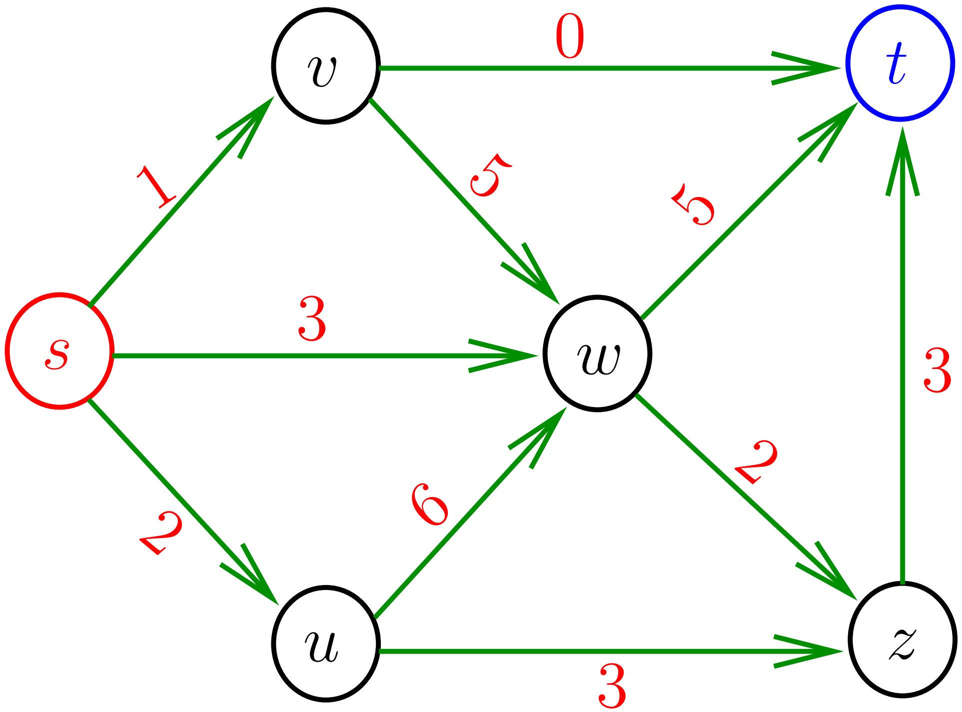
Melhores momentos

AULA PASSADA

Fluxos

Uma fluxo é uma função de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

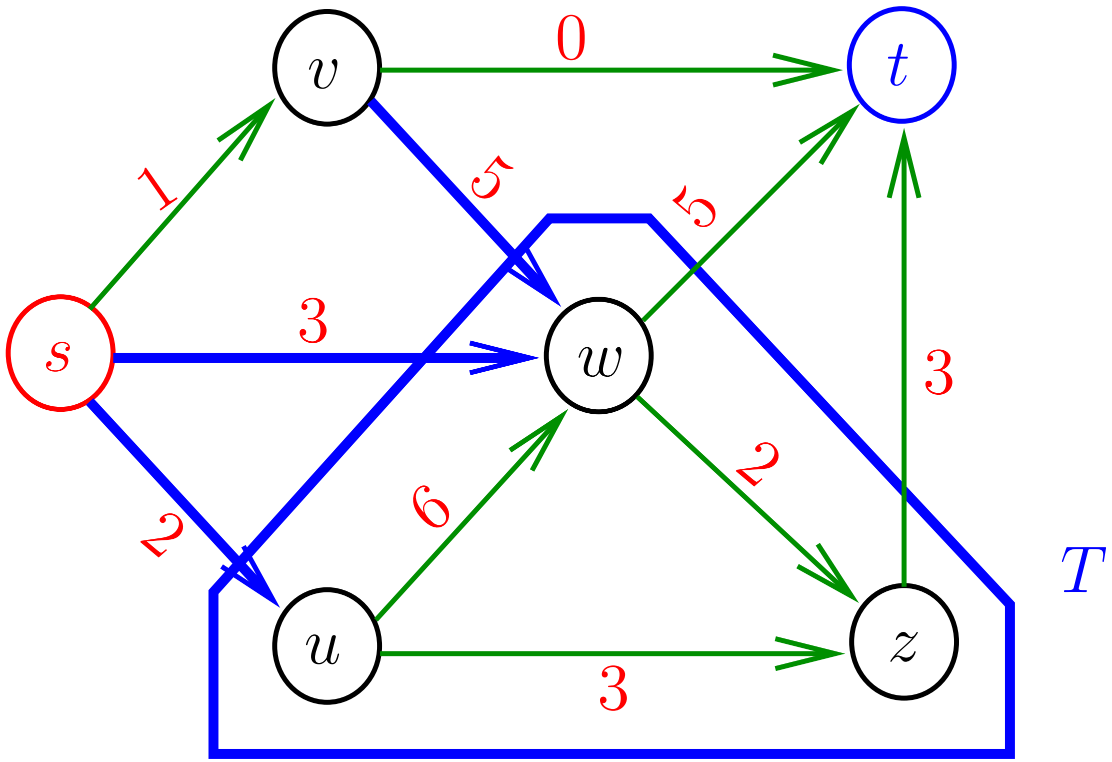


Excesso

Se x é um fluxo e T é uma parte de N então

$$x(\overline{T},T) := \sum(x(ij) : ij \in (\overline{T},T))$$

Exemplo: $x(\overline{T},T) = 2+3+5 = 10$

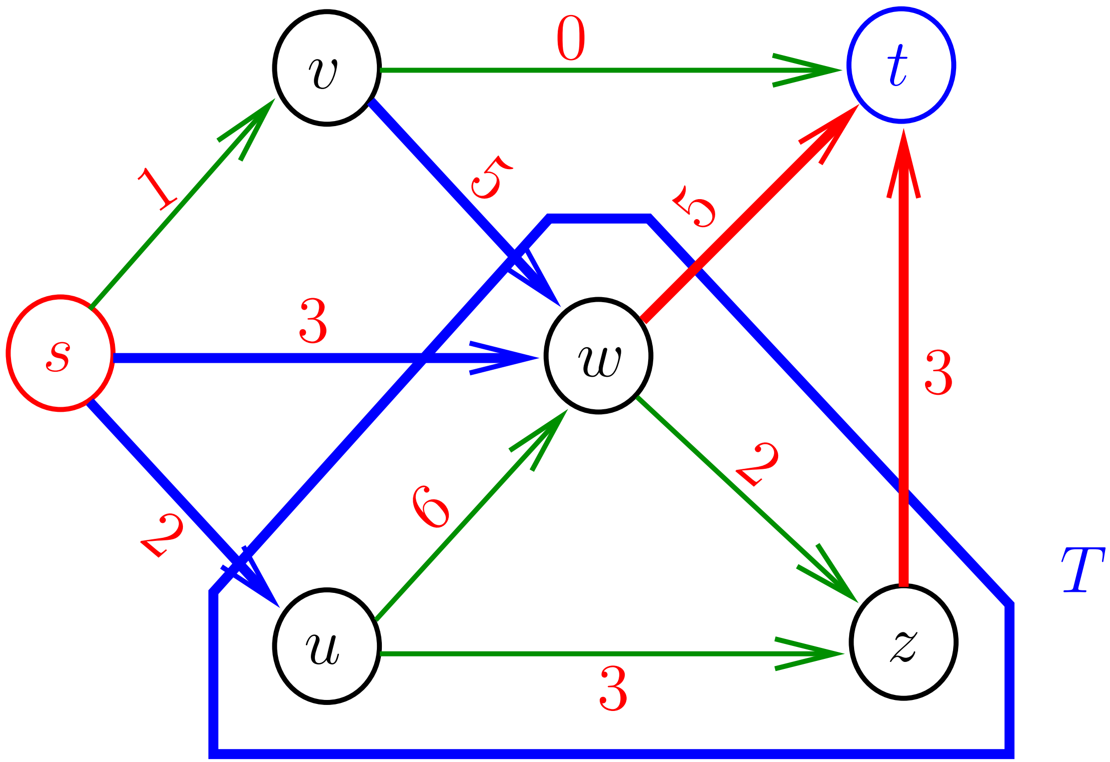


Excesso

O excesso ou acúmulo de x em T é a diferença entre o que entra em T e o que sai de T:

$$x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T})$$

Exemplo: $x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) = 10 - 8 = 2$

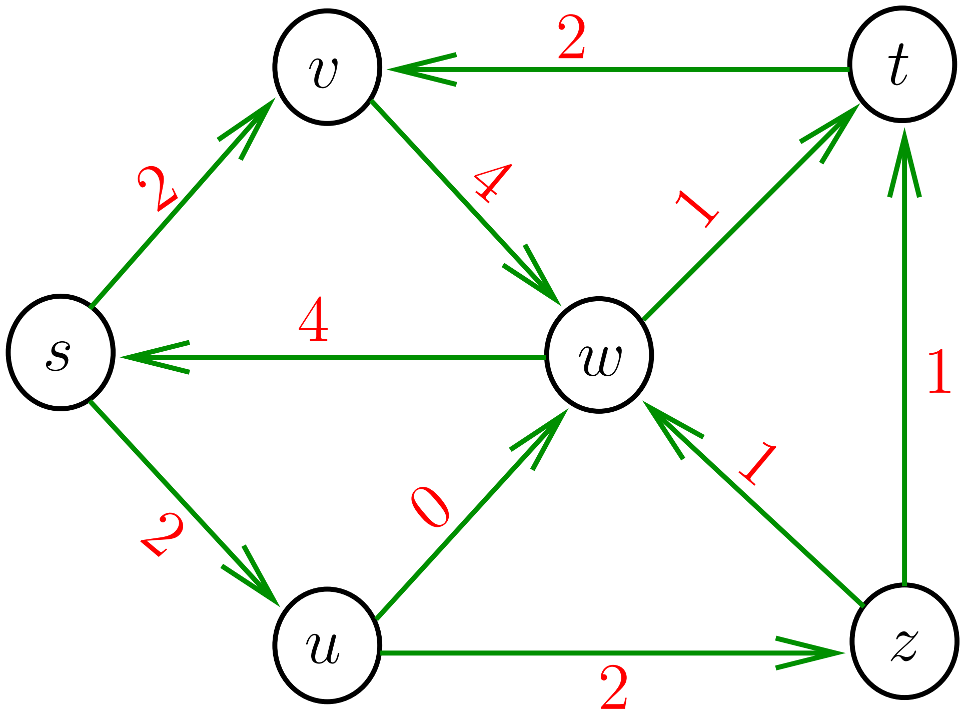


Circulação

Um circulação é qualquer fluxo x tal que

$$x(\bar{j}, j) = x(j, \bar{j})$$

para todo nó j.

