AULA 8

Mais programação linear

Paulo Feofiloff,

Algoritmos de programação linear

Problema

Problema de programação linear:

Dados

- uma matriz A indexada por $M \times N$,
- um vetor b indexado por M
- um vetor c indexado por N

encontrar um vetor x indexado por N que

$$\begin{array}{rrcll} \text{minimize} & cx & & & \\ \text{sob as restrições} & Ax & = & b & \\ & x_i & \geq & 0 & \text{para cada } i \text{ em } N. \end{array}$$

Exemplo

Encontrar x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que minimizem

$$51x_1 + 52x_2 + 53x_3 + 54x_4 + 55x_5$$

enquanto satisfazem as restrições

$$\begin{aligned} 11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 15x_5 &= 16 \\ 21x_1 + 22x_2 + 23x_3 + 24x_4 + 25x_5 &= 26 \\ 31x_1 + 32x_2 + 33x_3 + 34x_4 + 35x_5 &= 36 \\ 41x_1 + 42x_2 + 43x_3 + 44x_4 + 45x_5 &= 46 \end{aligned}$$

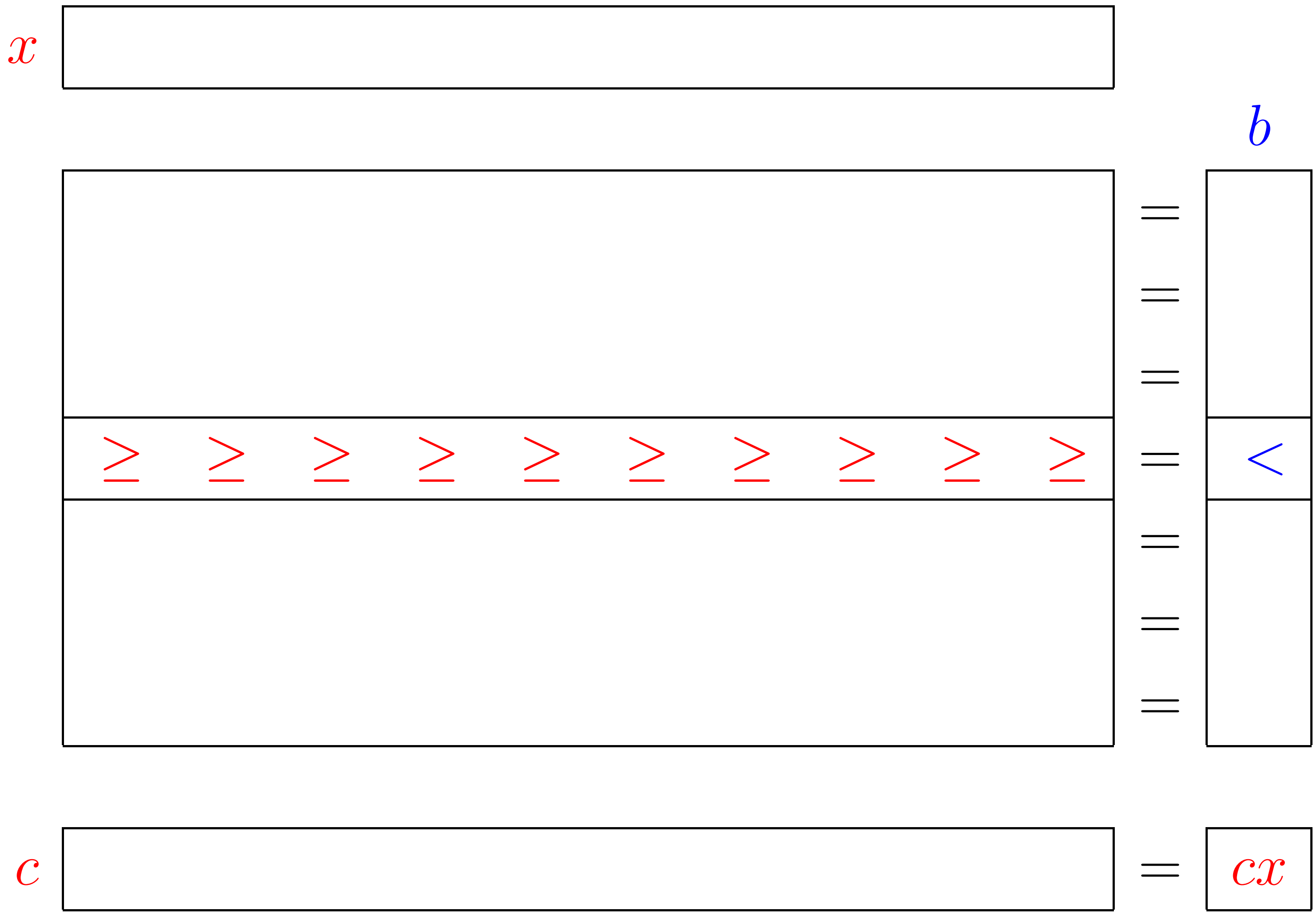
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Mesmo exemplo

