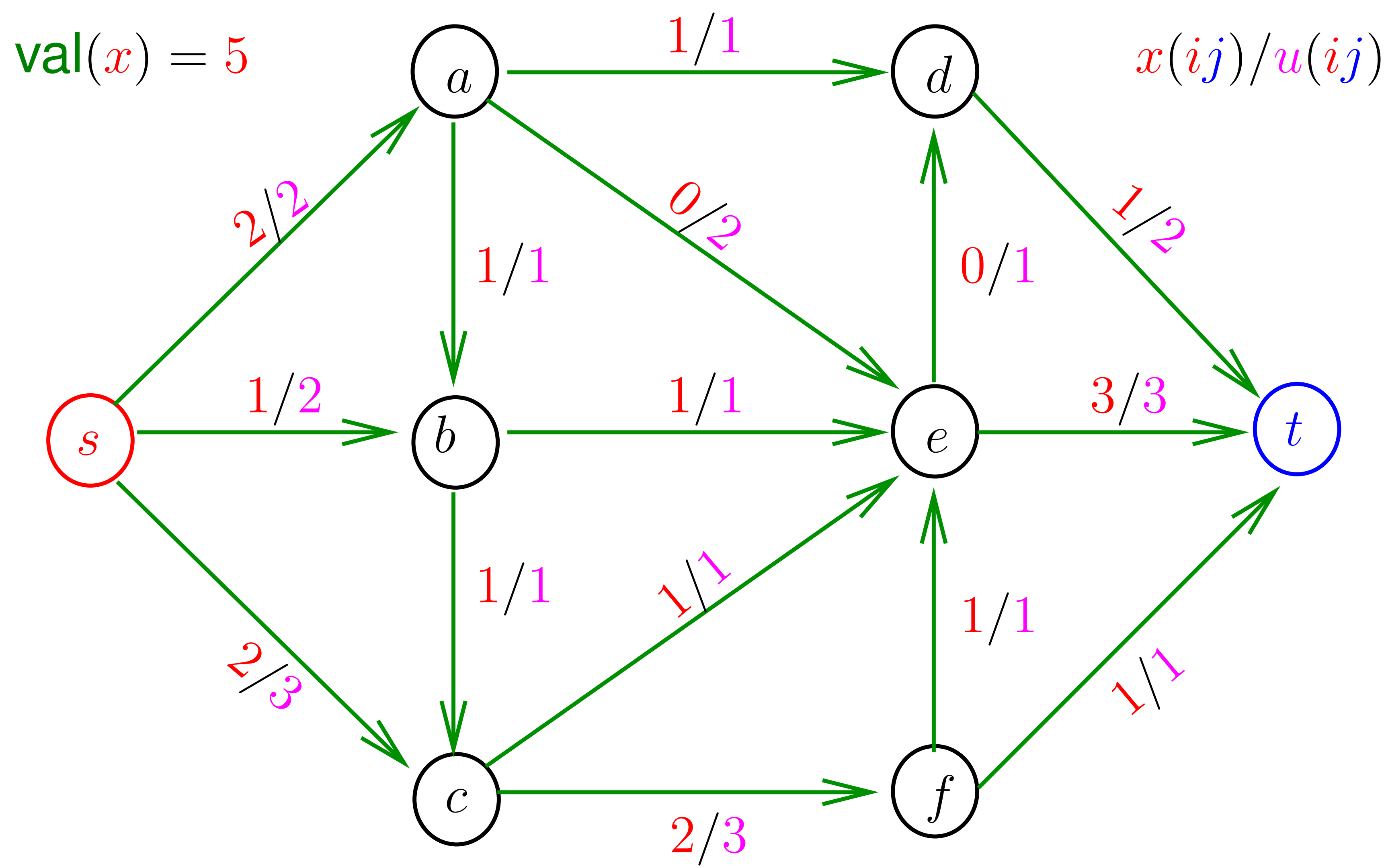
Diremos que $(N, A_{\check{x}}, u')$ é a rede residual (= *residual network*) correspondente a x.

Se P é um caminho na rede residual então

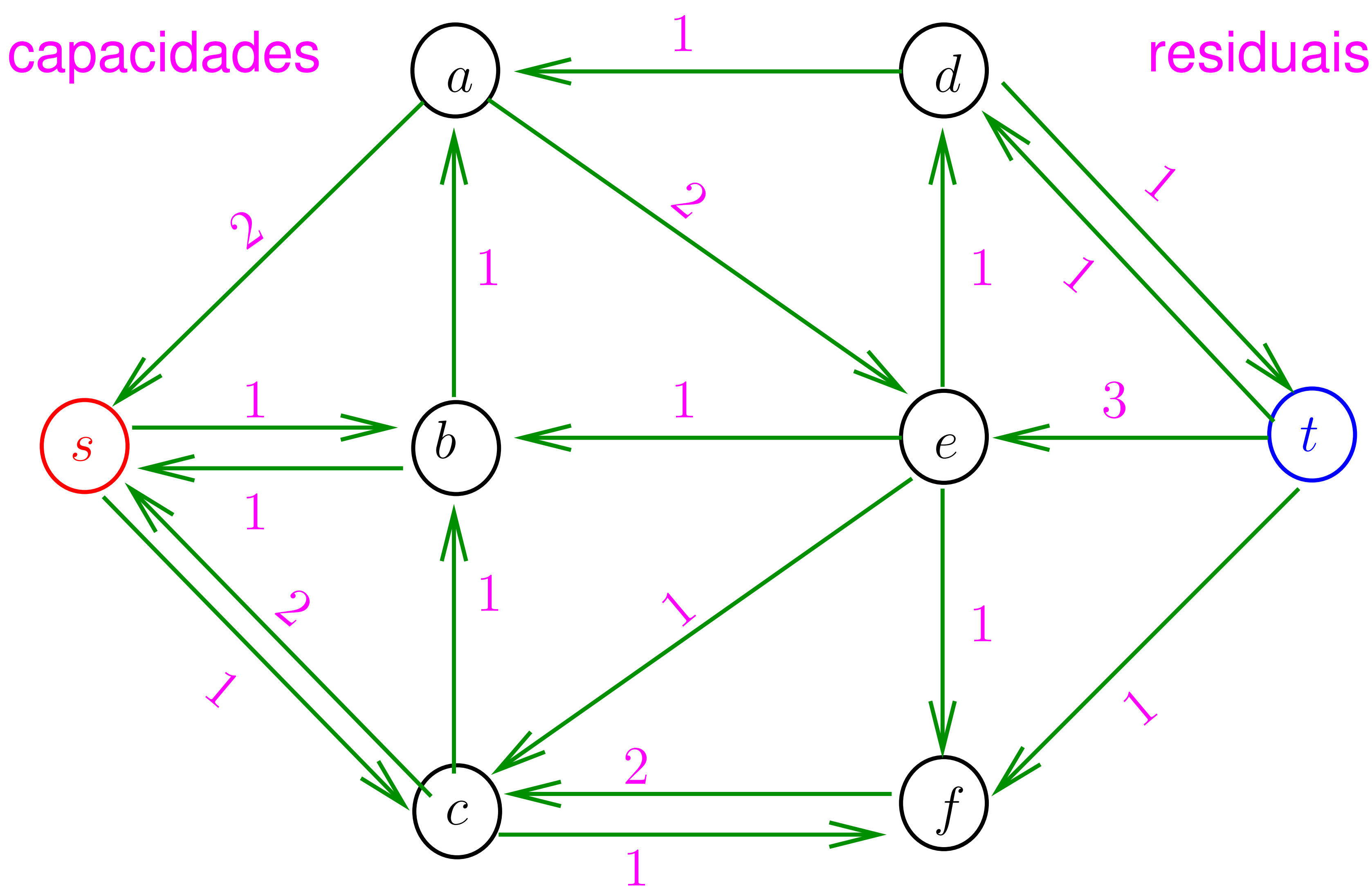
$$\min\{u'(ij) : ij \text{ em } P\}$$

é a capacidade residual de P.
Todo caminho em $(N, A_{\check{x}}, u')$ tem capacidade residual > 0.