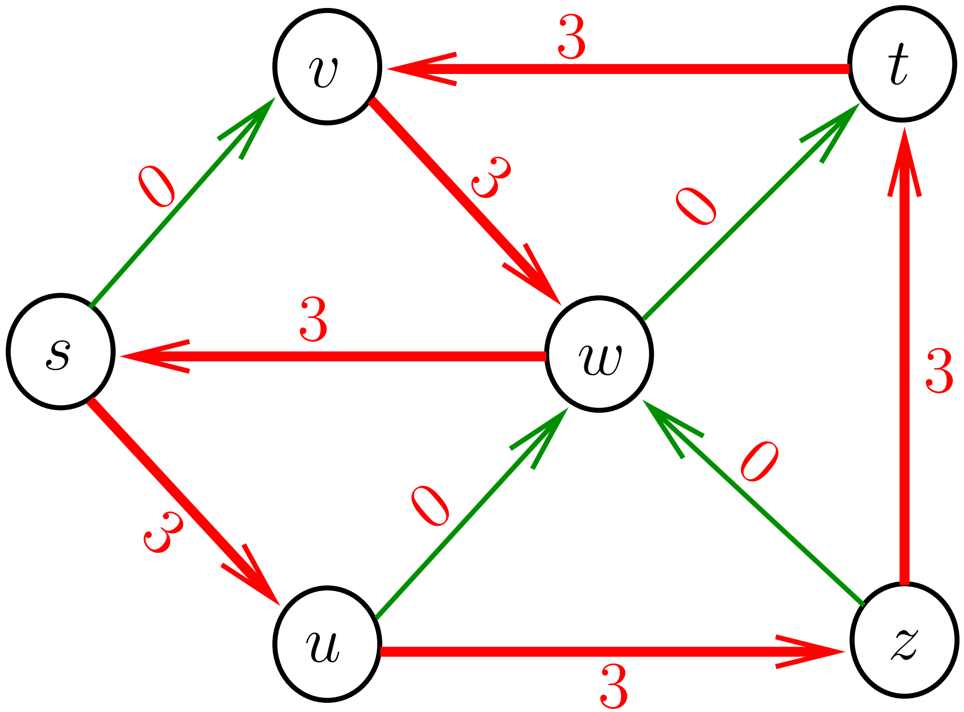


Circulações elementares

Se C é um ciclo e α é um inteiro não-negativo então

$$x(ij) := \begin{cases} \alpha & \text{se } C \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a circulação elementar definida por C e α.

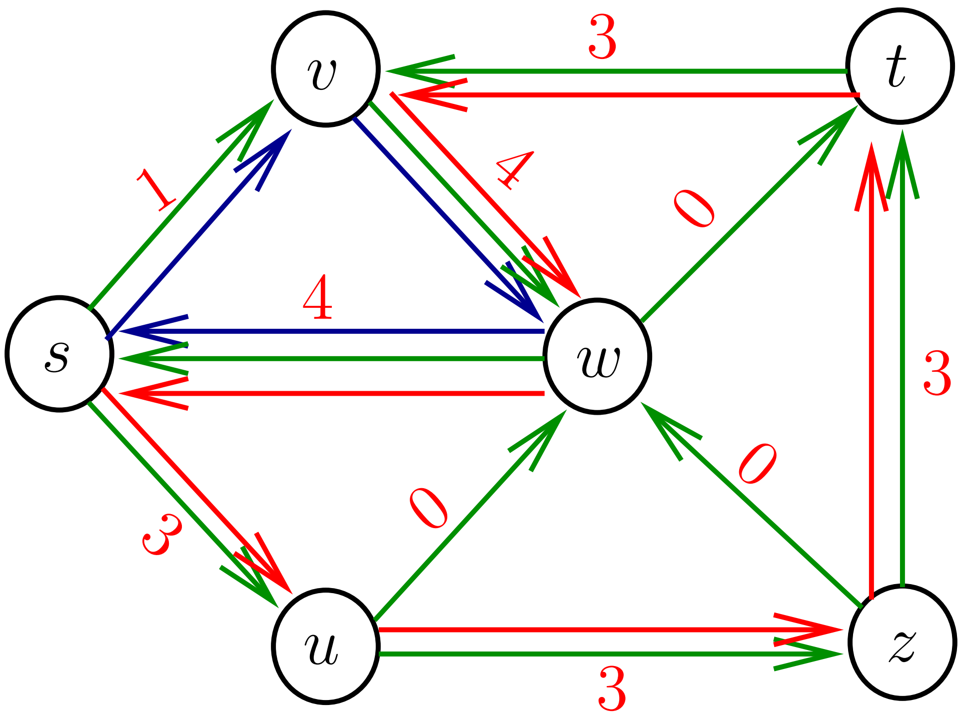


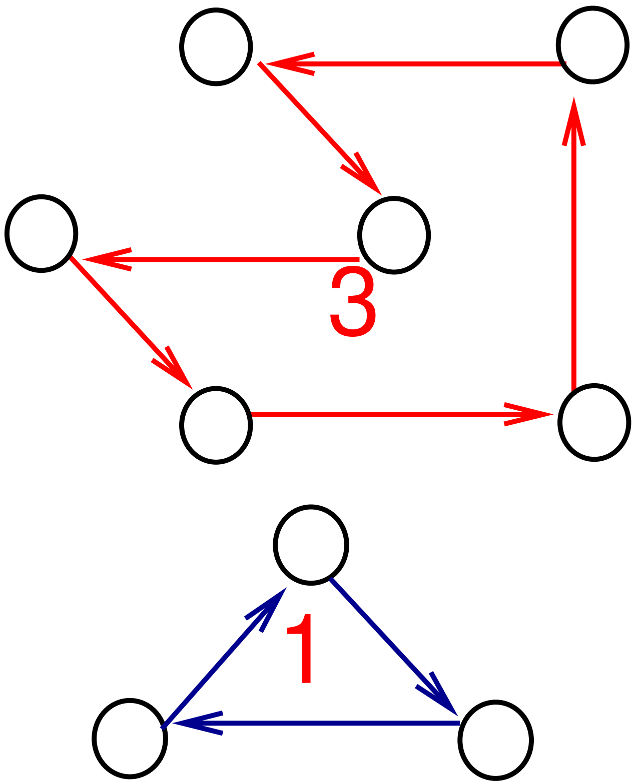
Decomposição de circulações

Se x é uma circulção então existe um coleção de ciclos $\mathcal{C}$ e $\lambda : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que $|\mathcal{C}| \leq m$ e

$$x(ij) = \sum(\lambda(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij.



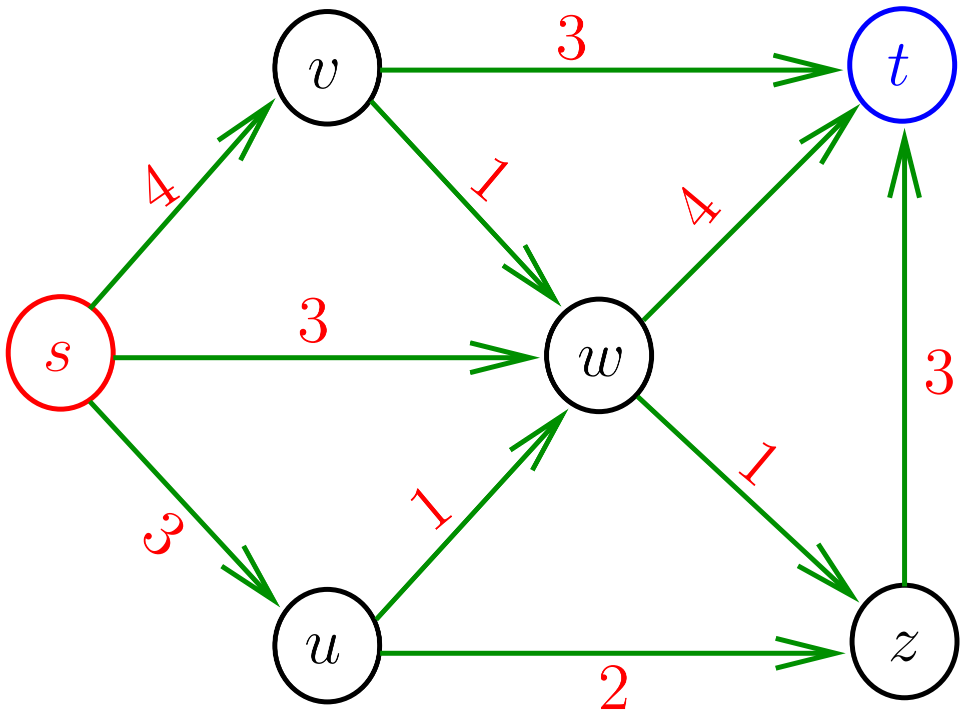


Fluxo entre dois nós

Um fluxo de s a t é qualquer fluxo x tal que

$$x(\bar{j}, j) - x(j, \bar{j}) = 0$$

para todo j em $N - \{s, t\}$.