“Desenho” do sistema:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x & \boxed{x_1} & \boxed{x_2} & \boxed{x_3} & \boxed{x_4} & \boxed{x_5} & & \\
 & & & & & & & b \\
 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & = & 16 \\
 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & = & 26 \\
 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & = & 36 \\
 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & = & 46 \\
 & & & & & & & \\
c & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & = & cx
\end{array}
$$

Sistemas simples inviável



Sistema simples solúvel

$$x \quad \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccc|ccccc|cc|c|}
\hline
 & & & & & & & & & & & & b \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & = & \geq \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & = & \geq \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & = & \geq \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & = & \geq \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & = & \geq \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & = & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & = & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$c \quad \begin{array}{|ccccc|ccccc|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \geq & \geq & \geq & \geq & \geq \\ \hline \end{array} \; = \; \boxed{cx}$$

Sistemas simples solúvel

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|cc}
x & 19 & 29 & 39 & 49 & 59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
& & & & & & & & & & & & b \\
\hline
& 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & = & 19 \\
& 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & = & 29 \\
& 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & = & 39 \\
& 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & = & 49 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & = & 59 \\
\hline
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
\hline
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 85 & 86 & 87 & 88 & 99 & = & 0
\end{array}
$$

Sistema simples solúvel

Sistema simples ilimitado

$$
\begin{array}{c|ccccc|cccc|c|cc|c|}
\cline{2-11}
x & & & & & & & & & & & & & \\
\cline{2-11}
\multicolumn{14}{c}{} \\
\multicolumn{13}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{b} \\
\cline{2-11} \cline{14-14}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \le & = & & \ge \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \le & = & & \ge \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \le & = & & \ge \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \le & = & & \ge \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \le & = & & \ge \\
\cline{2-11} \cline{14-14}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & & 0 \\
\cline{2-11} \cline{14-14}
\multicolumn{14}{c}{} \\
\cline{2-11} \cline{14-14}
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & < & = & & cx \\
\cline{2-11} \cline{14-14}
\end{array}
$$

Sistemas simples

x													
													b
	1	0	0	0	0					$\leq$	$=$	$\geq$
	0	1	0	0	0					$\leq$	$=$	$\geq$
	0	0	1	0	0					$\leq$	$=$	$\geq$
	0	0	0	1	0					$\leq$	$=$	$\geq$
	0	0	0	0	1					$\leq$	$=$	$\geq$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
c	0	0	0	0	0					$<$	$=$	cx

Sistemas simples

$$
\begin{array}{c|ccccc|cccc|c|c|c|}
\cline{2-11}
x & & & & & & & & & & & \multicolumn{2}{c}{} \\
\cline{2-11}
\multicolumn{12}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{b} \\
\cline{2-11} \cline{13-13}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & 11 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & 21 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & 31 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & -1 & = & 41 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & -1 & = & 51 \\
\cline{2-11} \cline{13-13}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
\cline{2-11} \cline{13-13}
\multicolumn{13}{c}{} \\
\cline{2-11} \cline{13-13}
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & cx \\
\cline{2-11} \cline{13-13}
\end{array}
$$

Sistemas simples

x	11	21	31	41	51	0	0	0	0	0		b
	1	0	0	0	0					-1	$=$	11
	0	1	0	0	0					-1	$=$	21
	0	0	1	0	0					-1	$=$	31
	0	0	0	1	0					-1	$=$	41
	0	0	0	0	1					-1	$=$	51
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
c	0	0	0	0	0					-1	$=$	0