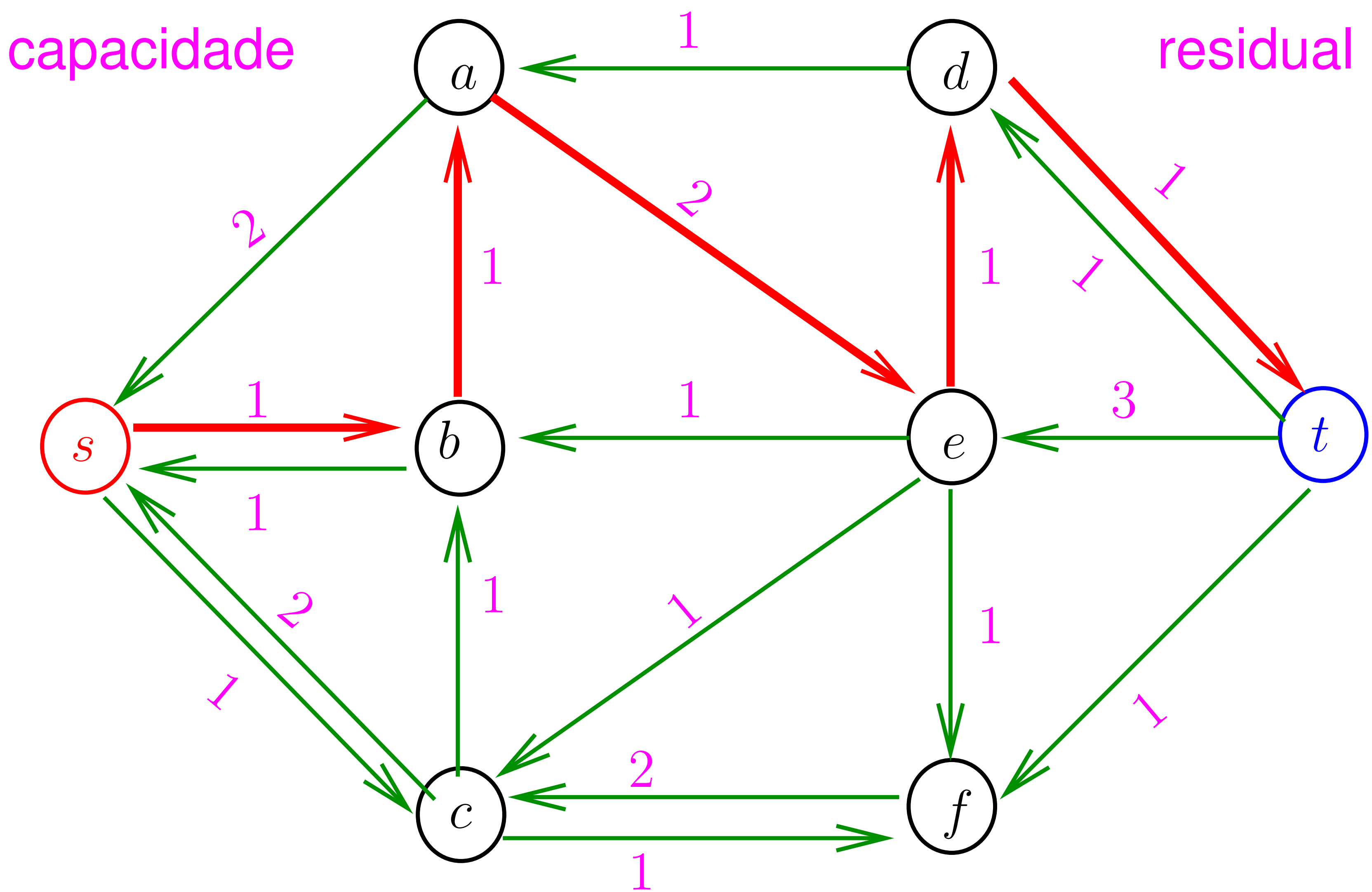
Um fluxo



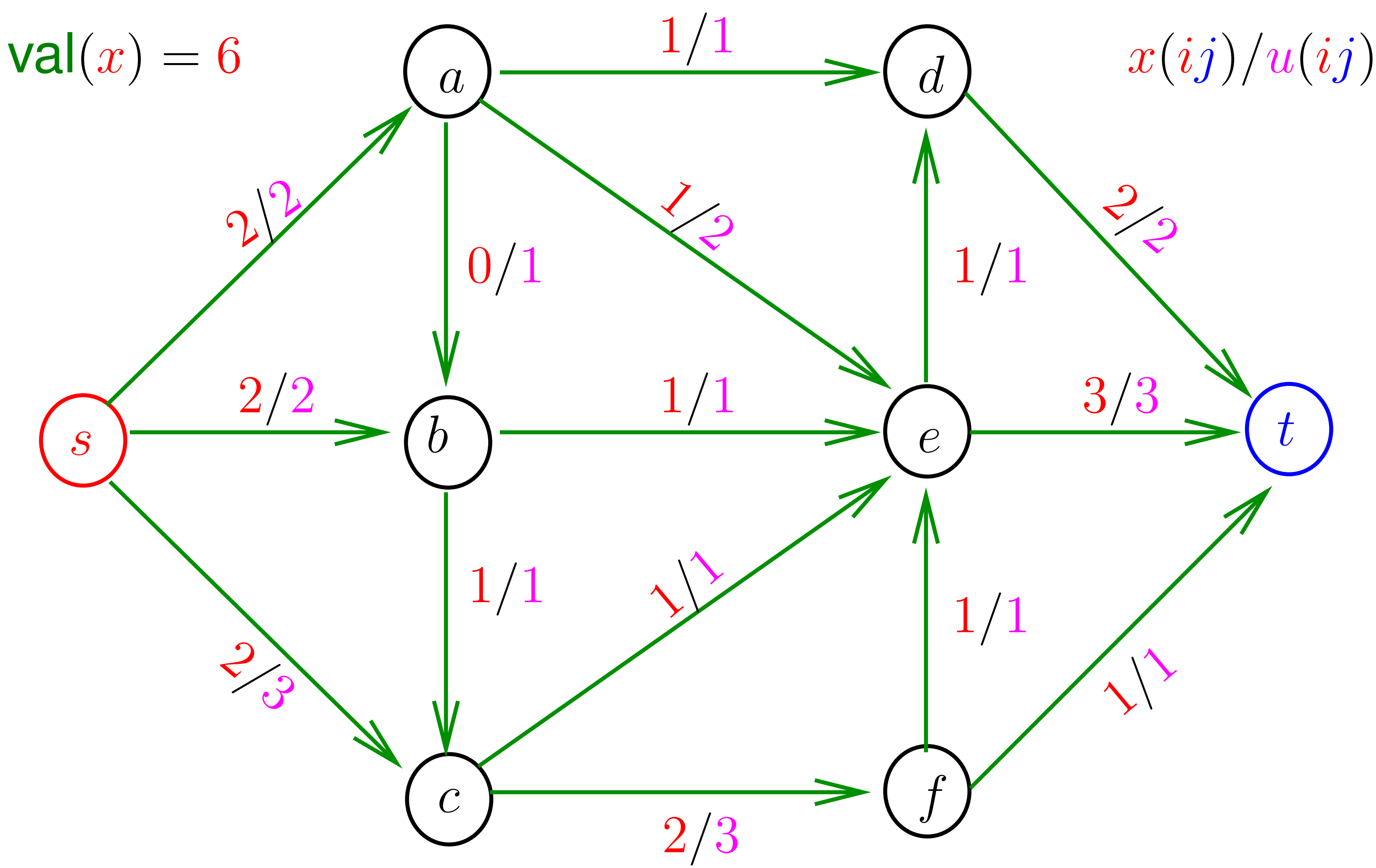
Correspondente rede residual



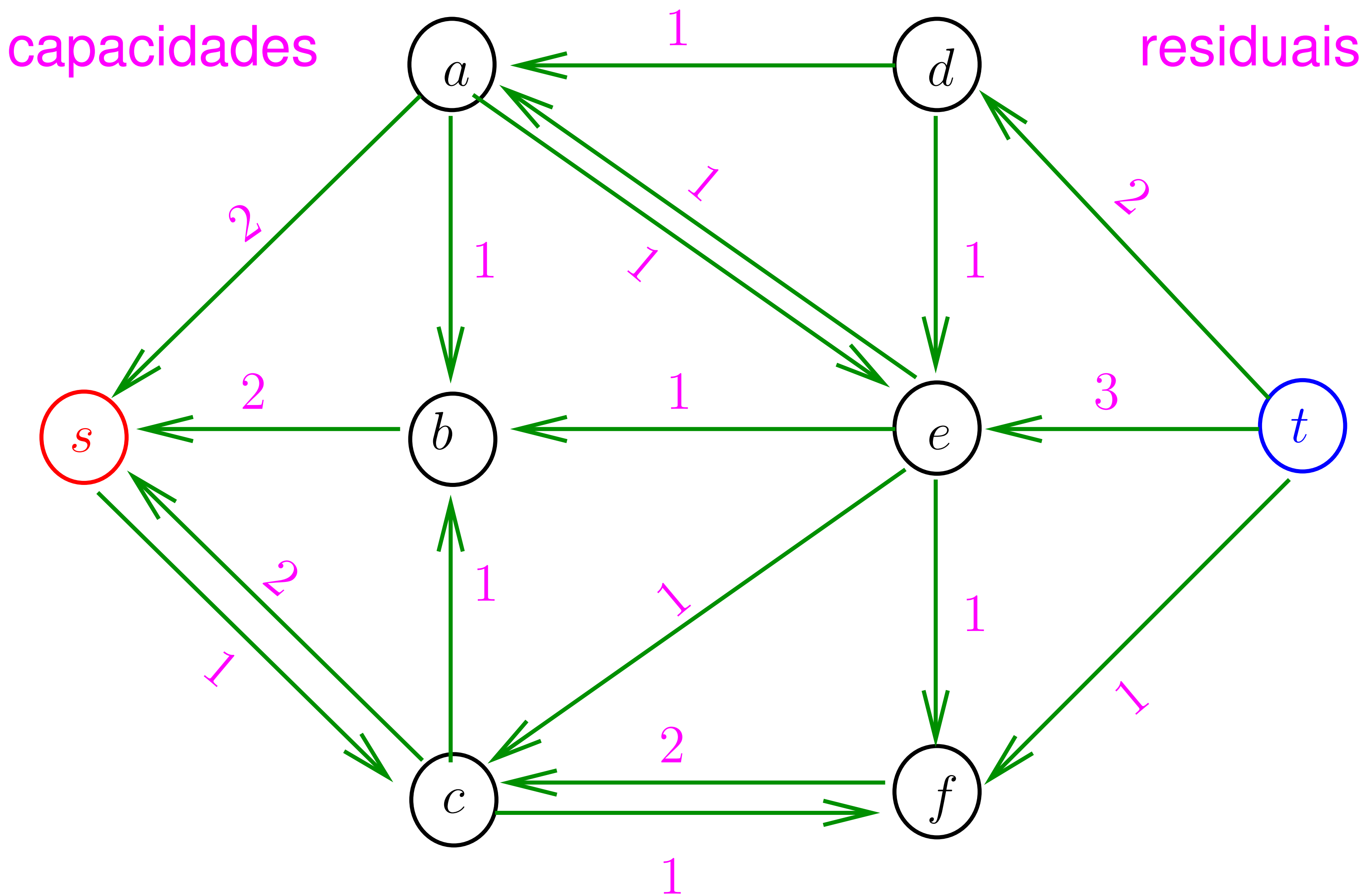
Caminho de incremento



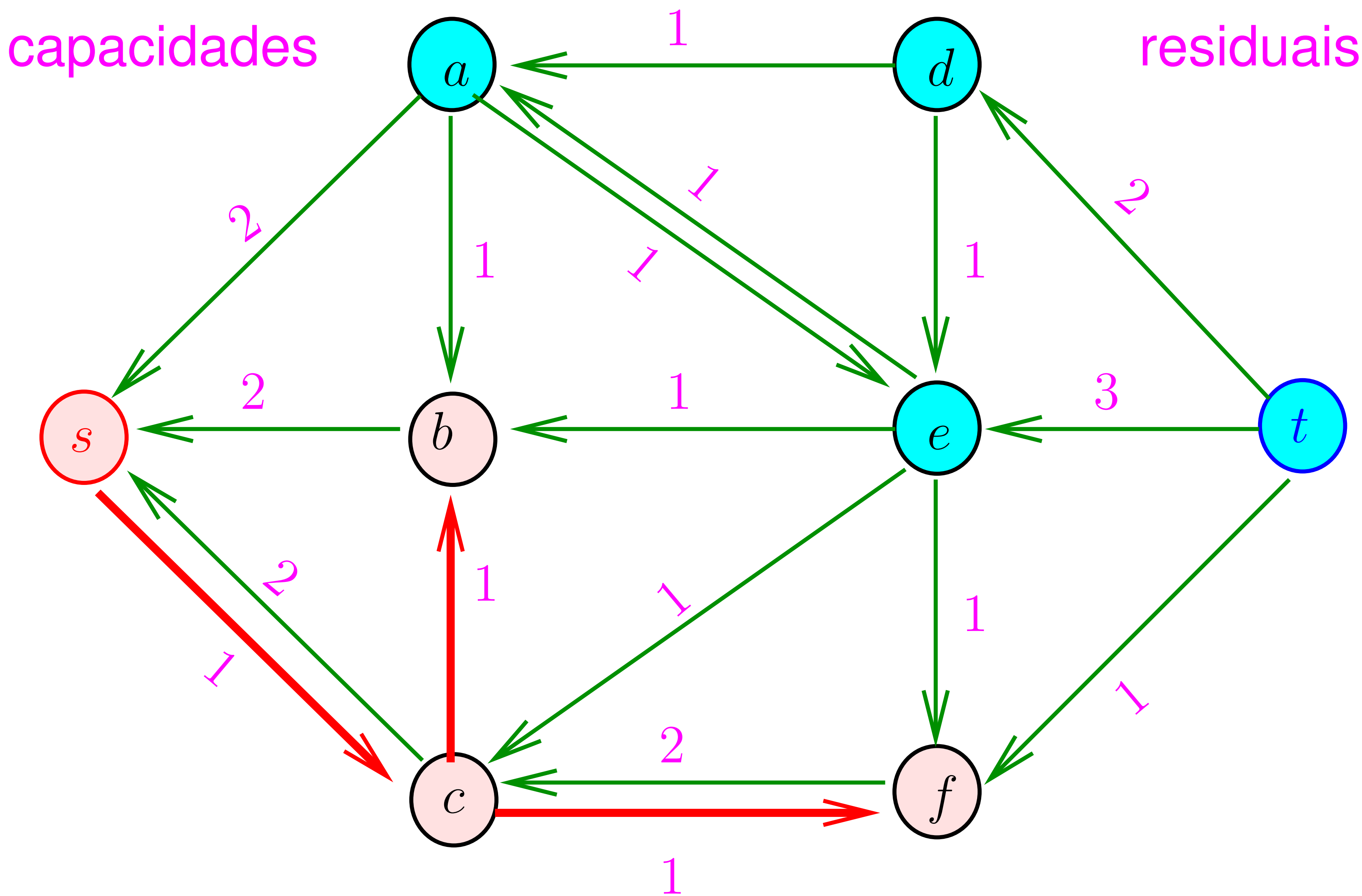
Mais um fluxo



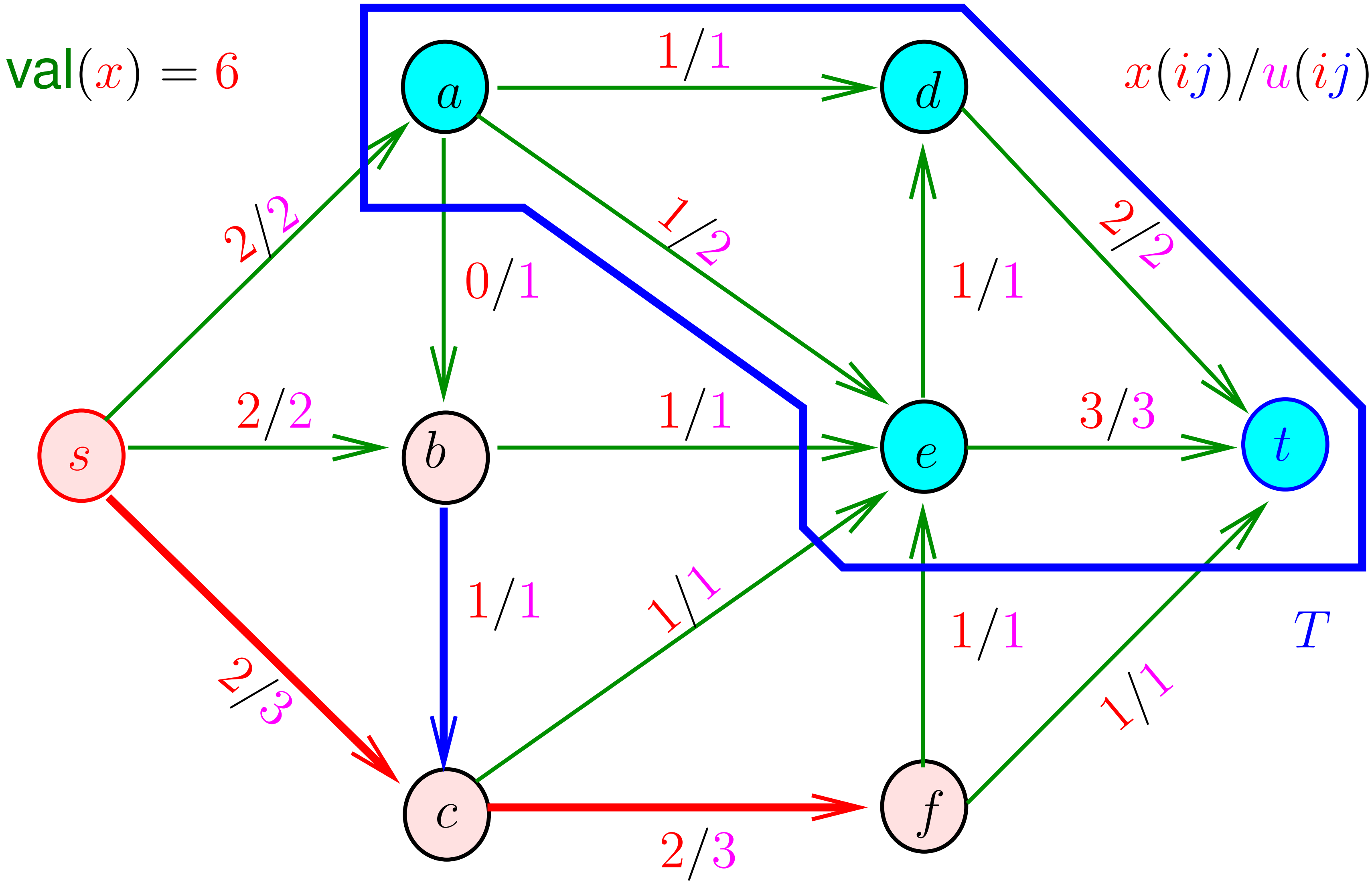
Correspondente rede residual



Caminhos de incremento



É máximo



val$(x) = 6$
$x(ij)/u(ij)$
a
b
c
d
e
f
s
t
T
2/2
2/2
2/3
1/1
1/2
0/1
1/1
1/1
2/2
1/1
3/3
1/1
1/1
1/1
1/1
2/3

Fluxos em redes residuais

Seja (N, A, u) uma rede simétrica.

Suponha que x é um st-fluxo que respeita u e $\check{x}$ o correspondente pseudofluxo.