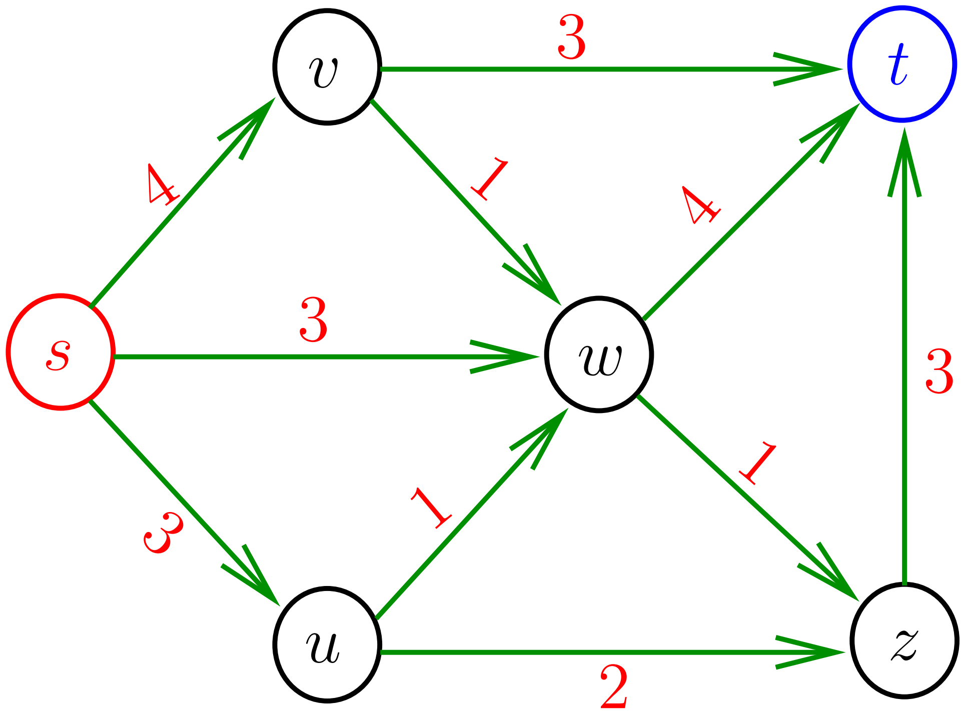


Valor de um st-fluxo

O valor de um st-fluxo x é

$$\mathsf{val}(x) := x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}).$$

Exemplo: $\mathsf{val}(x) = 3 + 3 + 4 - 0 = 10$

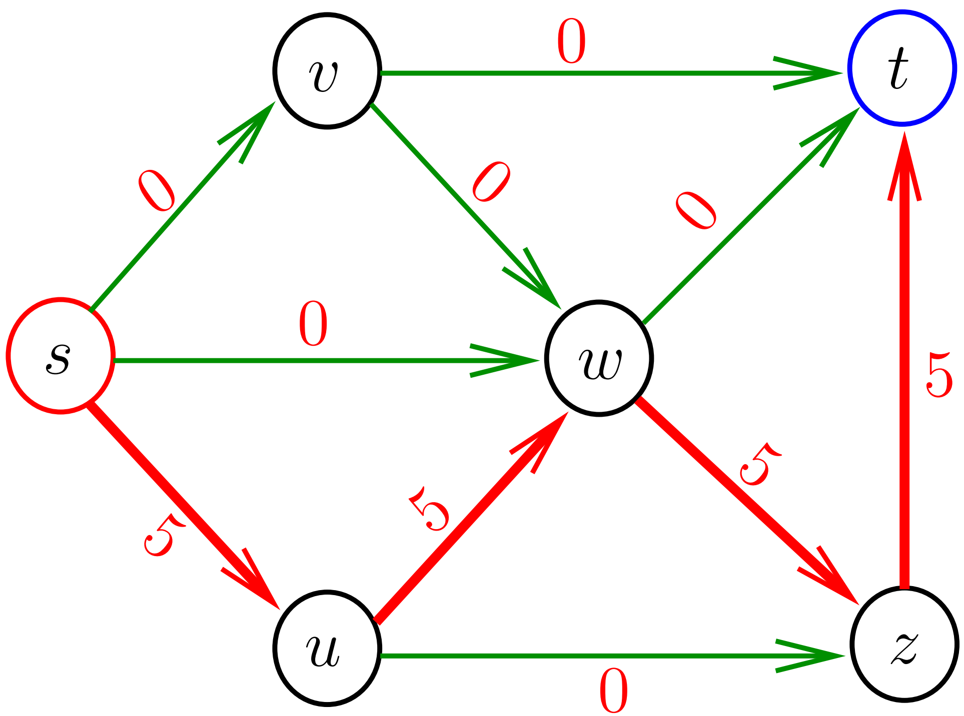


st-fluxos elementares

Se P é um st-caminho e α é um inteiro não-negativo então

$$x(ij) := \begin{cases} \alpha & \text{se } P \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a st-fluxo elementar definida por P e α.

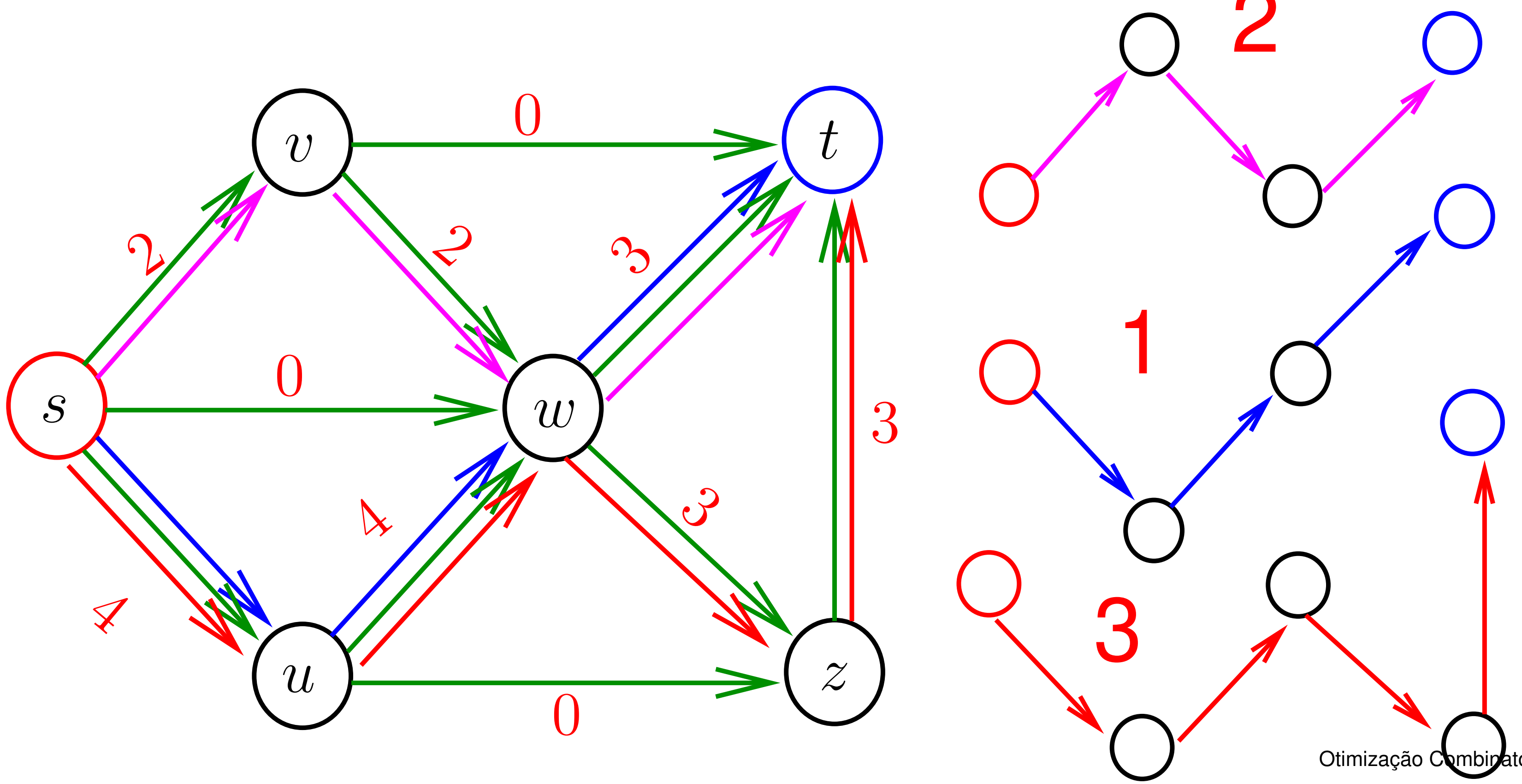


Decomposição de st-fluxos

Se x é uma st-fluxo então existe um coleção de st-caminhos $\mathcal{P}$, $|\mathcal{P}| \leq m$, e $\lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que o st-fluxo

$$x'(ij) := \sum(\lambda(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij 'representa' x: $x' \leq x$ e $\text{val}(x') = \text{val}(x)$.



Conseqüência

(Carathéodory) Se x é um st-fluxo então existem

- uma coleção $\mathcal{P}$ de st-caminhos
- uma função $\lambda_1 : \mathcal{P} \to \mathbb{Z}_{\geq}$
- uma coleção $\mathcal{C}$ de ciclos
- uma função $\lambda_2 : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_{\geq}$

tais que $|\mathcal{P} \cup \mathcal{C}| \leq m$ e

$$x(ij) = \sum(\lambda_1(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij) + \sum(\lambda_2(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cara arco ij.

AULA 9

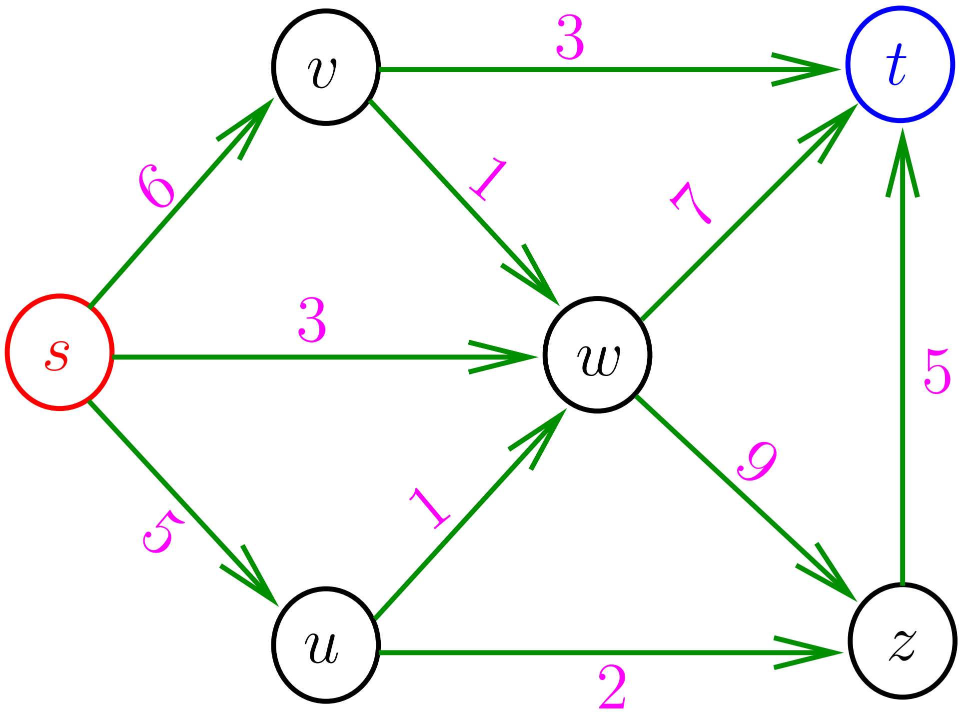
Fluxo máximo

PF 11.1, 11.2, 11.3

Capacidades

Uma função-capacidade em uma grafo (N, A) é qualquer função de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$:

$$u : A \to \mathbb{Z}_{\geq} \; .$$

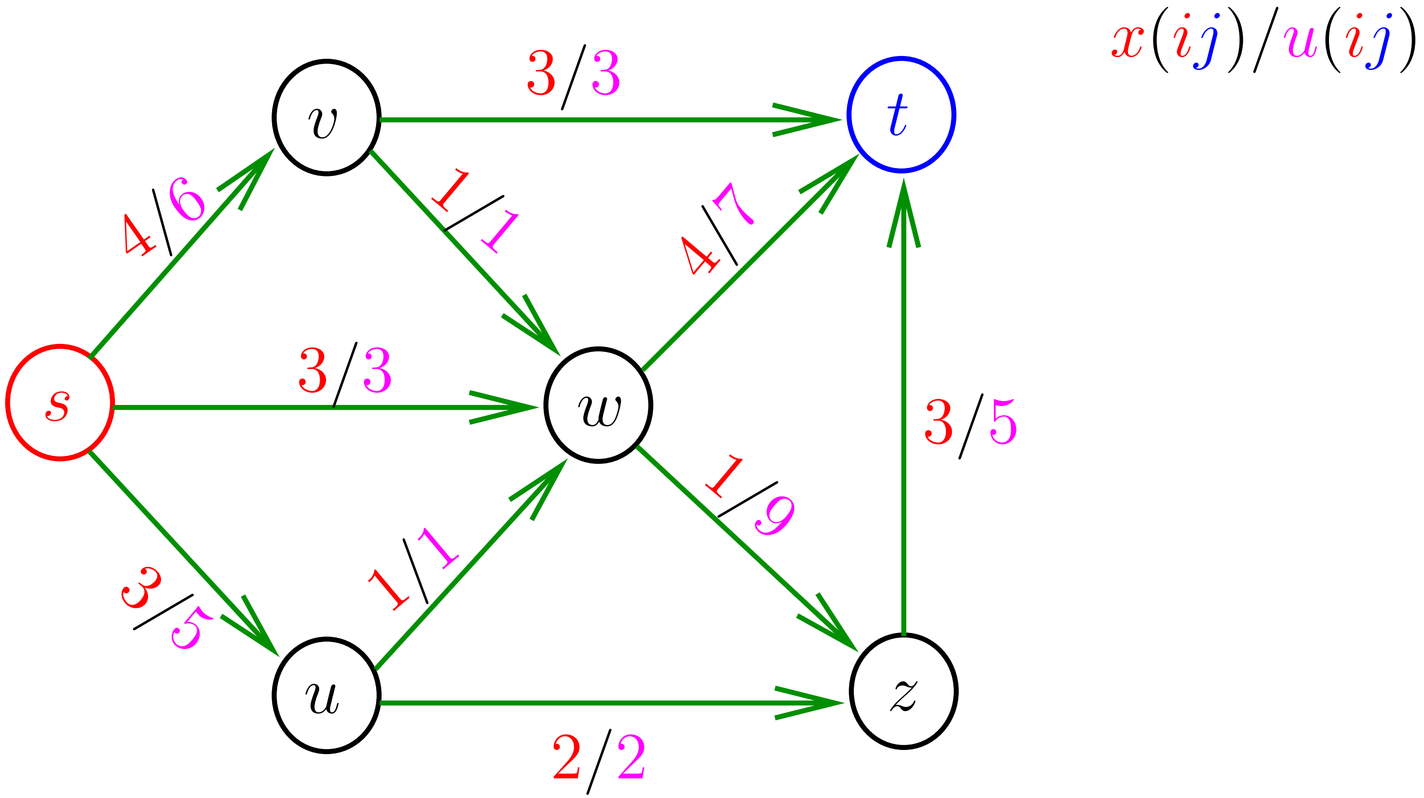


Capacidades

Uma função x de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$ respeita u de $x \leq u$:

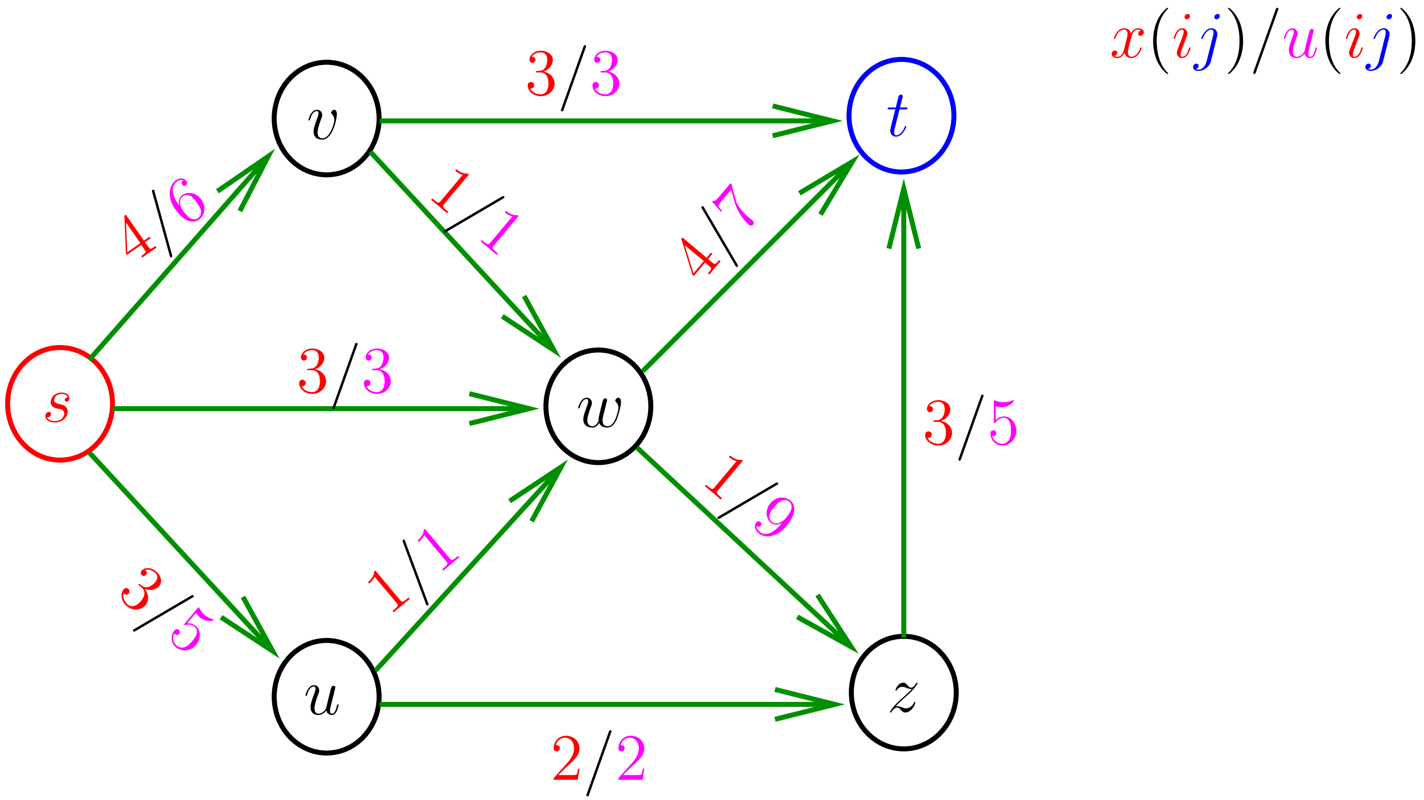
$$x(ij) \leq u(ij),$$

para cada arco ij.



Problema

Problema do fluxo máximo: Dados nós s e t de uma rede (N, A, u) com função-capacidade u, encontrar um st-fluxo que repeite u e tenha valor máximo.



Fluxo máximo (problema primal)

Podemos supor que a rede (N, A, u) possui um arco ts de capacidade $+\infty$. (Exercício 11.1)

O problema do fluxo máximo é equivalente ao seguinte programa linear, que chamamos de primal: encontrar um vetor x indexado por A que

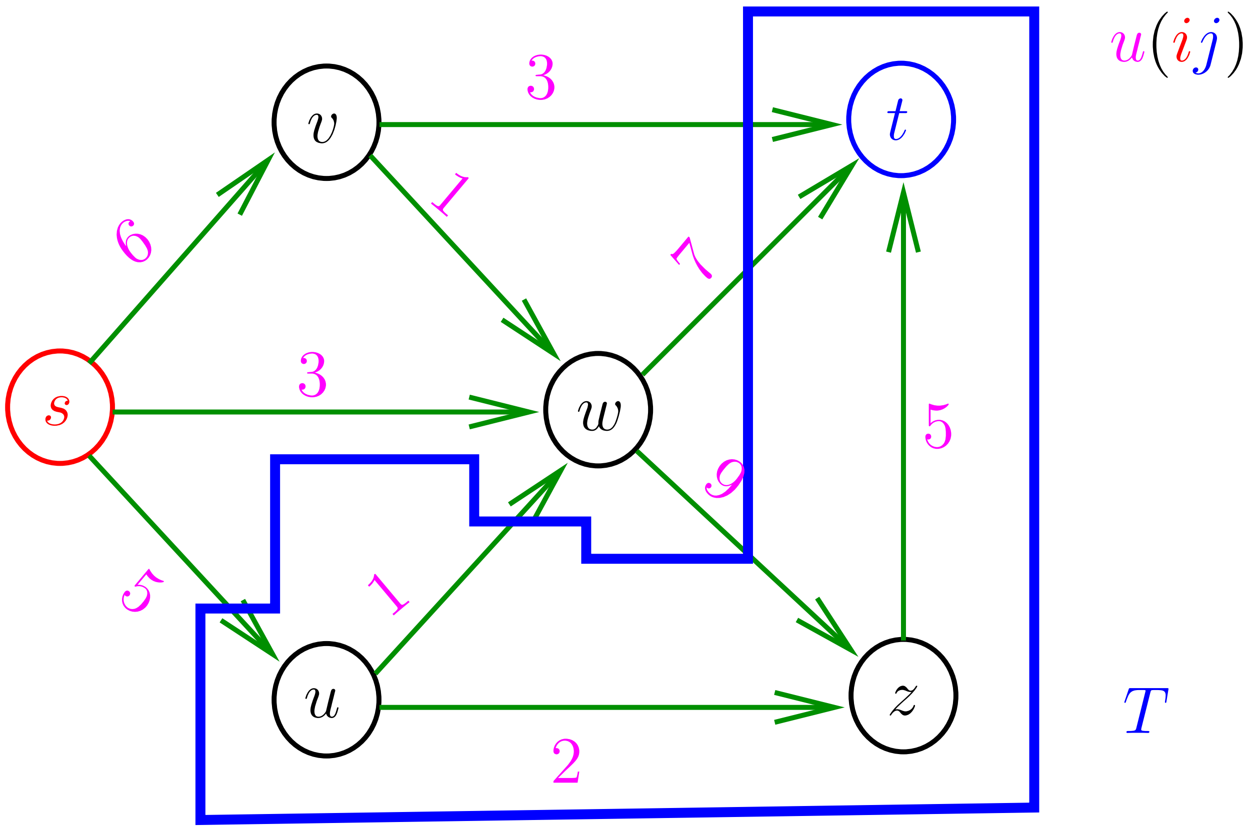
$$\begin{array}{rrcll}
\text{maximize} & x(ts) & & & \\
\text{sob as restrições} & x(\bar{j}, j) - x(j, \bar{j}) & = & 0 & \text{para cada } j \in N, \\
 & x(ij) & \leq & u(ij) & \text{para cada } ij \in A, \\
 & x(ij) & \geq & 0 & \text{para cada } ij \in A.
\end{array}$$