Sistemas simples

x	12	22	32	42	52	0	0	0	0	1		
												b
	1	0	0	0	0					-1	$=$	11
	0	1	0	0	0					-1	$=$	21
	0	0	1	0	0					-1	$=$	31
	0	0	0	1	0					-1	$=$	41
	0	0	0	0	1					-1	$=$	51
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
c	0	0	0	0	0					-1	$=$	-1

Sistemas simples

$$
\begin{array}{c|ccccc|cccc|c|}
\hline
x & 13 & 23 & 33 & 43 & 53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|ccccc|cccc|c|cc|c|}
\multicolumn{13}{r}{} & b \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & & 11 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & & 21 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & & 31 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & -1 & = & & 41 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & -1 & = & & 51 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|cccc|c|c|c|}
\hline
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

Sistemas simples

x	14	24	34	44	54	0	0	0	0	3		
												b
	1	0	0	0	0					-1	$=$	11
	0	1	0	0	0					-1	$=$	21
	0	0	1	0	0					-1	$=$	31
	0	0	0	1	0					-1	$=$	41
	0	0	0	0	1					-1	$=$	51
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
c	0	0	0	0	0					-1	$=$	-3

Sistemas simples

$$
\begin{array}{c|ccccc|cccc|c|}
\cline{2-11}
x & 15 & 25 & 35 & 45 & 55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
\cline{2-11}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|ccccc|cccc|c|c|c|}
\multicolumn{11}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{b} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & 11 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & 21 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & -1 & = & 31 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & -1 & = & 41 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & -1 & = & 51 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|cccc|c|c|c|}
\cline{2-11} \cline{13-13}
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & -4 & = & -4 \\
\cline{2-11} \cline{13-13}
\end{array}
$$

Sistemas simples

x	15	25	35	45	55	0	0	0	0	4

											b
1	0	0	0	0					-1	$=$	11
0	1	0	0	0					-1	$=$	21
0	0	1	0	0					-1	$=$	31
0	0	0	1	0					-1	$=$	41
0	0	0	0	1					-1	$=$	51
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$=$	0

c	0	0	0	0	0					-4	$=$	-4

Sistema simples ilimitado

Algoritmo Simplex

Recebe

- uma matriz A indexada por $M \times N$,
- um vetor b indexado por M
- um vetor c indexado por N

e transforma o "sistema" A, b, c em um sistema equivalente que é

- ou simples inviável
- ou simples solúvel
- ou simples ilimitado.

Conseqüência

(Carathéodory) Todo problema de programação linear viável tem uma solução básica.

Lema da dualidade

$X(A, b) := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$

$Y(A, c) := \{y : yA \leq c\}$.

Para todo x em $X(A, b)$ e todo y em $Y(A, c)$ vale que

$$cx \geq yb.$$

Demonstração:

$$cx \geq (yA)x = y(Ax) = yb.$$

Conseqüências

$$\min\{cx : x \in X(A,b)\} \geq \max\{yb : y \in Y(A,c)\}$$

Para qualquer x em $X(A,b)$ e qualquer y em $Y(A,c)$, se $cx = yb$ então

- x é solução de $\min\{cx : x \in X(A,b)\}$ e
- y é solução de $\max\{yb : y \in Y(A,c)\}$.

Exemplo

“Desenho” do sistema:

	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
y								b
y_1		11	12	13	14	15	$=$	16
y_2		21	22	23	24	25	$=$	26
y_3		31	32	33	34	35	$=$	36
y_4		41	42	43	44	45	$=$	46
	c	51	52	53	54	55	$=$	cx

Folgas complementares

A folga de x em $X(A, b)$ é o conjunto

$$\{k \in N : x[k] \neq 0\}.$$

A folga de y em $Y(A, c)$ é o conjunto

$$\{q \in N : (yA)[q] < c[q] \neq 0\}.$$

O par x, y tem folgas complementares se a folga de x é disjunta da folga de y.

x	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	0	0	0	0	0	0	0	0
$c - (yA)$	0	0	0	0	0	0	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$

Lema das folgas complemetares

Para todo x em $X(A, b)$ e todo y em $Y(A, c)$, o para x, y tem folgas complementares se e só se $cx = yb$.