Suponha que z é um st-fluxo na rede residual $(N, A_{\check{x}}, u')$ que respeita u' e $\check{z}$ é o correspondente pseudofluxo.

Fato 1: $\check{x} + \check{z}$ é um st-pseudofluxo que respeita u e

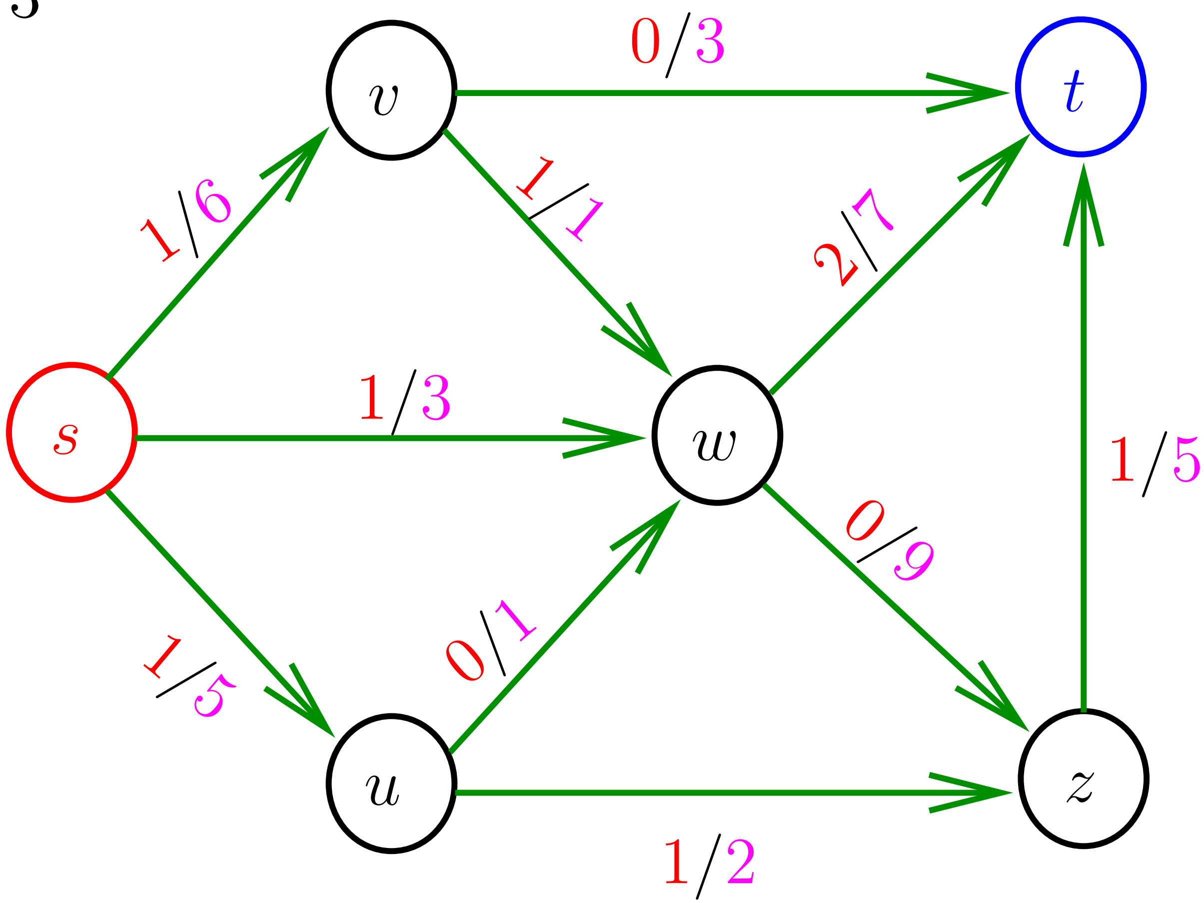
$$(\check{x} + \check{z})(\bar{t}, t) = \check{x}(\bar{t}, t) + \check{z}(\bar{t}, t).$$

Fato 2: Se z tem valor máximo então $\check{x} + \check{z}$ tem valor máximo.

Um pseudofluxo

val$(\check{x}) = 3$

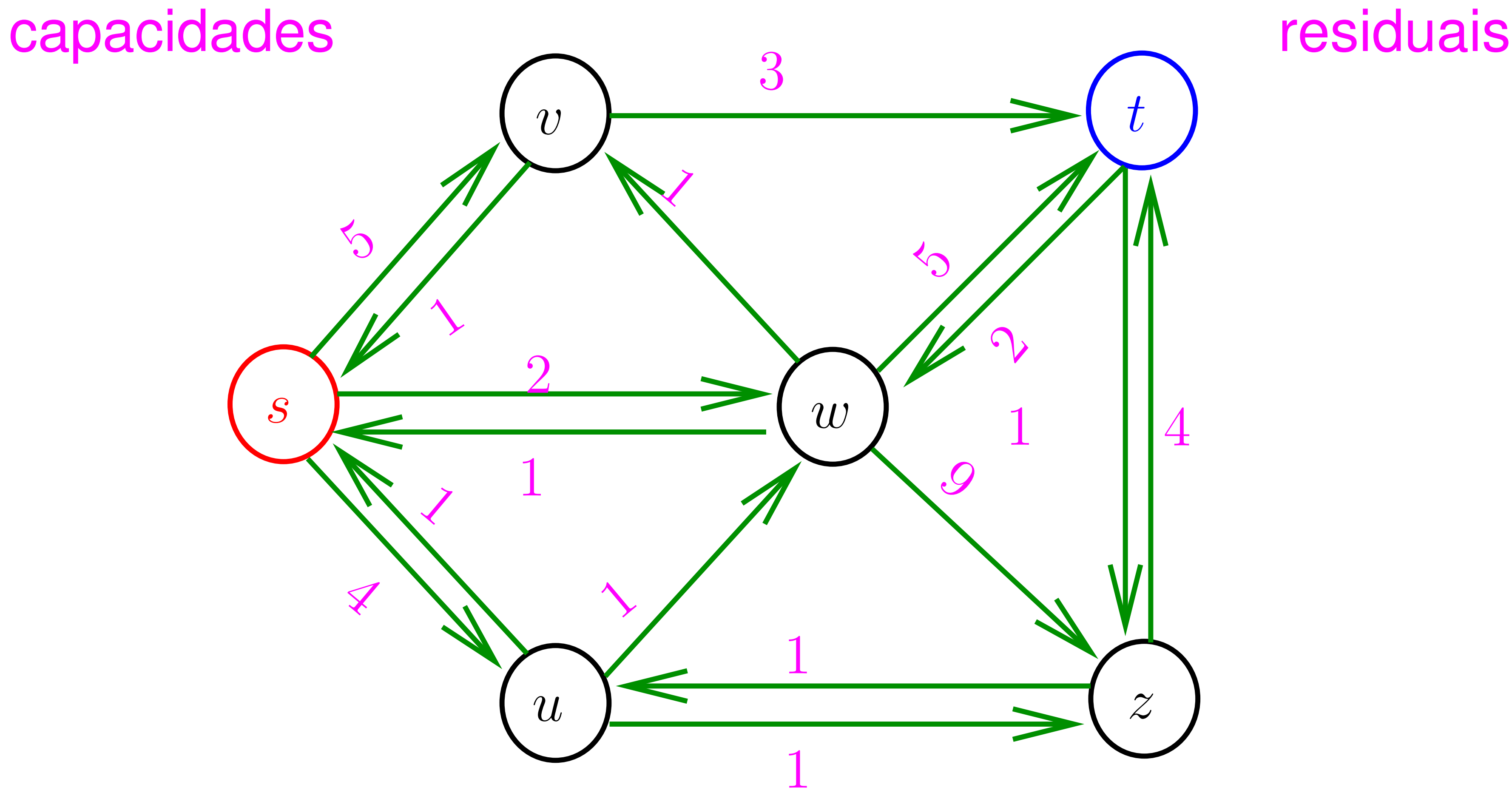
$\check{x}(ij)/u(ij)$



Os arcos com capacidade nula não estão na figura.