Gargalo

A capacidade de um corte $\nabla(\overline{T}, T)$ é o número

$$u(\overline{T}, T) := \sum(u(ij) : ij \in \nabla(\overline{T}, T))$$

Exemplo: capacidade de $\nabla(\overline{T}, T)$ é $3 + 7 + 9 + 5 = 24$

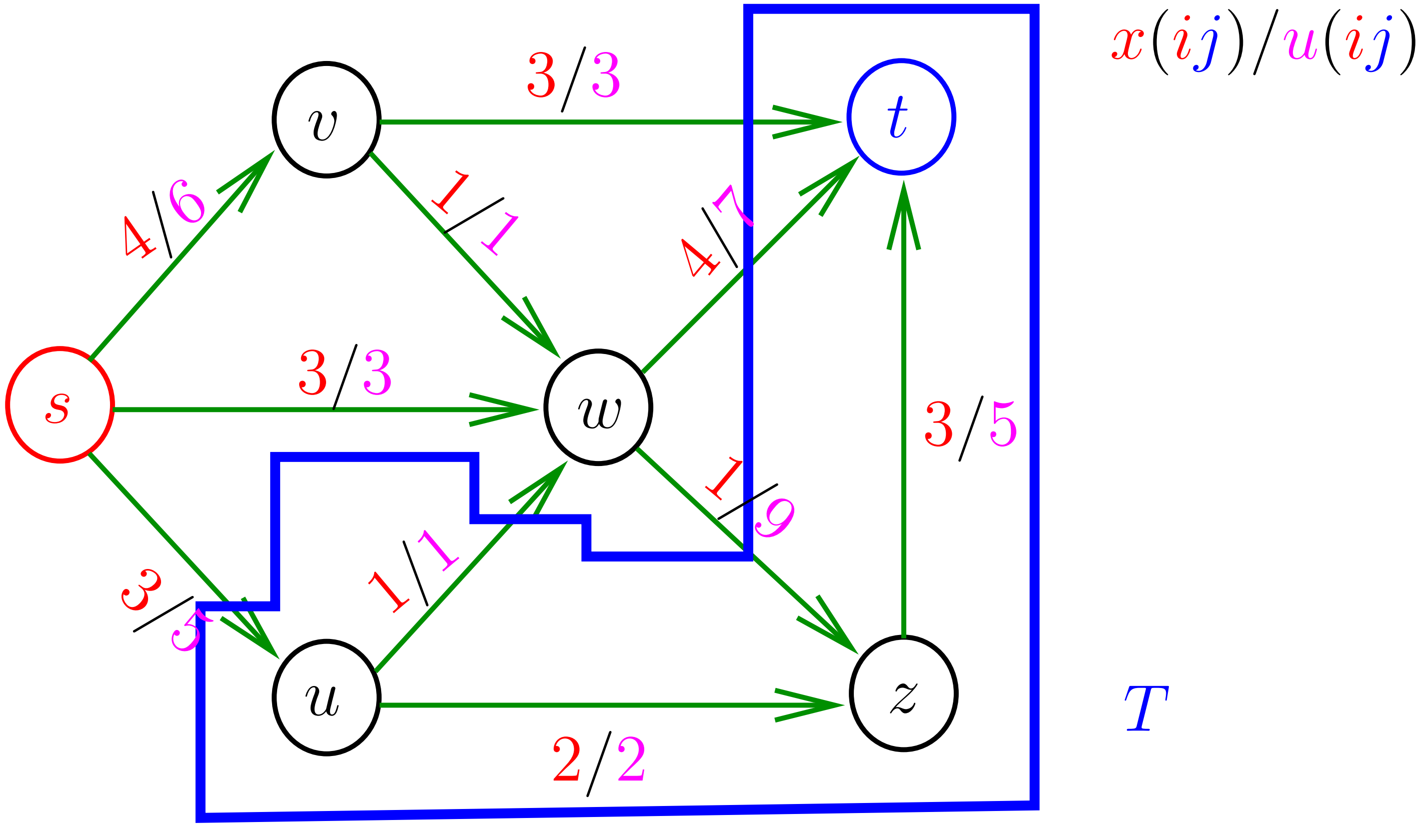


Lema da dualidade

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte então

$$\text{val}(x) \leq u(\overline{T}, T).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 10 \leq 11 = u(\overline{T}, T)$.



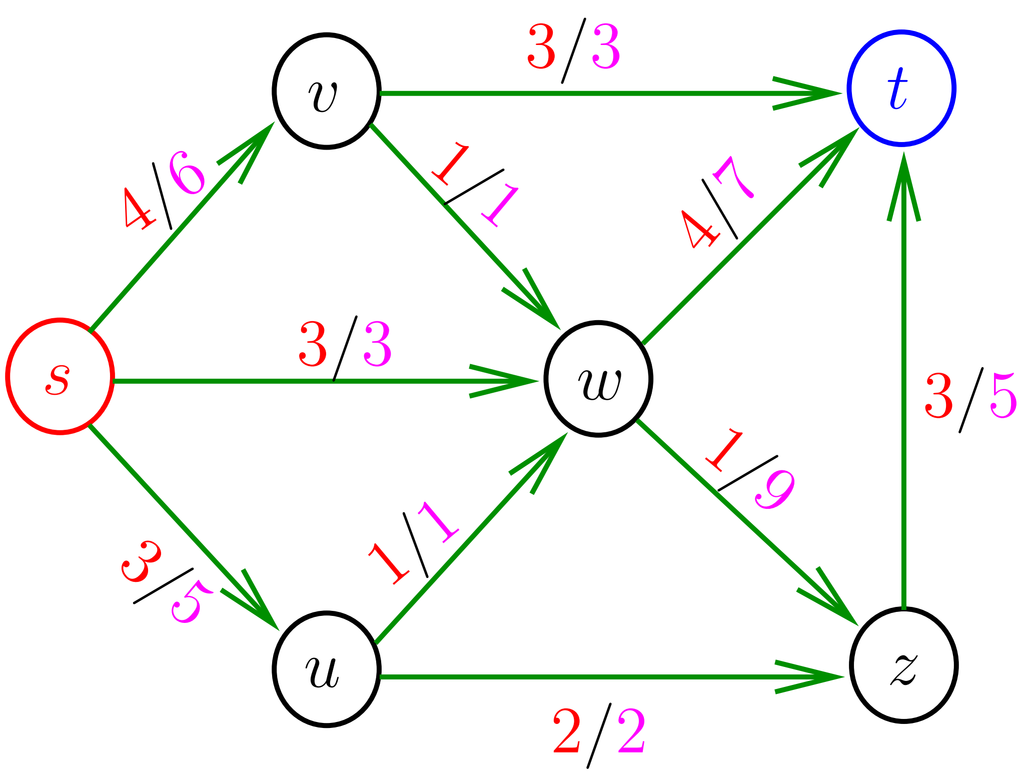
Conseqüência

Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.