Dem: Suponha que x, y tem folgas complementares. Então

$$cx - yb = cx - y(Ax) = (c - yA)x = \sum_j (c - yA)[j]x[j] = 0.$$

Logo, $cx = yb$.

Suponha agora que $cx = yb$. Então $cx - y(Ax) = 0$, donde

$$\sum_j (c - yA)[j]x[j] = 0.$$

Como $x \geq 0$ e $yA \leq c$, cada termo da soma é ≤ 0. Como a soma é nula, cada um de seus termos deve ser nulo.

Problema primal

Dados

- uma matriz A indexada por $M \times N$,
- um vetor b indexado por M
- um vetor c indexado por N

encontrar um vetor x indexado por N que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimize} & cx & & & \\
\text{sob as restrições} & Ax & = & b & \\
& x_i & \geq & 0 & \text{para cada } i \text{ em } N.
\end{array}
$$

Problema dual

Dados

- uma matriz A indexada por $M \times N$,
- um vetor b indexado por M
- um vetor c indexado por N

encontrar um vetor y indexado por M que

$$\begin{array}{rrcl} \text{maximize} & yb & & \\ \text{sob as restrições} & yA & \leq & c \end{array}$$

Teorema da dualidade

(Von Neumann, Gale, Kuhn e Tucker)

Se $X(A,b) \neq \emptyset$ e $Y(A,c) \neq \emptyset$, então

$$\min\{cx : x \in X(A,b)\} = \max\{yb : y \in Y(A,c)\}.$$

Caminhos de comprimento mínimo

Da correção do algoritmo BUSCA-EM-LARGURA temos o seguinte.

> Seja (N, A) um grafo e s e t dois de seus nós. Suponha que o grafo possui um st-caminho. Se M é a matriz de incidências de (N, A) e b o vetor de incidência de st, então
>
> $$\min\{x(A) : Mx = b, 0 \leq x \leq 1\} = \max\{yb : yM \leq 1\}.$$
>
> Ademais, o mínimo e o máximo têm solução inteira.

No algoritmo BUSCA-EM-LARGURA o vetor x é representado pela função-predecessor π.

Caminhos sob custos não-negativos

Da correção do algoritmo DIJKSTRA (FORD) temos o seguinte.

> Seja (N, A, c) uma rede com função-custo $c : A \to \mathbb{Z}_{\geq}$ e s e t dois de seus nós. Suponha que o grafo possui um st-caminho. Se M é a matriz de incidências de (N, A) e b o vetor de incidência de st, então
>
> $$\min\{cx : Mx = b, 0 \leq x \leq 1\} = \max\{yb : yM \leq c\}.$$
>
> Ademais, o mínimo e o máximo têm solução inteira.

No algoritmo DIJKSTRA o vetor x é representado pela função-predecessor π.

Caminhos de custo mínimo

Da correção do algoritmo FORD-BELLMAN (FORD) temos o seguinte.

Seja (N, A, c) uma rede com função-custo $c : A \to \mathbb{Z}$ e s e t dois de seus nós. Suponha que a rede não possui ciclo negativo. Se M é a matriz de incidências de (N, A) e b o vetor de incidência de st, então

$$\min\{cx : Mx = b, 0 \leq x \leq 1\} = \max\{yb : yM \leq c\}.$$

Ademais, o mínimo e o máximo têm solução inteira.

Nos algoritmos o vetor x é representado pela função-predecessor π.

Ciclos negativos

Da correção do algoritmo FORD-CICLO temos o seguinte.

Seja (N, A, c) uma rede com função-custo $c : A \to \mathbb{Z}$. Se M é a matriz de incidências de (N, A), então vale uma, e apenas uma, das seguintes afirmações:

- existe x tal que $Mx = 0, 0 \leq x \leq 1$ e $cx < 0$,
- existe y tal que $yM \leq c$.

Nos algoritmos o vetor x é representado pela função-predecessor π.