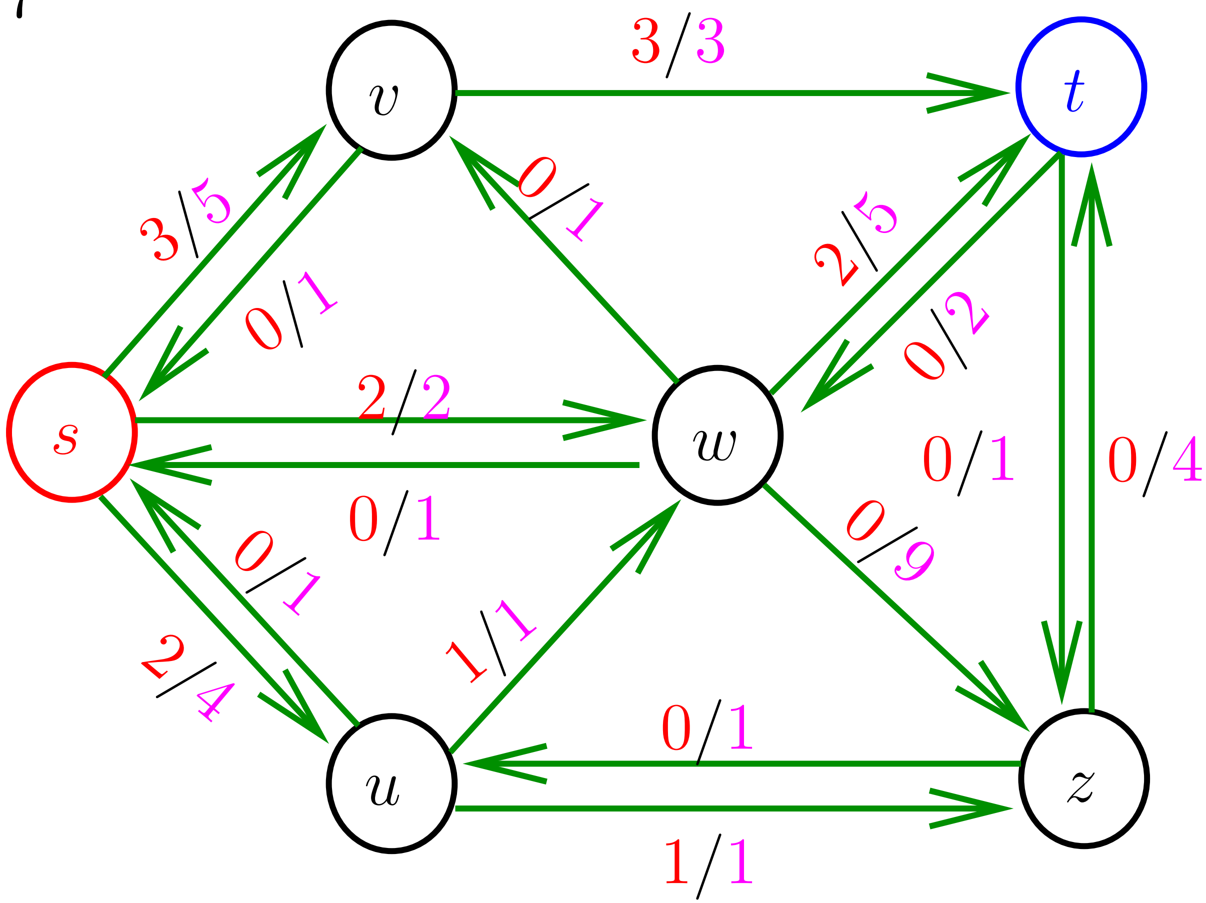
$\check{x}(ij) = \check{x}(ij)$

Correspondente rede residual



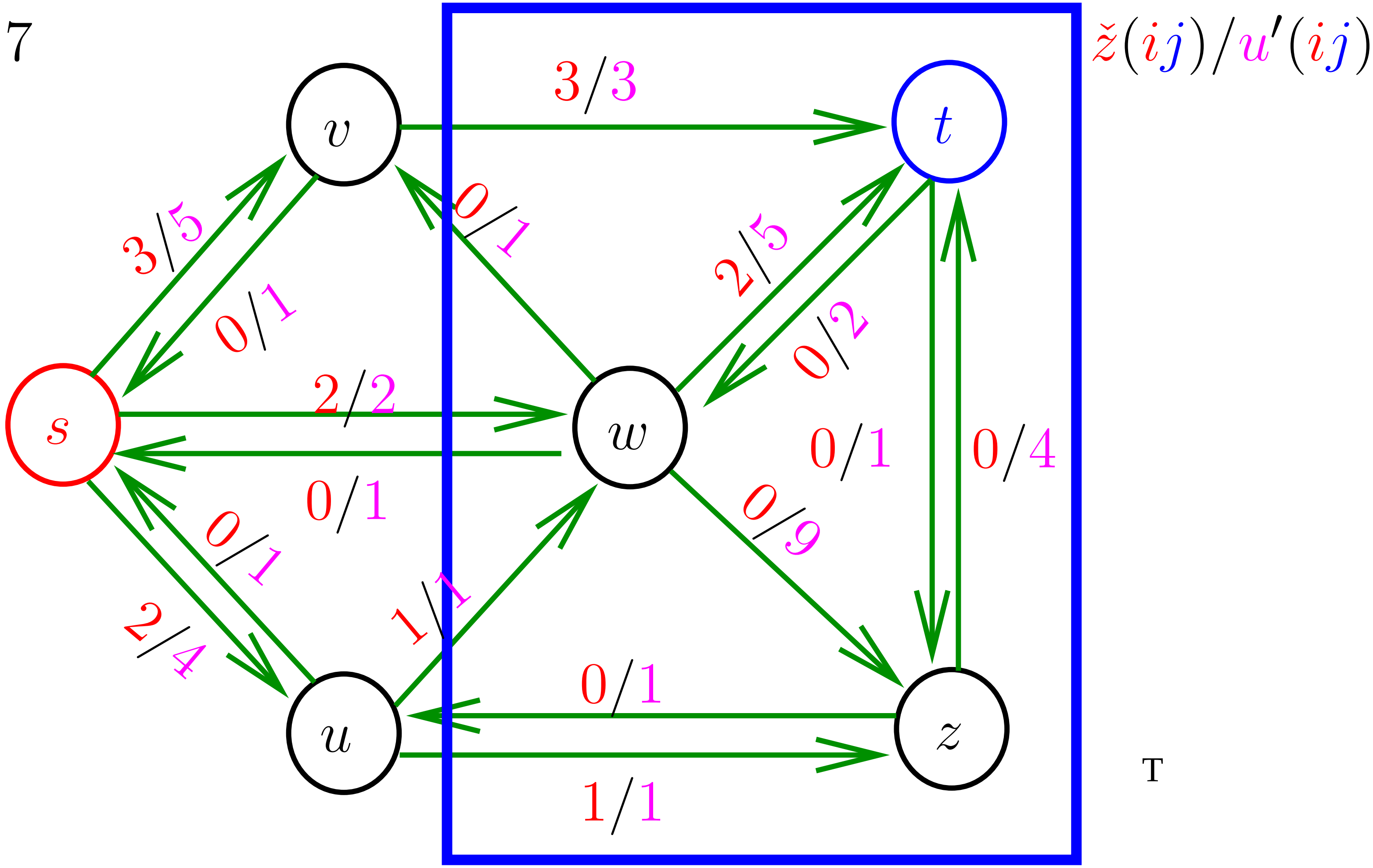
Pseudofluxo máximo na rede residual

$\text{val}(\check{z}) = 7$ $\qquad$ $\check{z}(ij)/u'(ij)$



Pseudofluxo máximo na rede residual

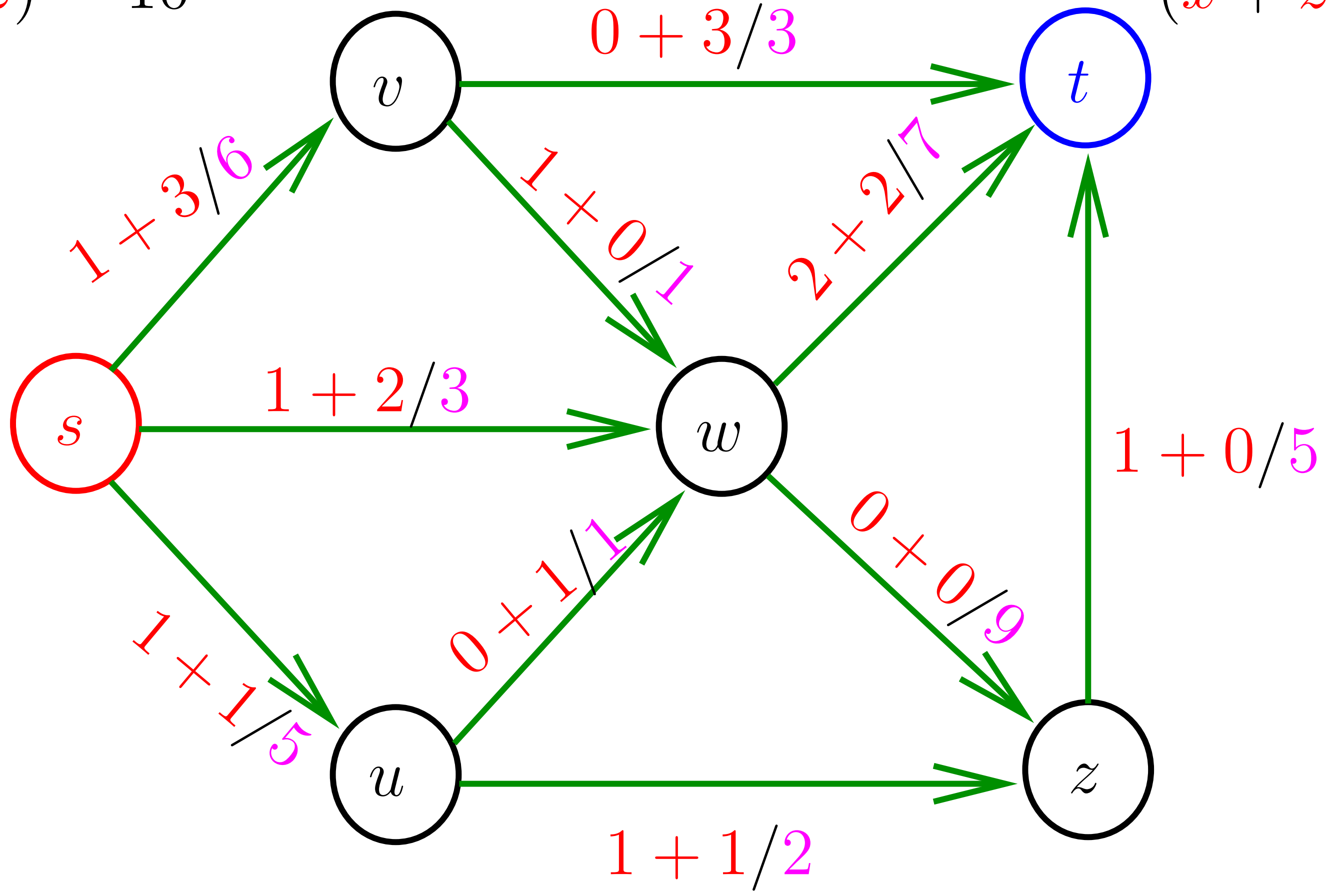
$\mathsf{val}(\check{z}) = 7$



Pseudofluxo máximo na rede original

$\mathsf{val}(\check{x} + \check{z}) = 10$

$(\check{x} + \check{z})(ij)/u(ij)$



Algoritmo de Ford e Fulkerson

Recebe uma rede simétrica (N, A, u) com função-capacidade u e nós s e t e devolve um st-fluxo máximo x e um st-corte mínimo $\nabla(\overline{T}, T)$.

FORD-FULKERSON (N, A, u, s, t)

$\check{x} \leftarrow 0$

repita

    $A_{\check{x}} \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$

    $\langle y, P\rangle \leftarrow$ BUSCA$(N, A_{\check{x}}, s, t)$

    se $y(t) - y(s) = 0$

        então $\check{x} \leftarrow$ INCREMENTE-FLUXO$(\check{x}, P)$

até que $y(t) - y(s) > 0$

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$

$T \leftarrow \{j : y(j) - y(s) > 0\}$

devolva x e T

Algoritmo de incremento

Recebe um st-pseudofluxo $\check{x}$ e um caminho de incremento P e devolve o pseudofluxo $\check{x}$ após enviar "δ unidades de fluxo através de P".