$x(ij)/u(ij)$

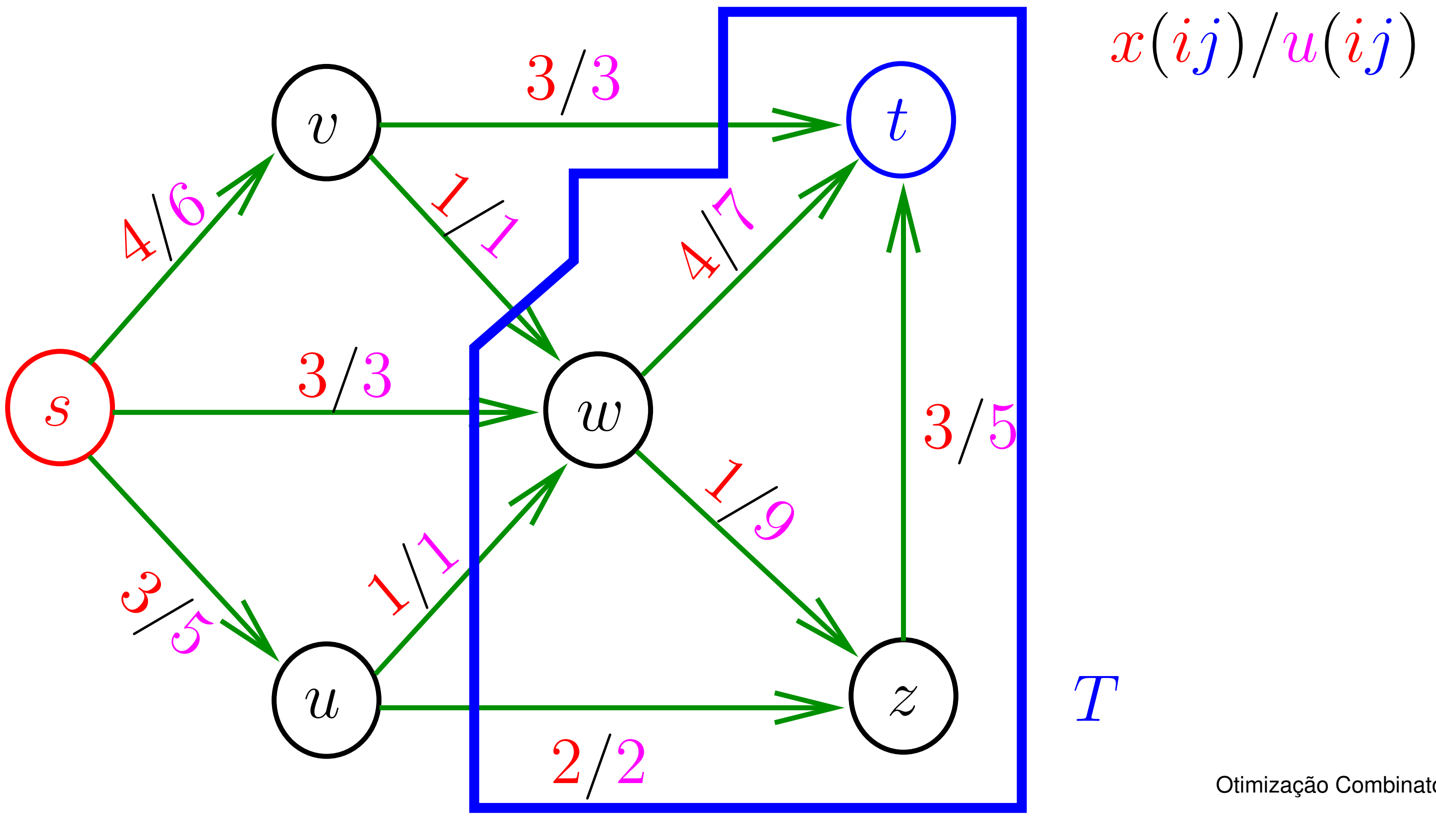


Conseqüência

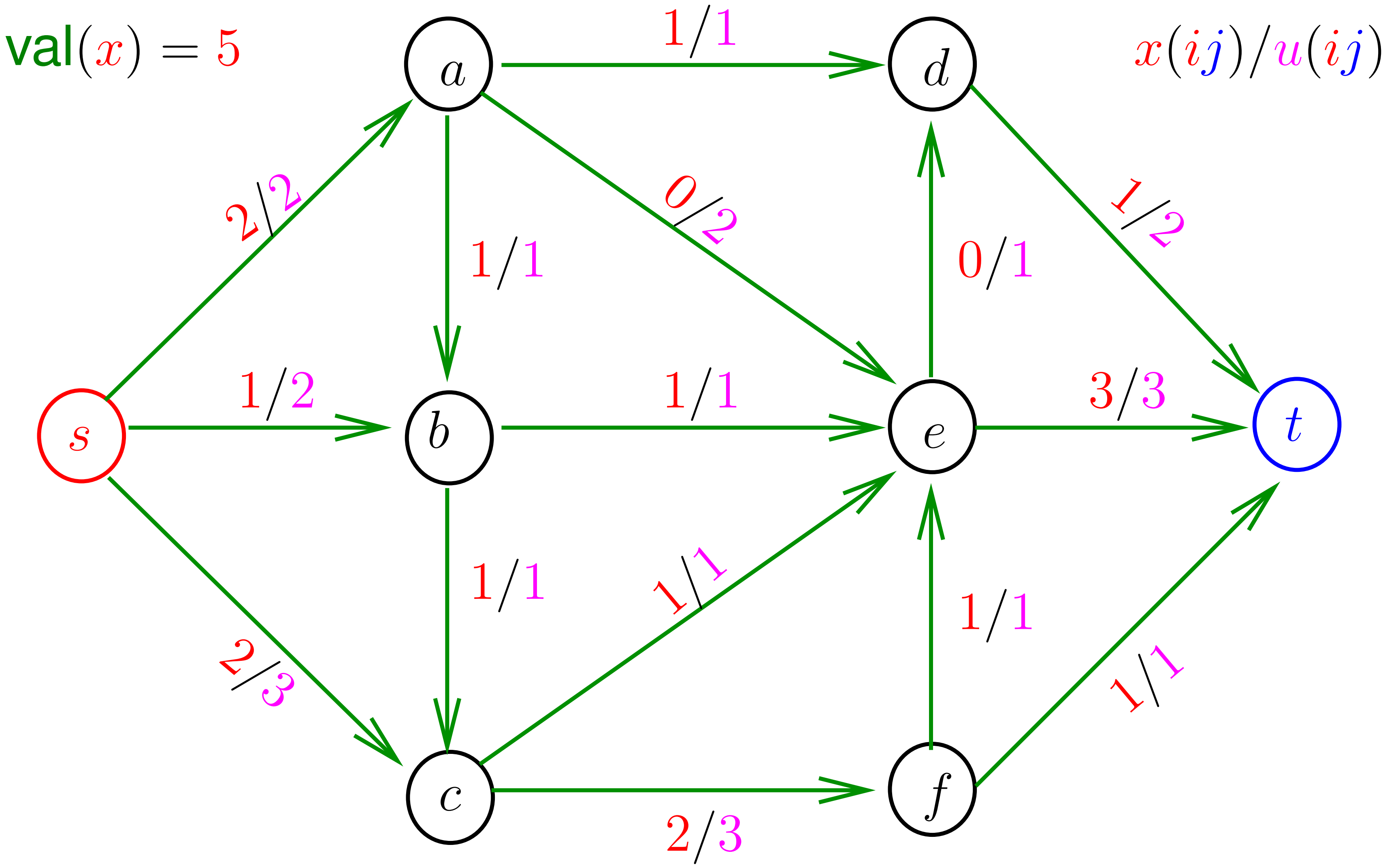
Se x é um st-fluxo que respeita u e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte tais que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

então x é um st-fluxo de valor máximo e $\nabla(\overline{T}, T)$ é um st-corte de capacidade mínima.

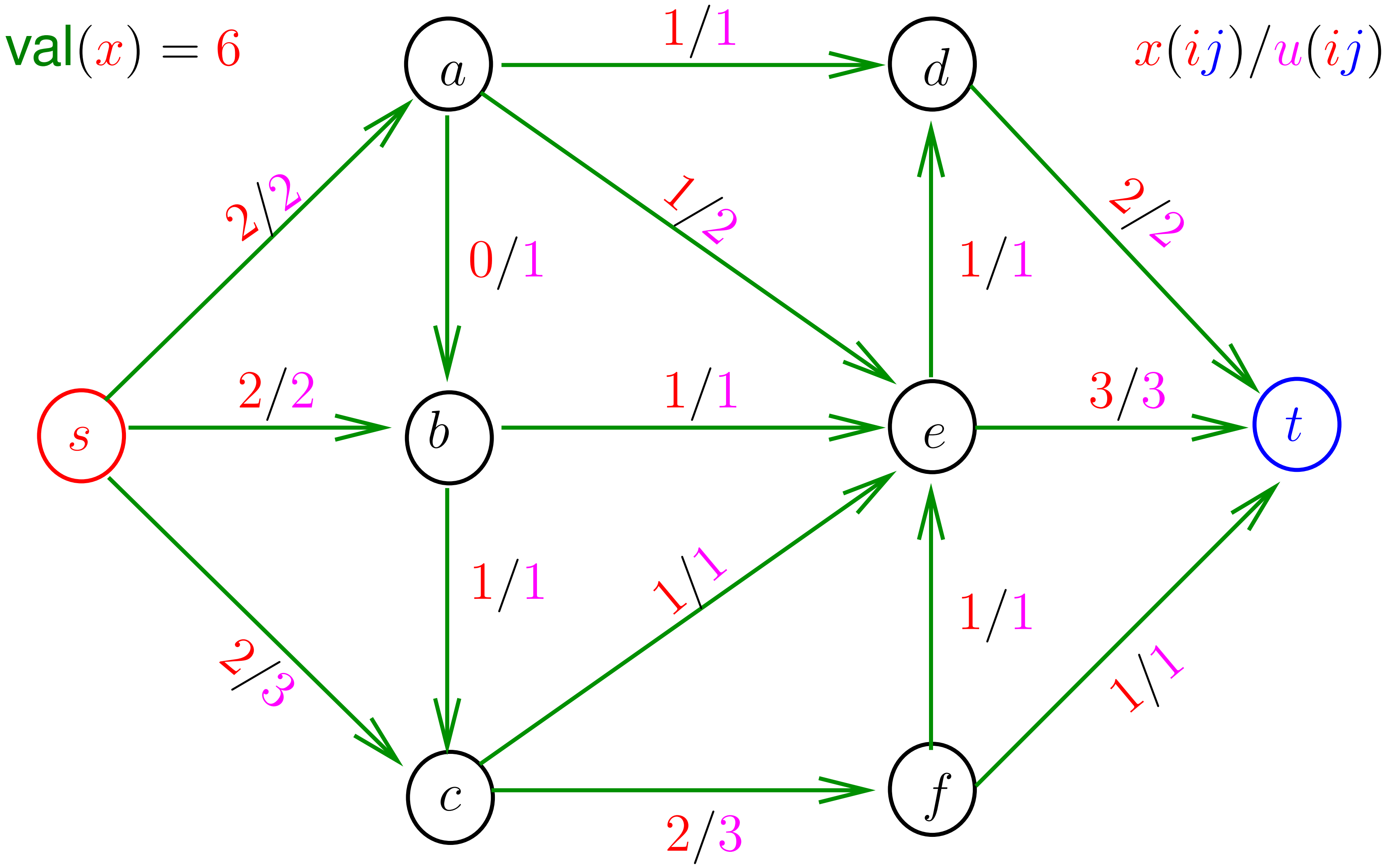


x é máximo?