Fluxo viável de custo mínimo

Problema do fluxo viável de custo mínimo:

Dados

- uma matriz de incidências M de um grafo (N, A),
- um vetor b indexado por N
- um vetor c indexado por A e
- um vetor u indexado por A

encontrar um vetor x indexado por A que

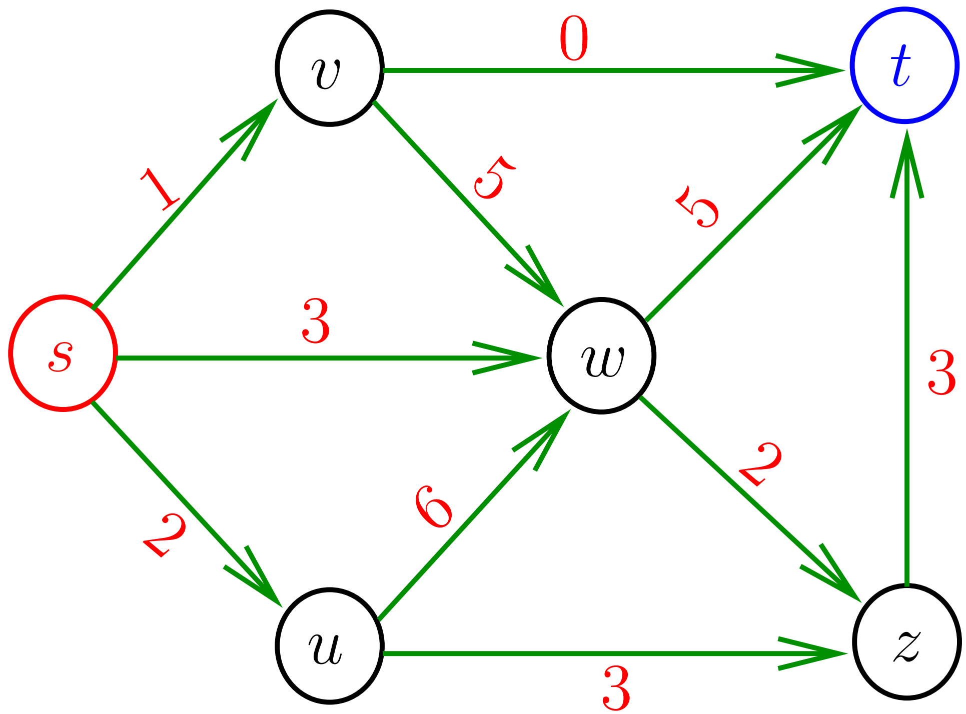
$$
\begin{array}{rrcll}
\text{minimize} & cx & & & \\
\text{sob as restrições} & Mx & = & b & \\
& x[ij] & \leq & u[ij] & \text{para cada } ij \text{ em } A \\
& x[ij] & \geq & 0 & \text{para cada } ij \text{ em } A.
\end{array}
$$