INCREMENTE-FLUXO $(\check{x}, P)$

$\delta \leftarrow \min\{u(ij) - \check{x}(ij) : ij$ é arco de $P\}$
para cada arco ij em P **faça**
    $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$
    $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$
devolva $\check{x}$

Invariantes

Na linha 2 e na linha 7 valem as seguintes invariantes:

(i0) $\check{x}$ é inteiro;

(i1) $\check{x}$ é um st-pseudofluxo;

(i2) $\check{x}$ respeita u.

Incrementos de capacidade máxima

Ford e Fulkerson

Método dos caminhos de incrementos

PASSO DE INCREMENTO: encontre um caminho na rede residual (para o fluxo corrente). Incremente o valor do fluxo “enviando o maior número de unidades de fluxo através do caminho”.

Ford e Fulkerson

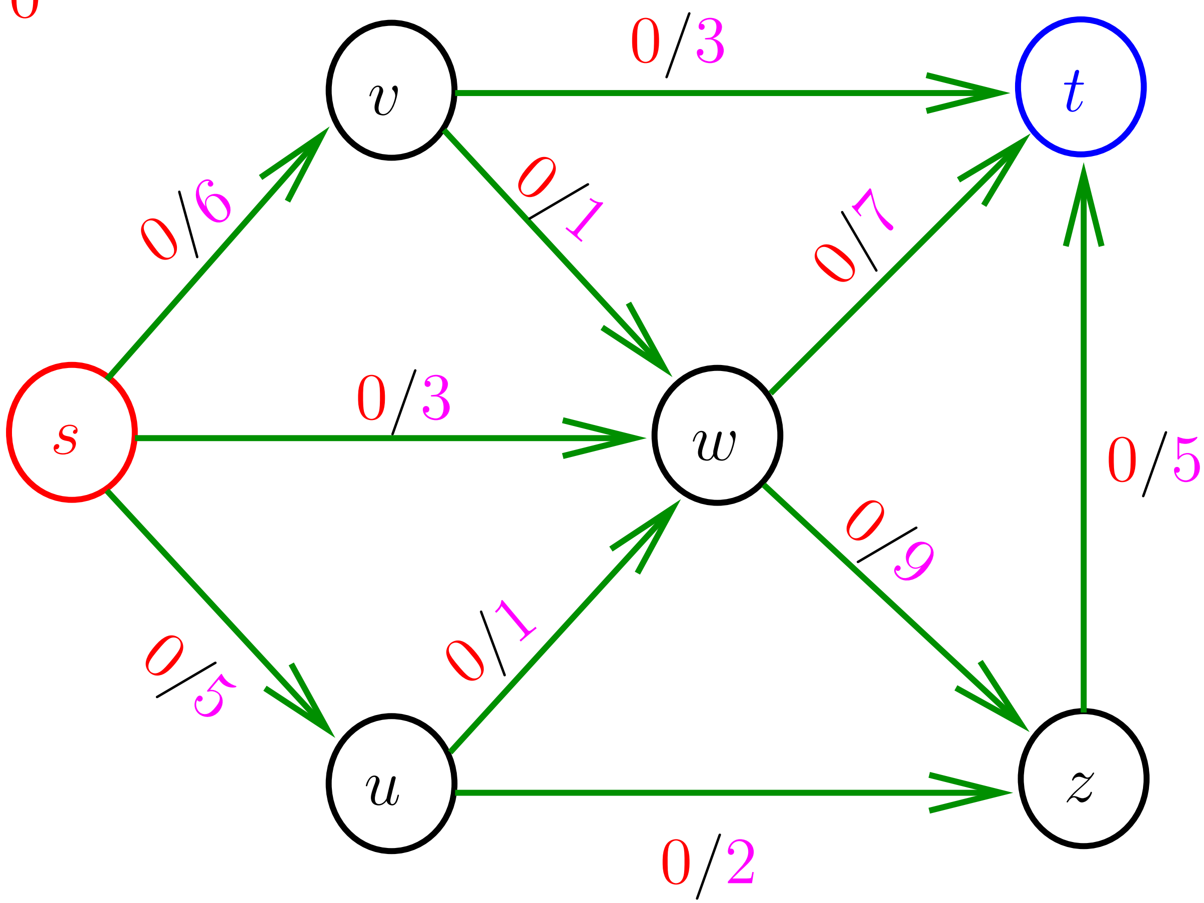
Método dos incrementos máximos

PASSO DE INCREMENTO: encontre na rede residual (do fluxo corrente) um caminho de capacidade residual máxima. Incremente o valor do fluxo “enviando a maior número de unidades de fluxo através do caminho”.

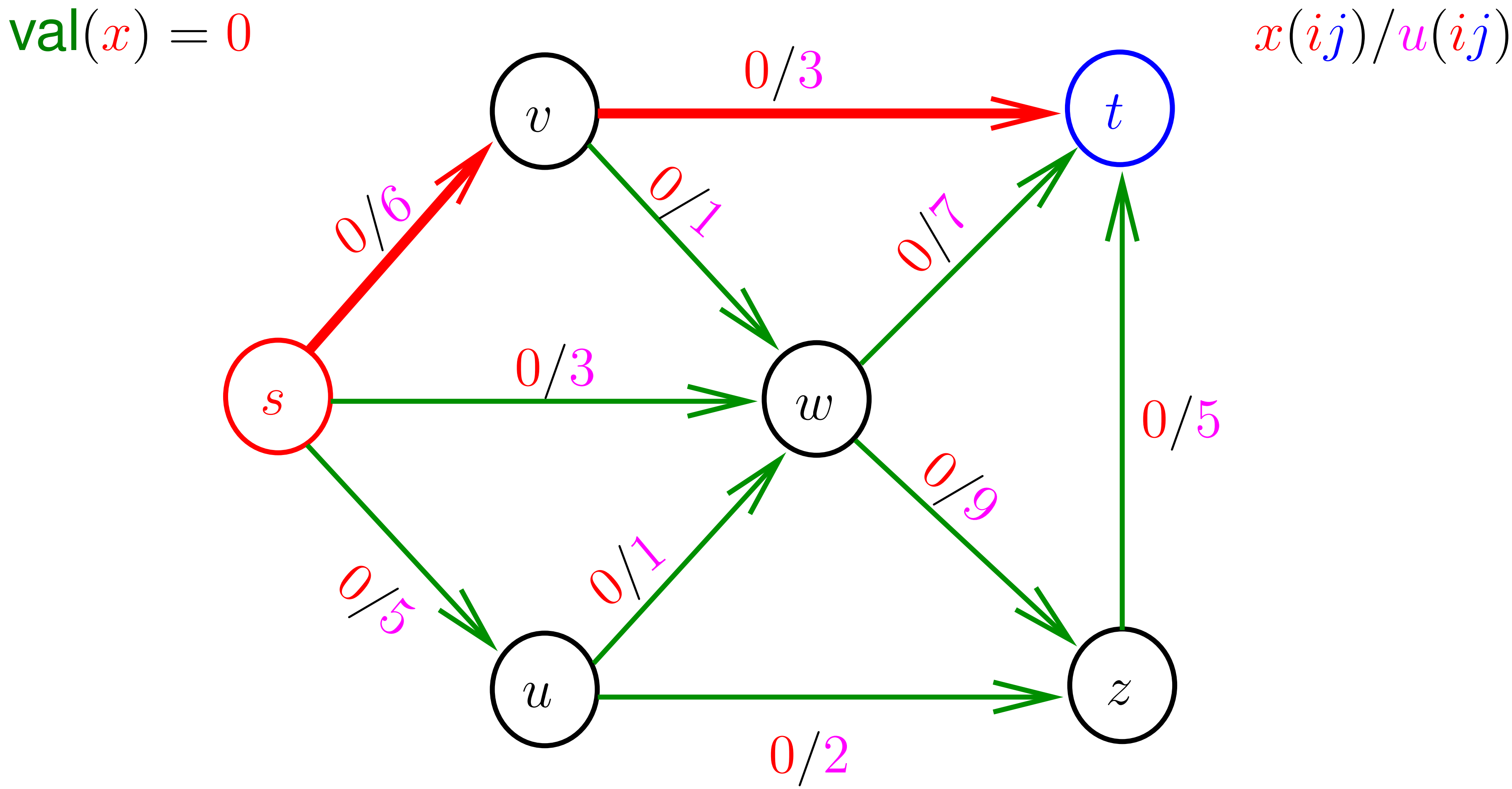
Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 0$

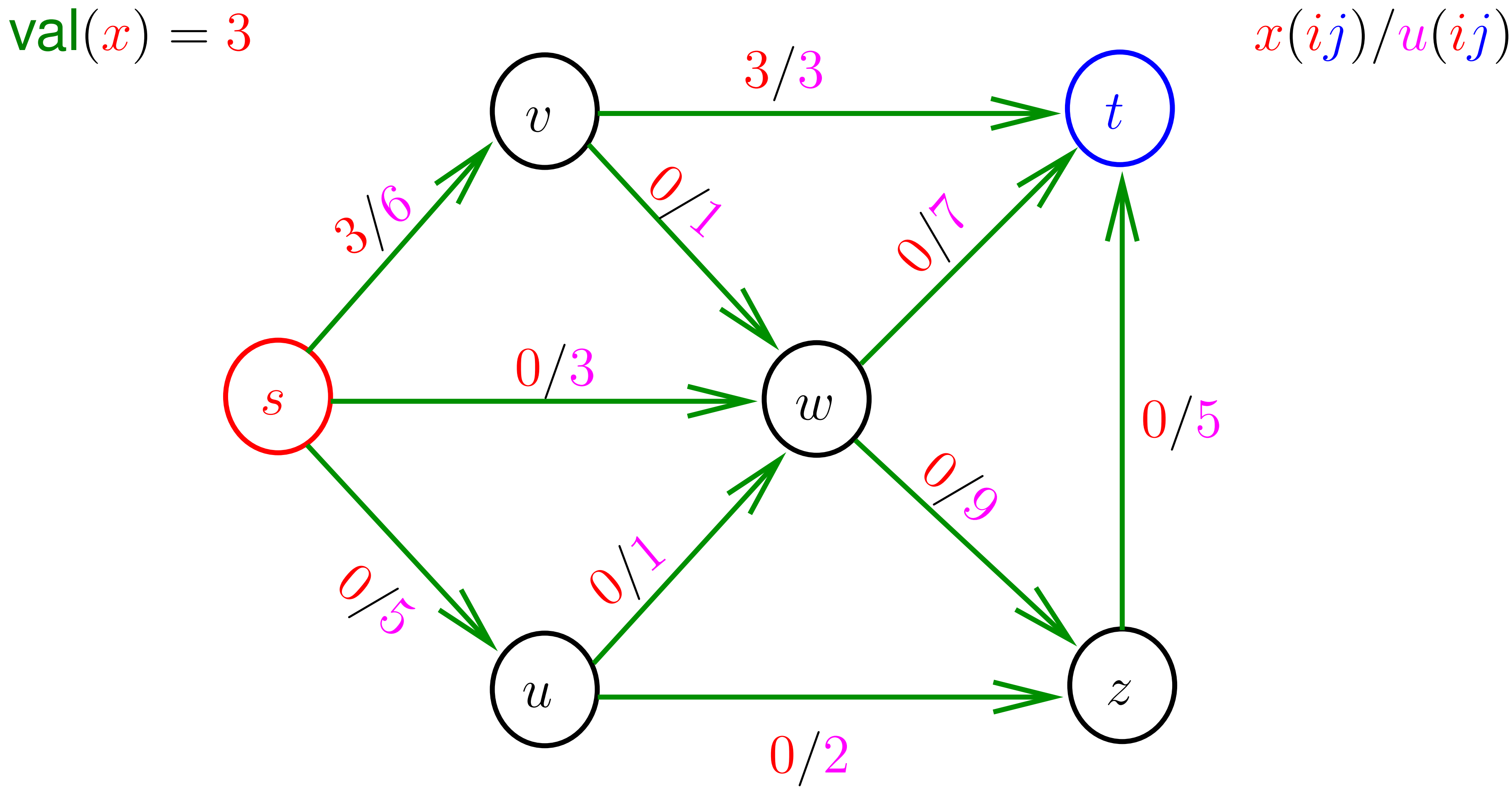
$x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos

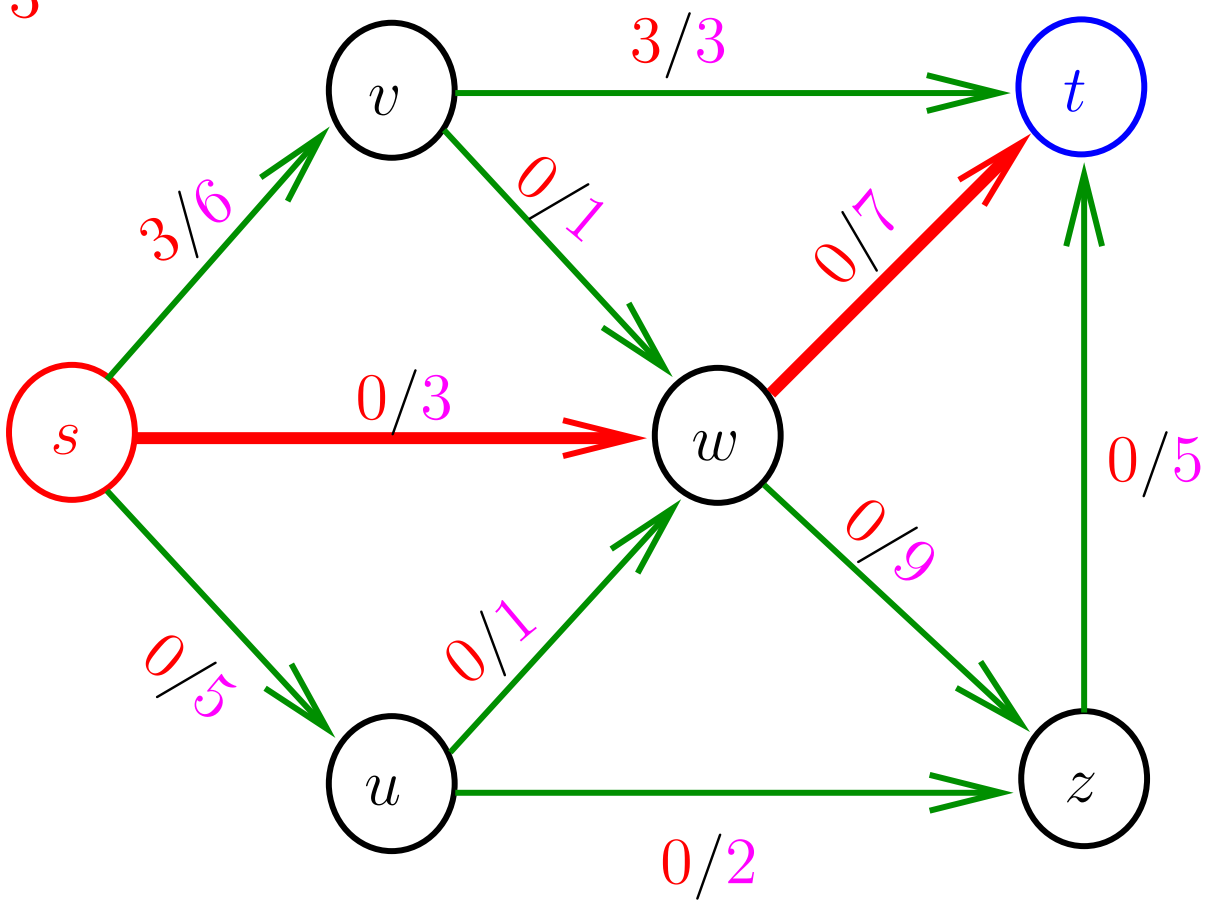


Método dos incrementos máximos



Método dos incrementos máximos

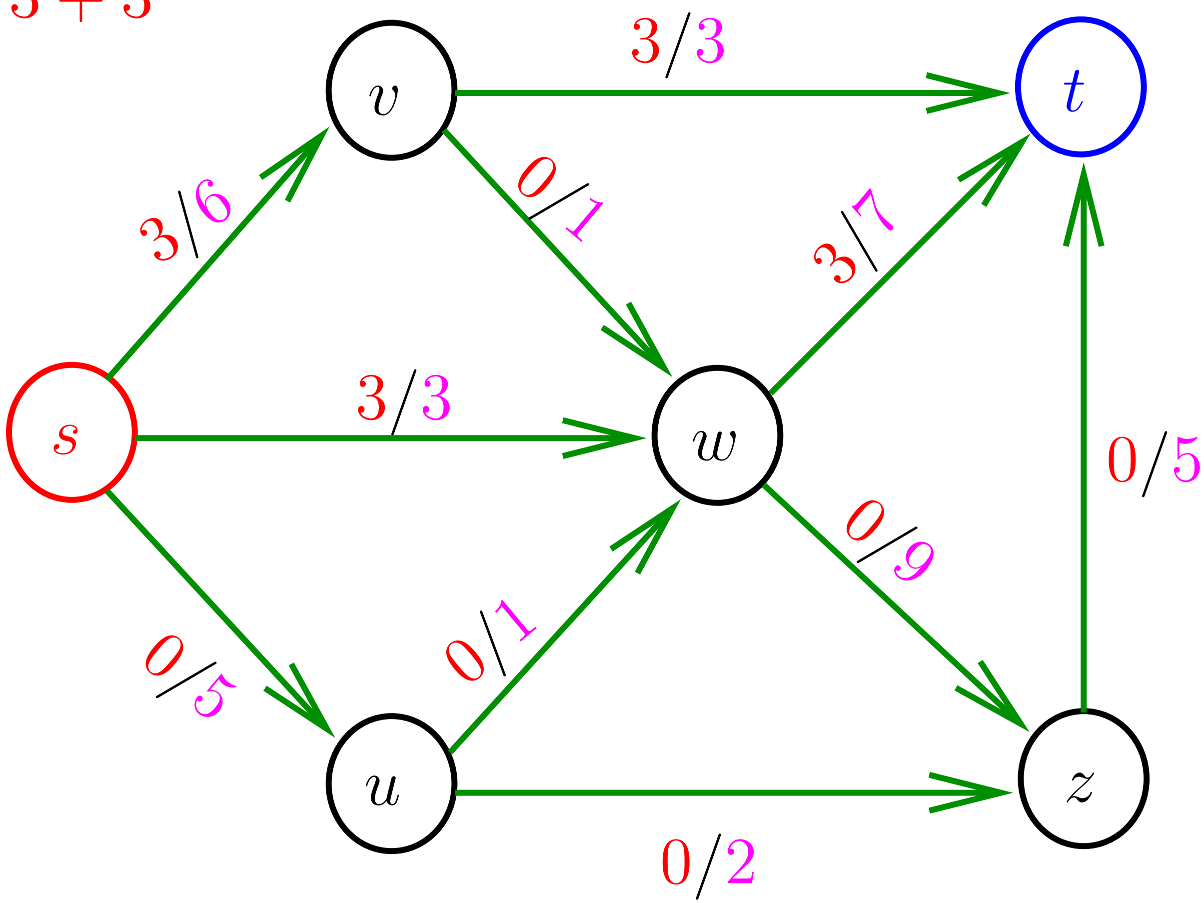
$\mathsf{val}(x) = 3$ $\qquad x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos

val$(x) = 3 + 3$

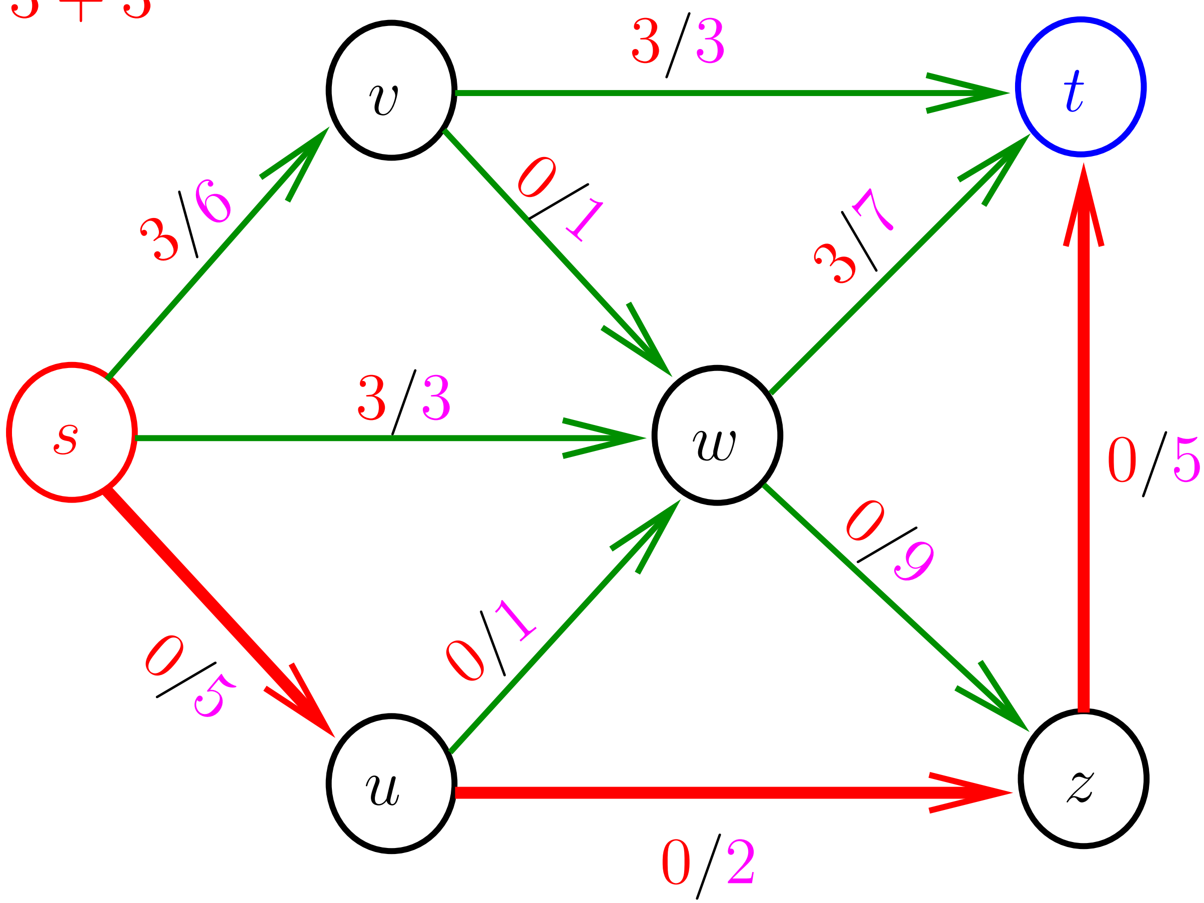
$x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos

val$(x) = 3 + 3$

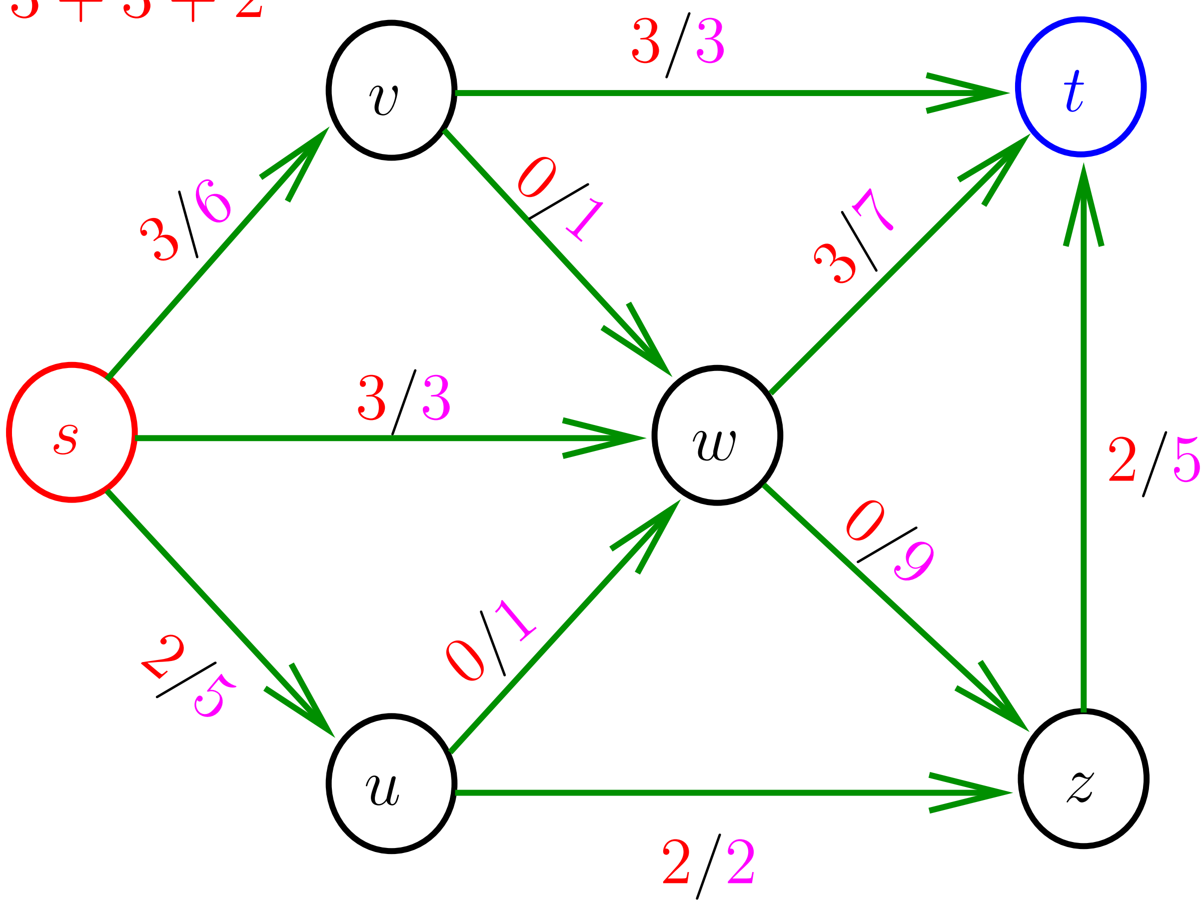
$x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2$

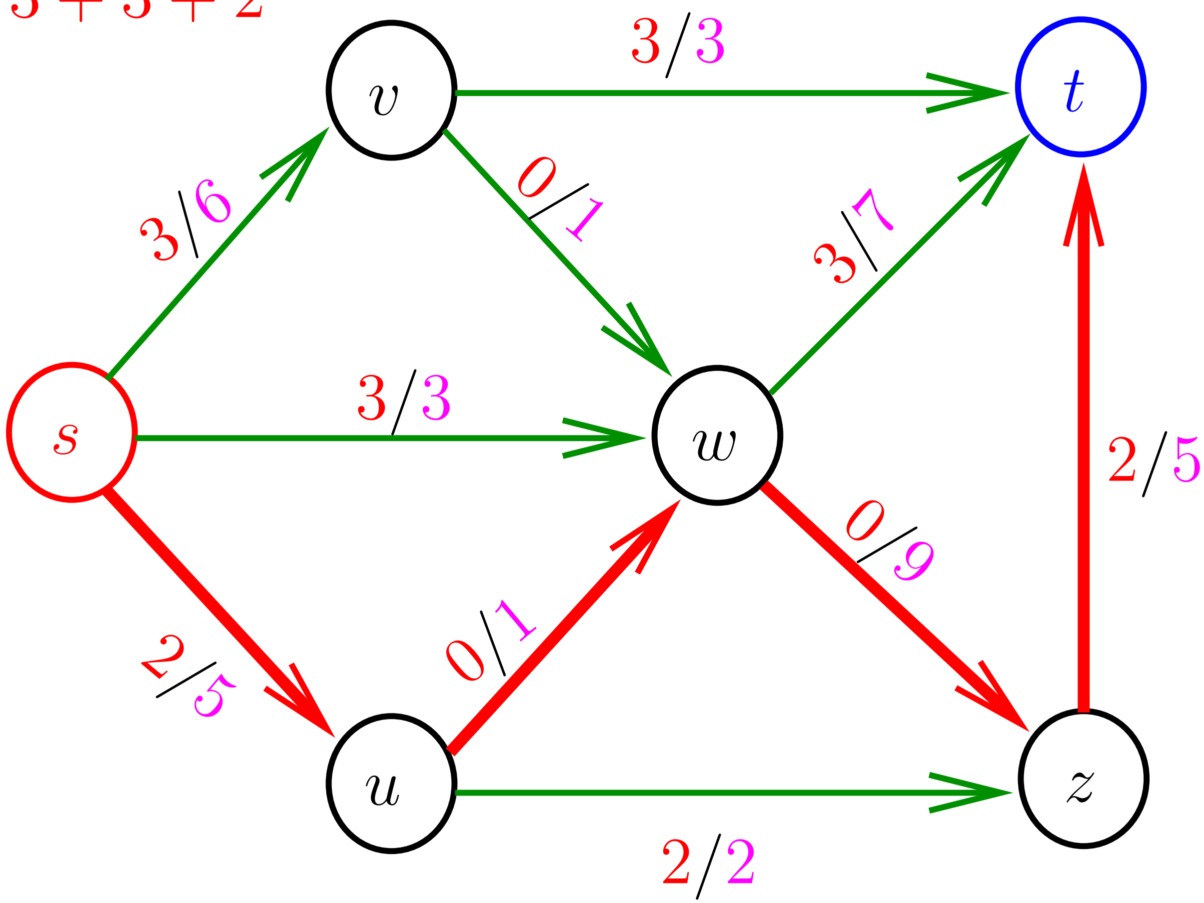
$x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos

$\text{val}(x) = 3 + 3 + 2$

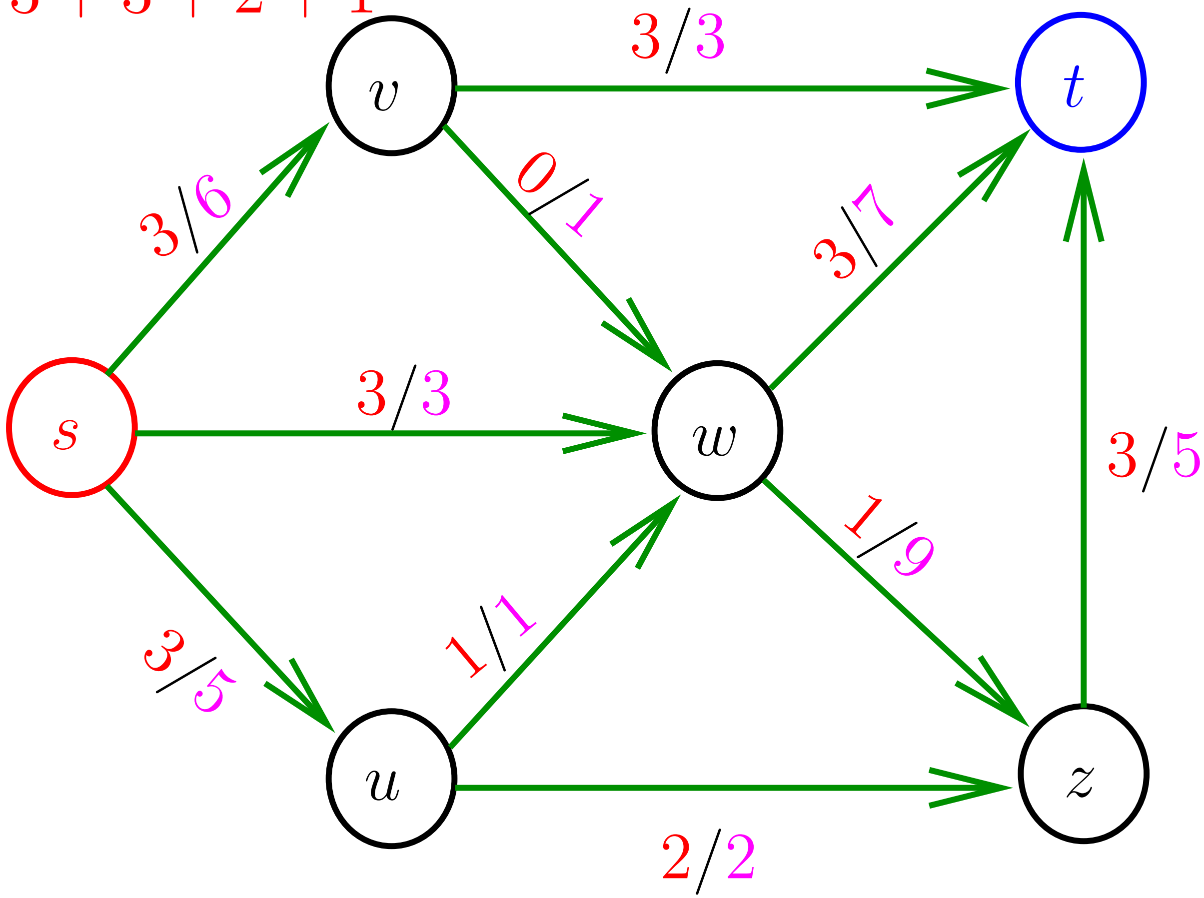
$x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1$