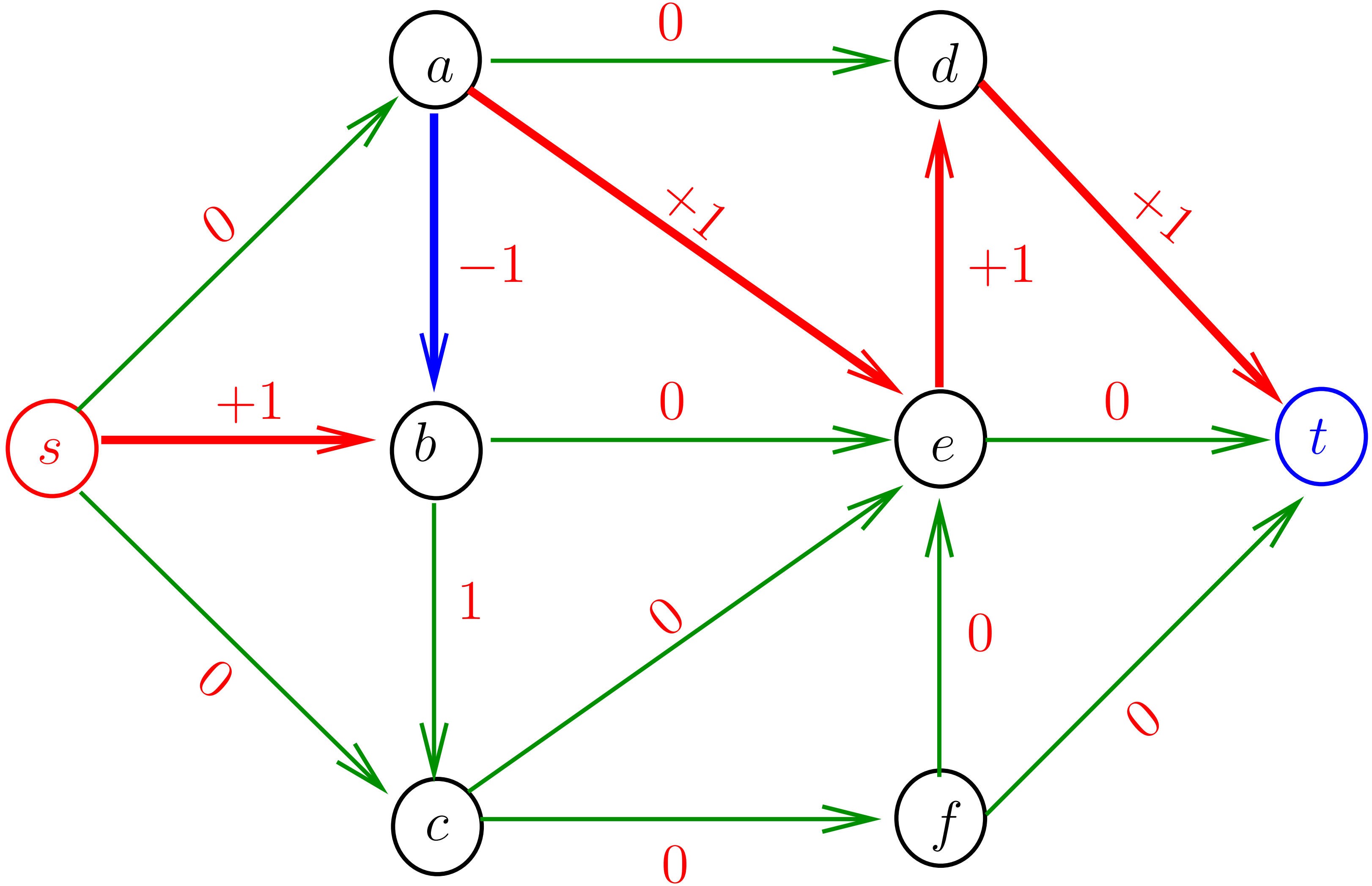


val(x) = 5
$x(ij)/u(ij)$
a
b
c
d
e
f
s
t
1/1
2/2
0/2
1/1
0/1
1/2
1/2
1/1
1/1
3/3
2/3
1/1
1/1
1/1
1/1
2/3

E agora? x é máximo?



Onde mudou?



Pseudo-caminho

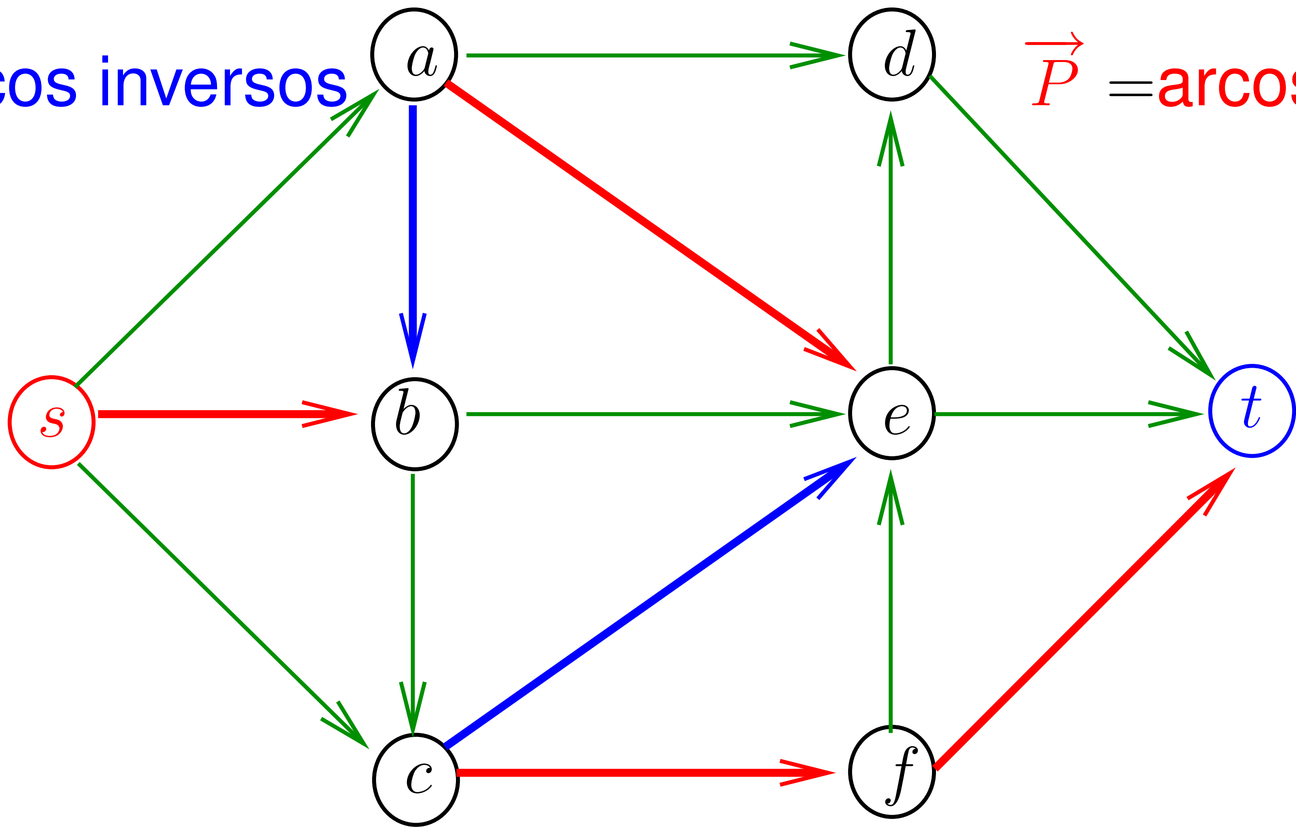
Um pseudo-caminho é uma seqüência

$$\langle i_0, a_1, i_1, \ldots, a_q, i_q \rangle$$

em que $i_0, \ldots, i_q$ são nós distintos e $a_k = i_{k-1} i_k$ ou $a_k = i_k i_{k-1}$.

$\overleftarrow{P}$ =arcos inversos

$\overrightarrow{P}$ =arcos diretos



Lema do incremento

Se x é um st-fluxo e P é um pseudo-caminho de incremento se s a t, então x não é um fluxo máximo.

Rascunho da demonstração: Seja δ o maior valor tal que

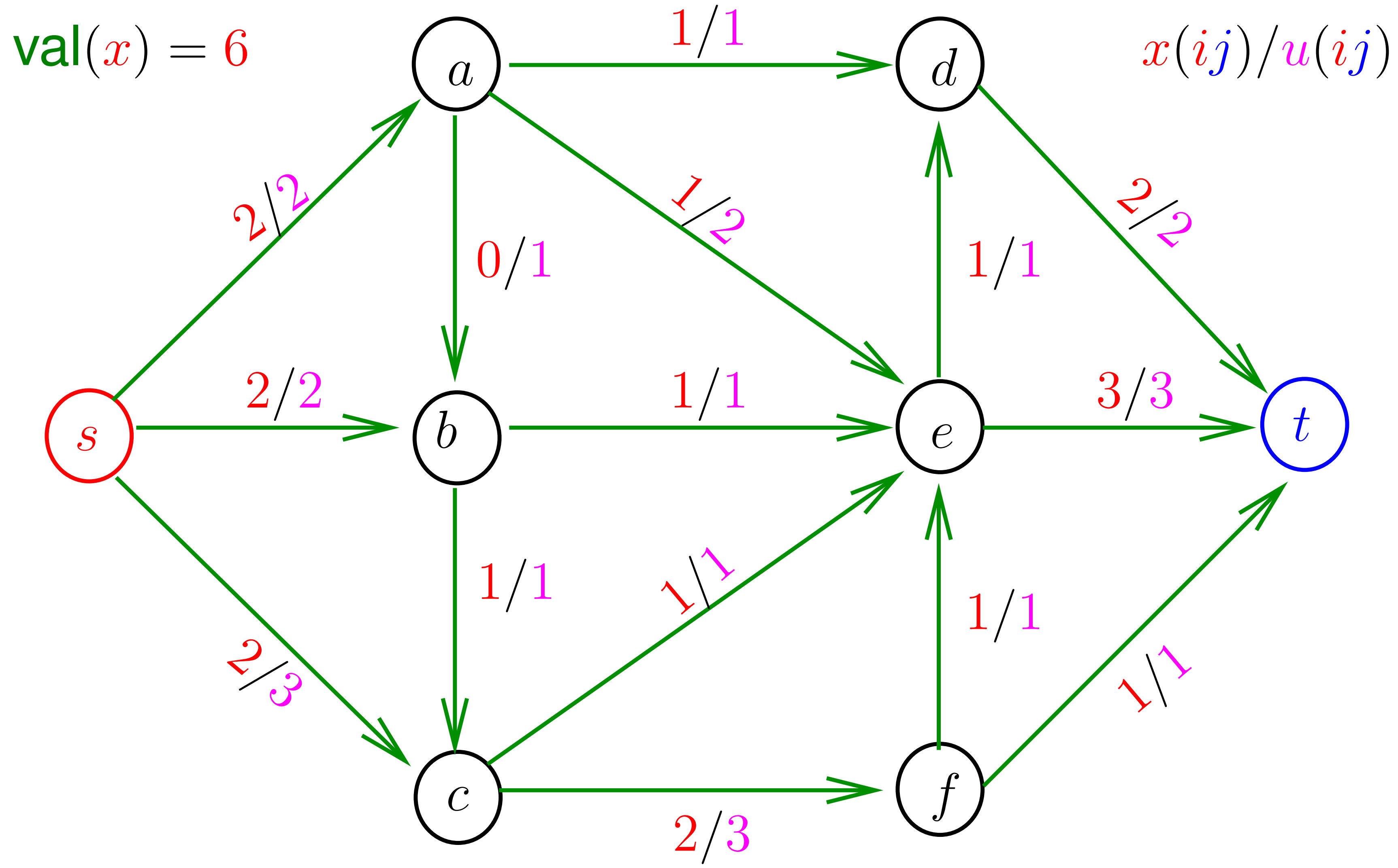
$$\begin{array}{lll} \delta & \leq & u(ij) - x(ij) \quad \text{para cada } ij \in \overrightarrow{P} \\ \delta & \leq & x(ij) \quad \text{para cada } ij \in \overleftarrow{P}. \end{array}$$