Fluxos

PF 10.1, 10.2, 10.3

Fluxos

Uma fluxo é uma função de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

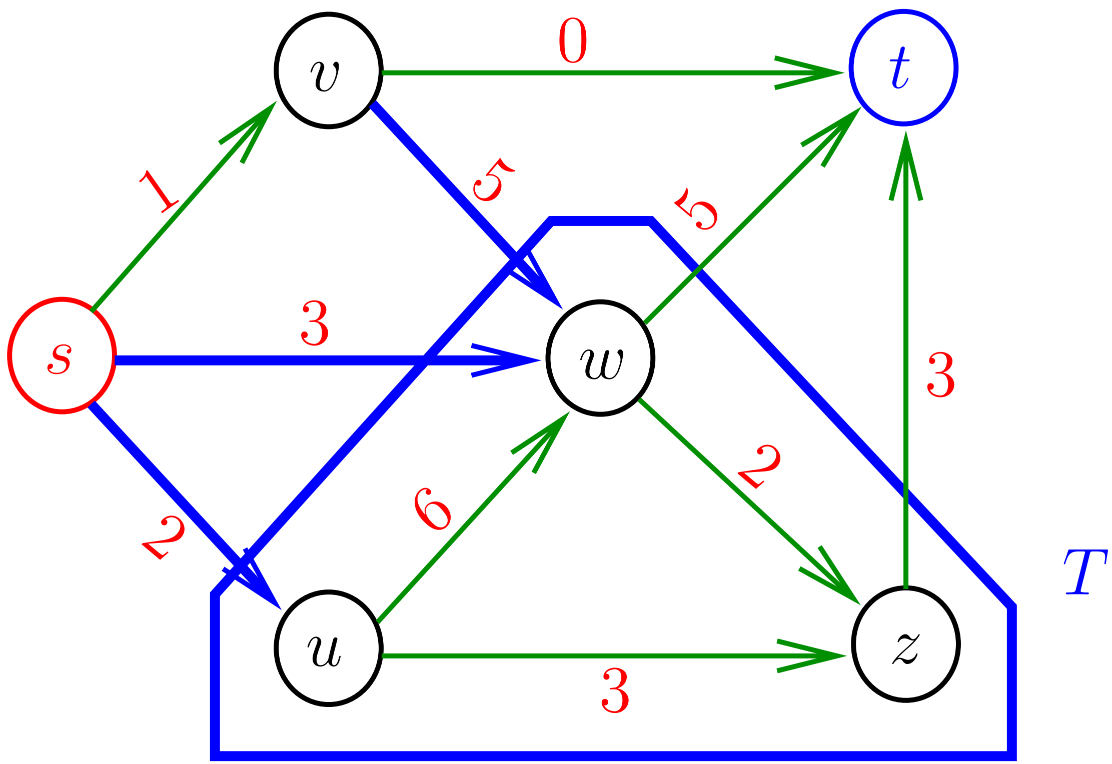


Excesso

Se x é um fluxo e T é uma parte de N então

$$x(\overline{T}, T) := \sum (x(ij) : ij \in (\overline{T}, T))$$

Exemplo: $x(\overline{T}, T) = 2 + 3 + 5 = 10$

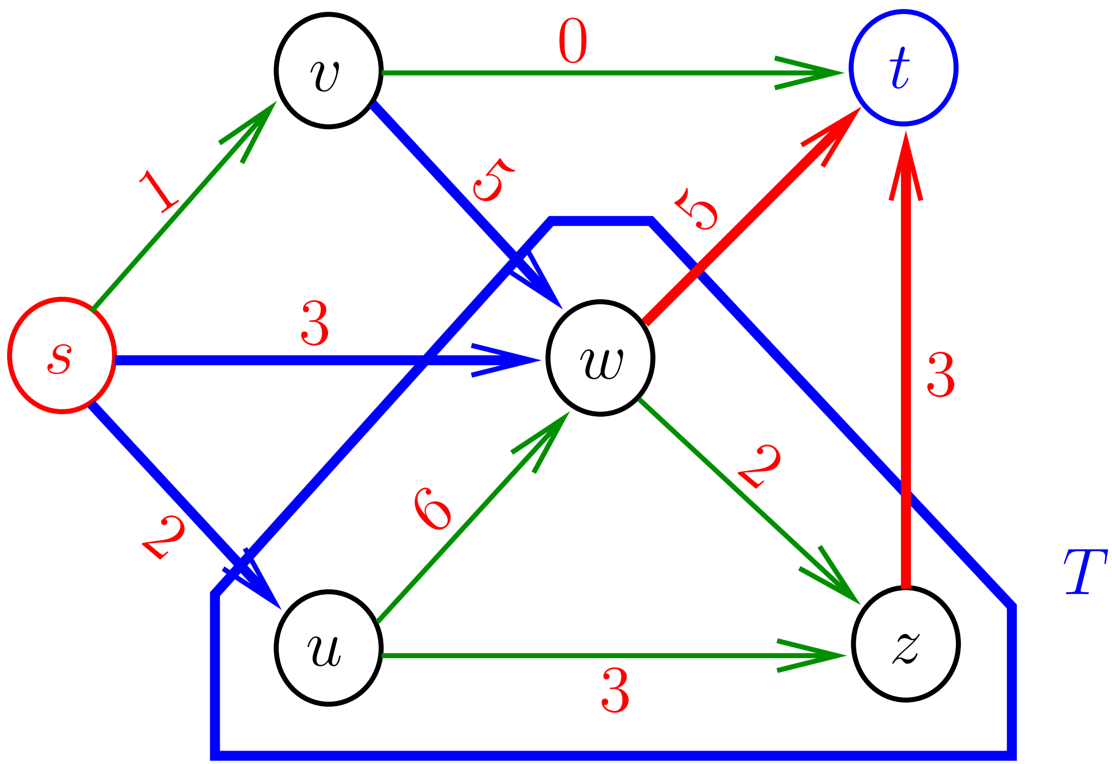


Excesso

O excesso ou acumulo de x em T é a diferença entre o que entra em T e o que sai de T:

$$x(\overline{T},T) - x(T,\overline{T})$$

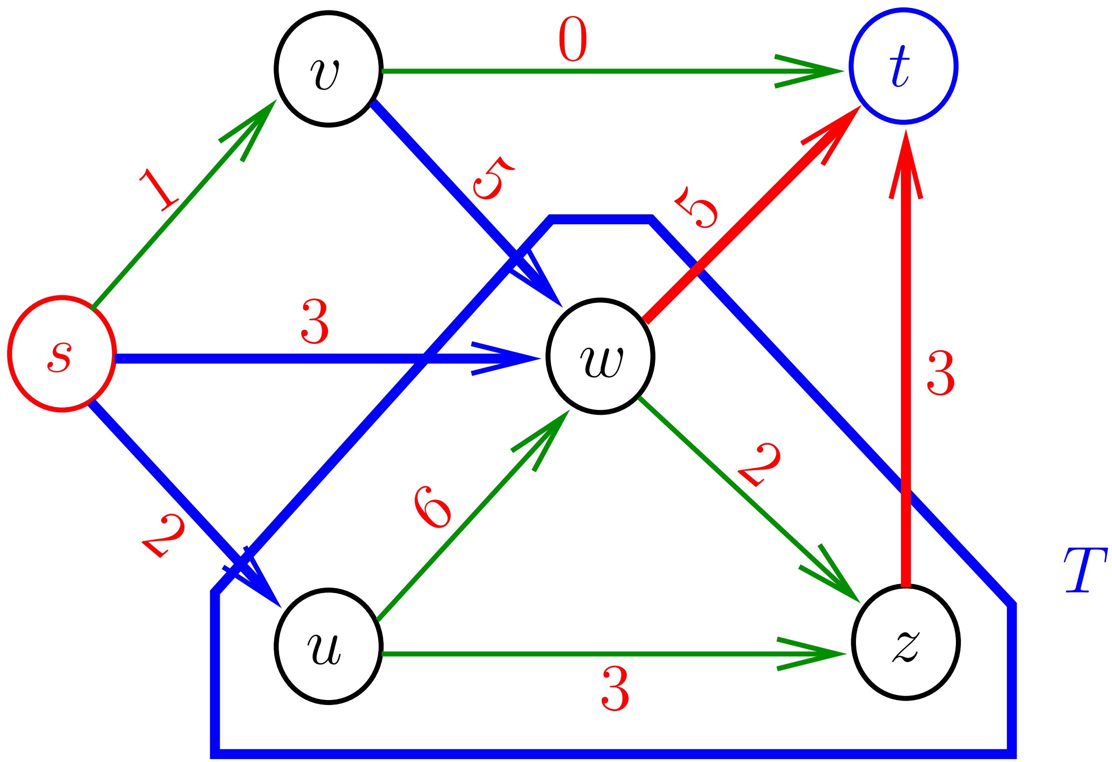
Exemplo: $x(\overline{T},T) - x(T,\overline{T}) = 10 - 8 = 2$



Soma de excessos

$$\sum(x(\bar{t},t) - x(t,\bar{t}) : t \in T) = x(\overline{T},T) - x(T,\overline{T})$$