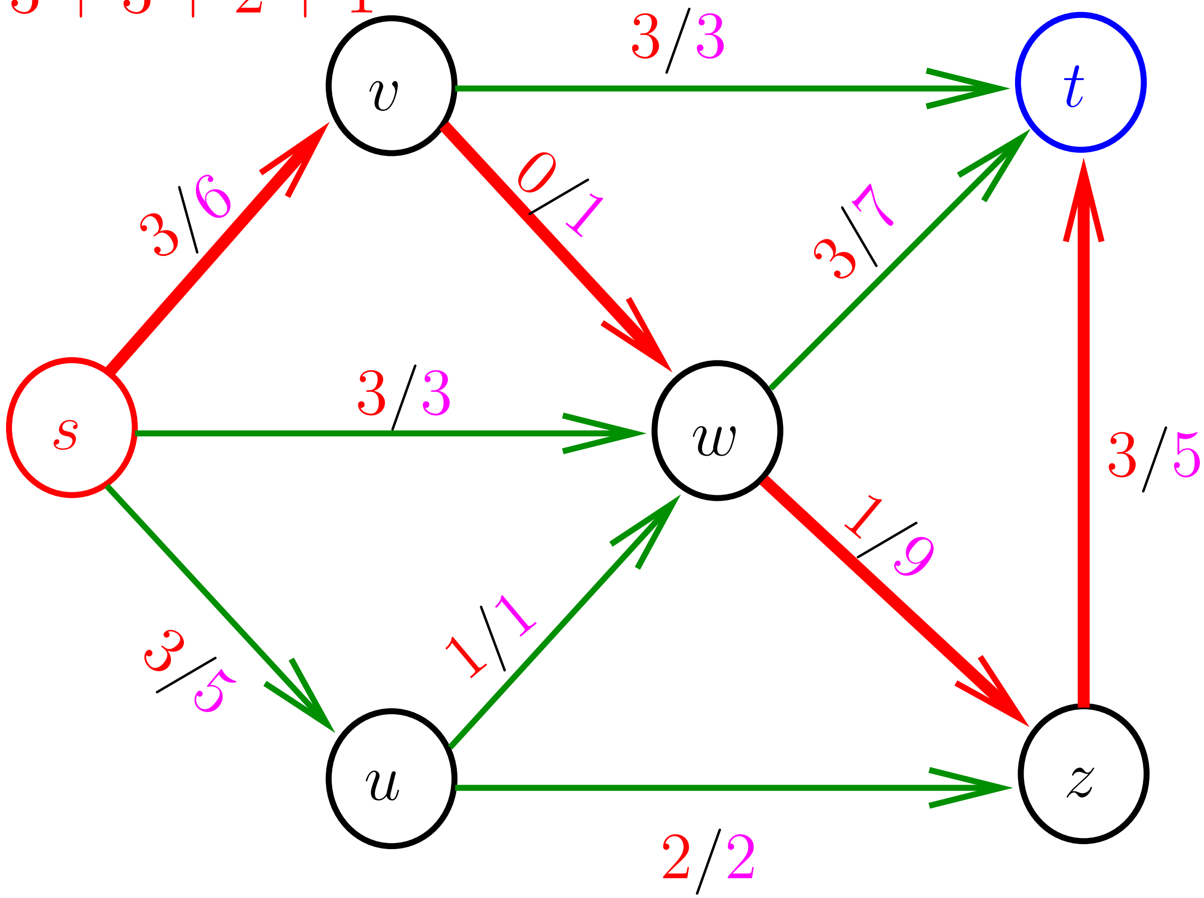
$x(ij)/u(ij)$



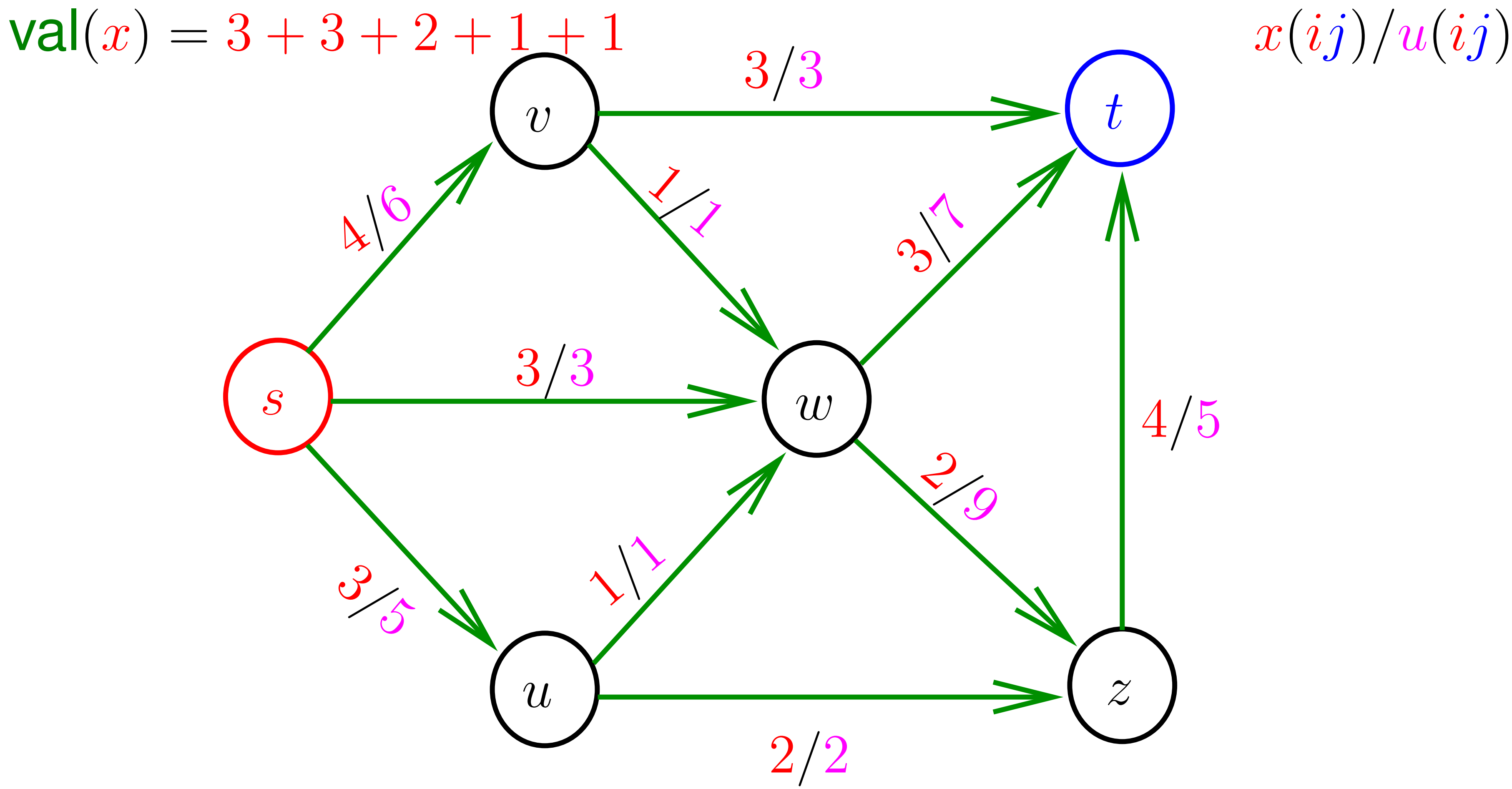
Método dos incrementos máximos

$\mathsf{val}(x) = 3 + 3 + 2 + 1$

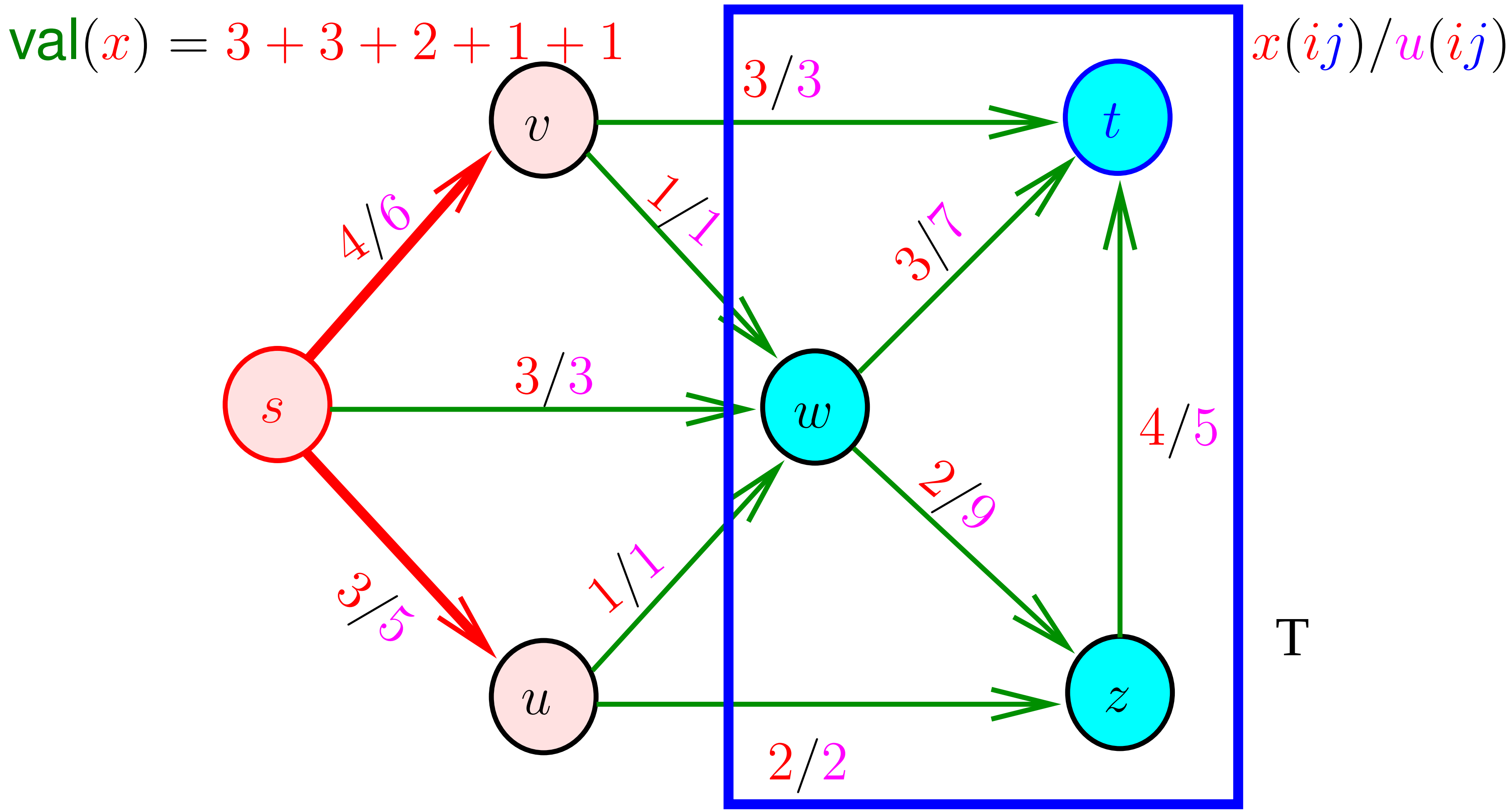
$x(ij)/u(ij)$



Método dos incrementos máximos



Método dos incrementos máximos



Lema da dualidade

Se que y é uma função potencial tal que

$$y(j) \leq \min\{y(i), u(ij)\}$$

para cada arcor ij e P é um caminho de s a t, então

$$y(t) \leq \min\{y(s), \min\{u(ij) : ij \text{ está em } P\}\}$$

Conseqüência

Se que y é uma função potencial tal que $y(s) = \infty$ e

$$y(j) \le \min\{y(i), u(ij)\}$$

para cada arcor ij e P é um caminho de s a t tais que

$$y(t) = \min\{y(s), \min\{u(ij) : ij \text{ está em } P\}\}$$

então P é um caminho de capacidade máxima.

Caminho de capacidade máxima

Uma pequena variante do algoritmo DIJKSTRA encontra caminhos de capacidade máxima.

CAMINHO-MAX-CAPACITY (N, A, u, s) $\quad \triangleright\ u \geq 0$

para cada i em N **faça**

$\quad y(i) \leftarrow 0 \quad \pi(i) \leftarrow \mathrm{NIL}$

$y(s) \leftarrow \infty$

$Q \leftarrow N$ $\quad \triangleright$ Q func. como uma fila com prioridades

enquanto $Q \neq \langle\rangle$ **faça**

$\quad$ retire de Q um nó i com $y(i)$ máximo

$\quad$ **para cada** ij em $A(i)$ **faça**

$\quad\quad$ **se** $y(j) < \min\{y(i), u(ij)\}$

$\quad\quad\quad$ **então** $y(j) \leftarrow \min\{y(i), u(ij)\}$

$\quad\quad\quad\quad \pi(j) \leftarrow i$

devolva π e y

Algumas invariantes

Na linha 5, antes da verificação da condição "$Q \neq \langle\rangle$" valem as seguintes invariantes:

(i0) para cada arco ij no grafo de predecessores tem-se $y(j) = \min\{y(i), u(ij)\}$ (igual!);

(i1) $\pi(s) = \text{NIL}$ e $y(s) = \infty$;

(i2) para cada nó j distinto de s, $y(j) > 0 \Leftrightarrow \pi(j) \neq \text{NIL}$;

(i3) para cada nó j, se $\pi(j) \neq \text{NIL}$ então existe um caminho de s a j no grafo de predecessores de capacidade $y(j)$;

(i4) se $y(j) > \min\{y(i), u(ij)\}$ para algum arco ij então i e j estão em Q.

Consumo de tempo

O número de iterações é $< n$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$\mathrm{O}(n)$
3	$\mathrm{O}(1)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$n\,\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$
6	$n\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n^2)$
7-10	$m\,\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(m)$
11	$\mathrm{O}(n)$

total $\mathrm{O}(1) + 4\,\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(m) + \mathrm{O}(n^2)$

$$= \mathrm{O}(n^2)$$

Conclusão

$\boxed{\text{O consumo de tempo do algoritmo CAMINHO-MAX-CAPACITY é } O(n^2).}$