É evidente que $\delta > 0$. Seja x' o st-fluxo

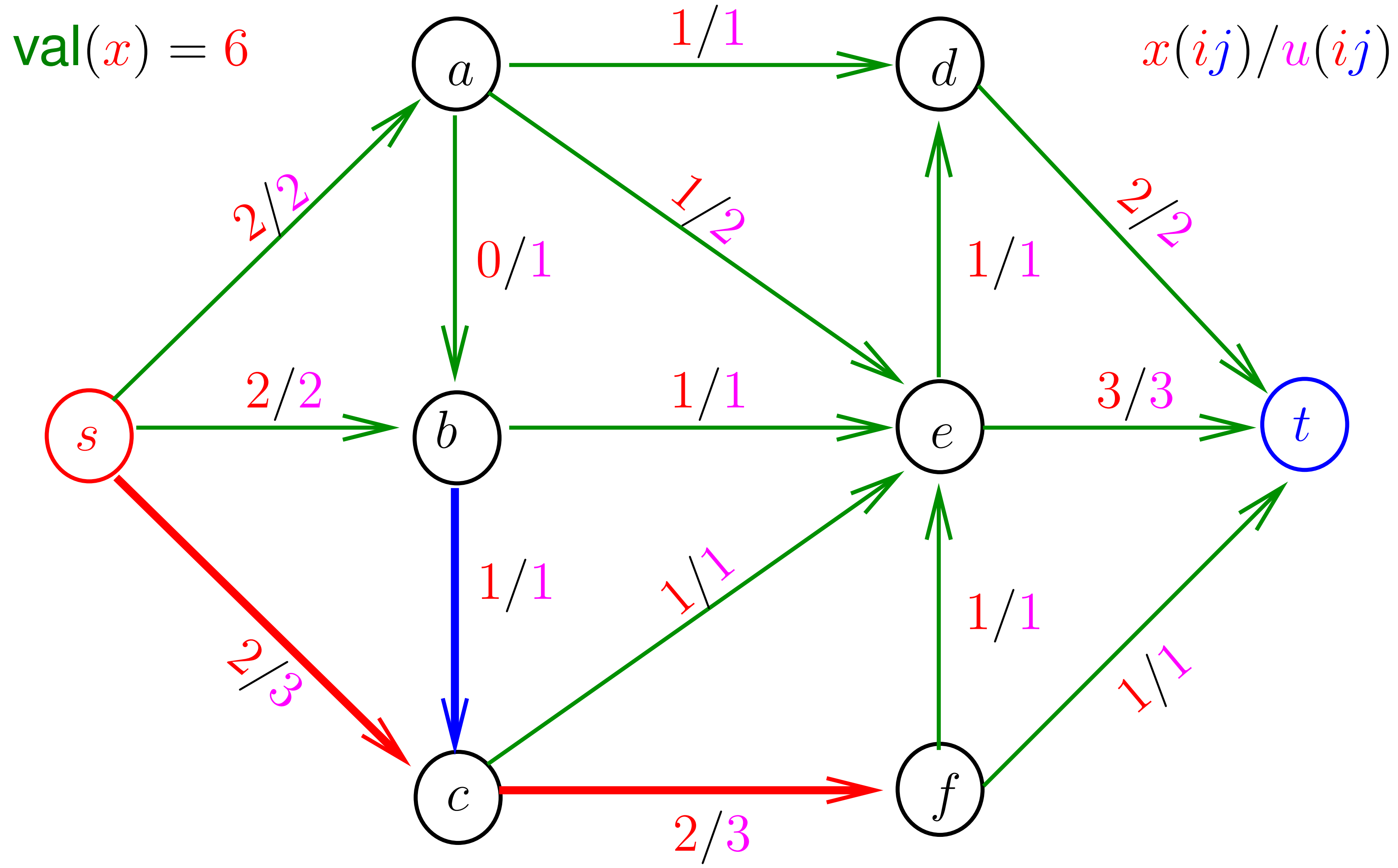
$$x'(ij) := \begin{cases} x(ij) + \delta & \text{se } ij \in \overrightarrow{P} \\ x(ij) - \delta & \text{se } ij \in \overleftarrow{P} \\ x(ij) & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Temos que $\mathsf{val}(x') = \mathsf{val}(x) + \delta$.

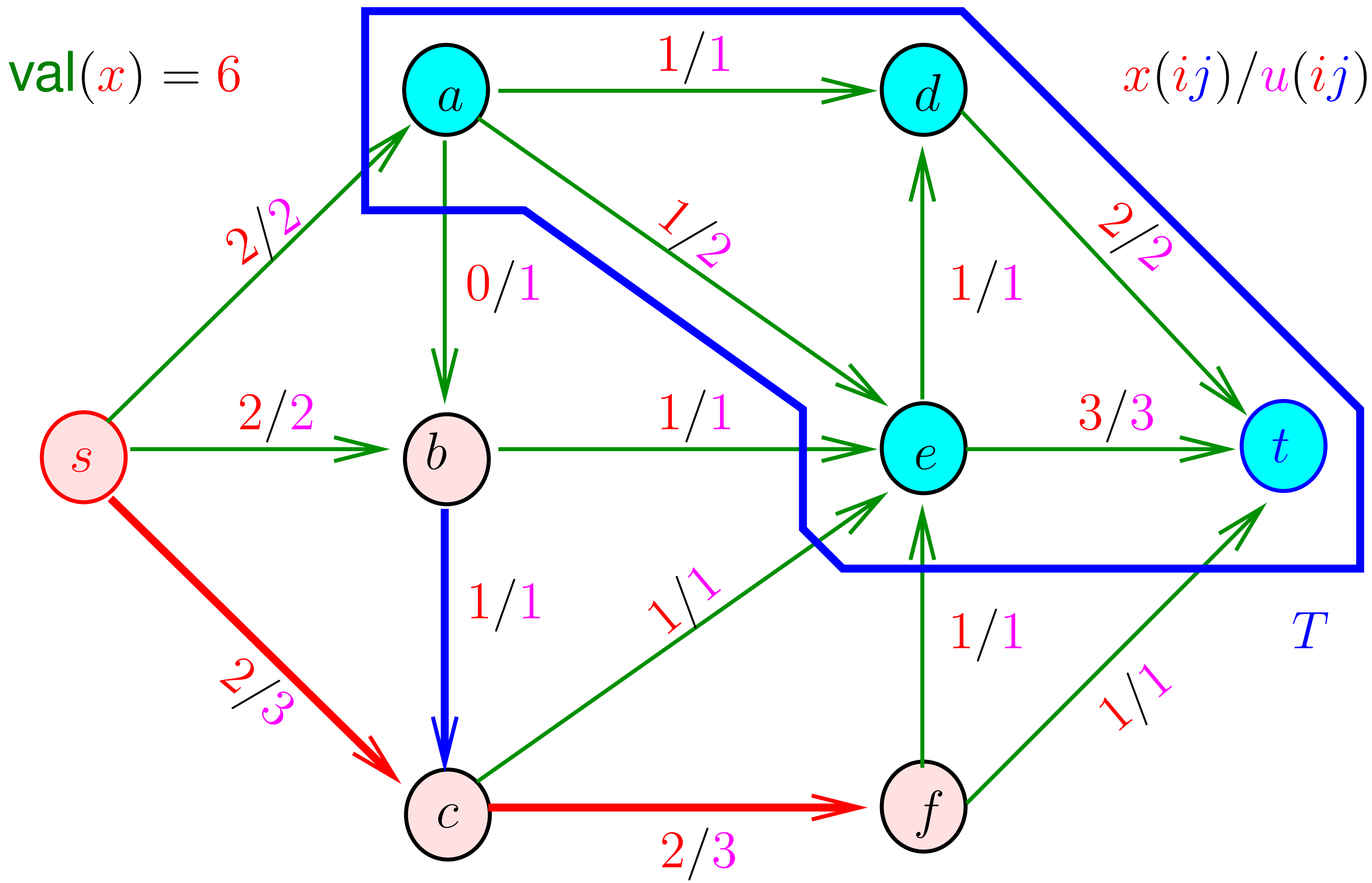
E agora? x é máximo?



E agora? x é máximo?



E agora? x é máximo?



Lema do certificado

Se x é um st-fluxo e não existe um pseudo-caminho de incremento de s a t, então existe um st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T).$$

Rascunho da demonstração: Seja S o conjunto de nós que são términos de algum pseudo-caminho de incremento que começa em s e seja $T := \overline{S}$.
Da definição segue que $x(\overline{T}, T) = u(\overline{T}, T)$ e $x(T, \overline{T}) = 0$.
Logo,

$$\begin{aligned}
\text{val}(x) &= x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}) \\
&= x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) \\
&= x(\overline{T}, T) \\
&= u(\overline{T}, T)
\end{aligned}$$

Conseqüência

Para quaisquer dois nós s e t em uma rede (N, A, u) com função-capacidade u, existe um st-fluxo x que respeita u tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T)$$

para algum st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$.

Rascunho de demonstração:

Seja x um st-fluxo de valor máximo.

Pelo lema do incremento não existe um pseudo-caminho de incremente de s a t.

Pelo lema do certificado existe um st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$ tal que

$$\text{val}(x) = u(\overline{T}, T).$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois nós s e t em uma rede (N, A, u) com função-capacidade u tem-se que

$$\max\{\text{val}(x) : 0 \leq x \leq u\} = \min\{u(\overline{T}, T) : T \text{ é } st\text{-corte}\}.$$