Exemplo: $x(\overline{T},T) - x(T,\overline{T}) = 10 - 8 = 2$

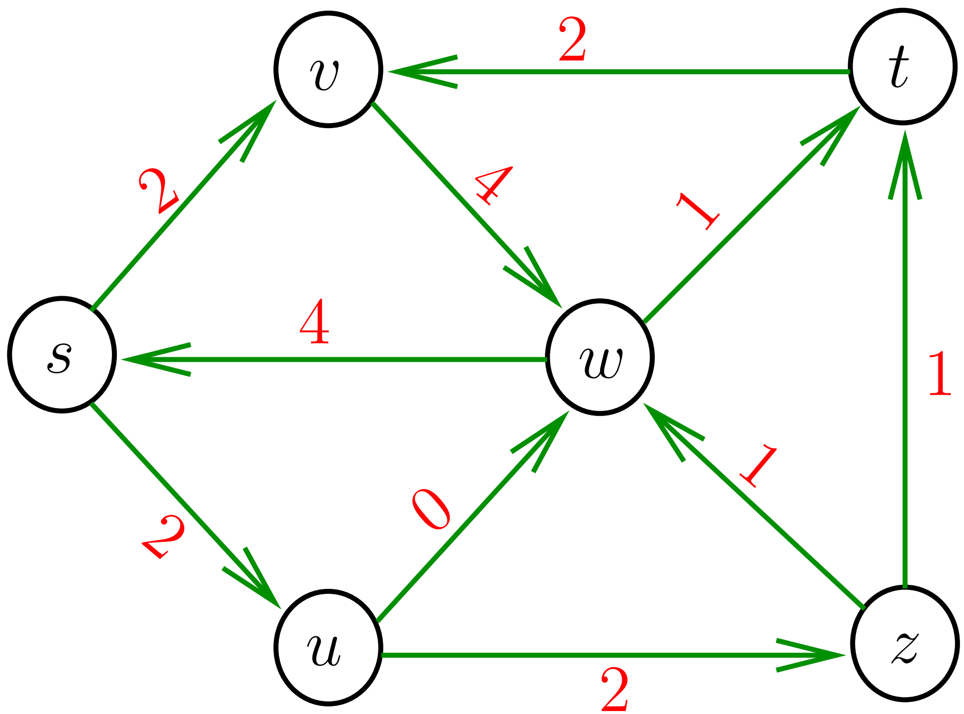


Circulação

Um circulação é qualquer fluxo x tal que

$$x(\bar{j}, j) = x(j, \bar{j})$$

para todo nó j.

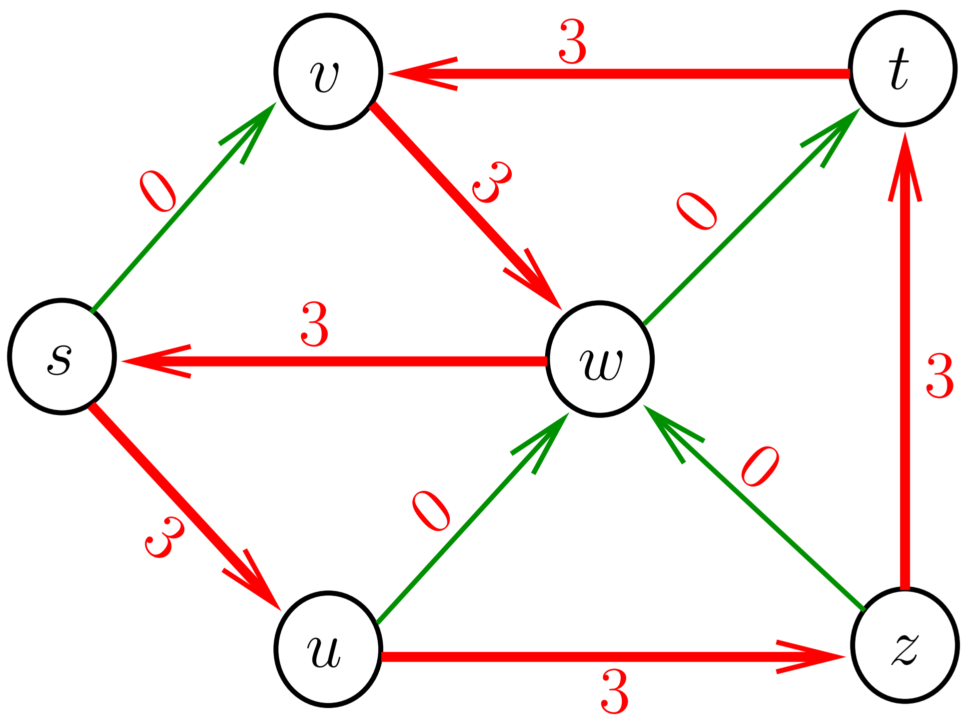


Circulações elementares

Se C é um ciclo e α é um inteiro não-negativo então

$$x(ij) := \begin{cases} \alpha & \text{se } C \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a circulação elementar definida por C e α.

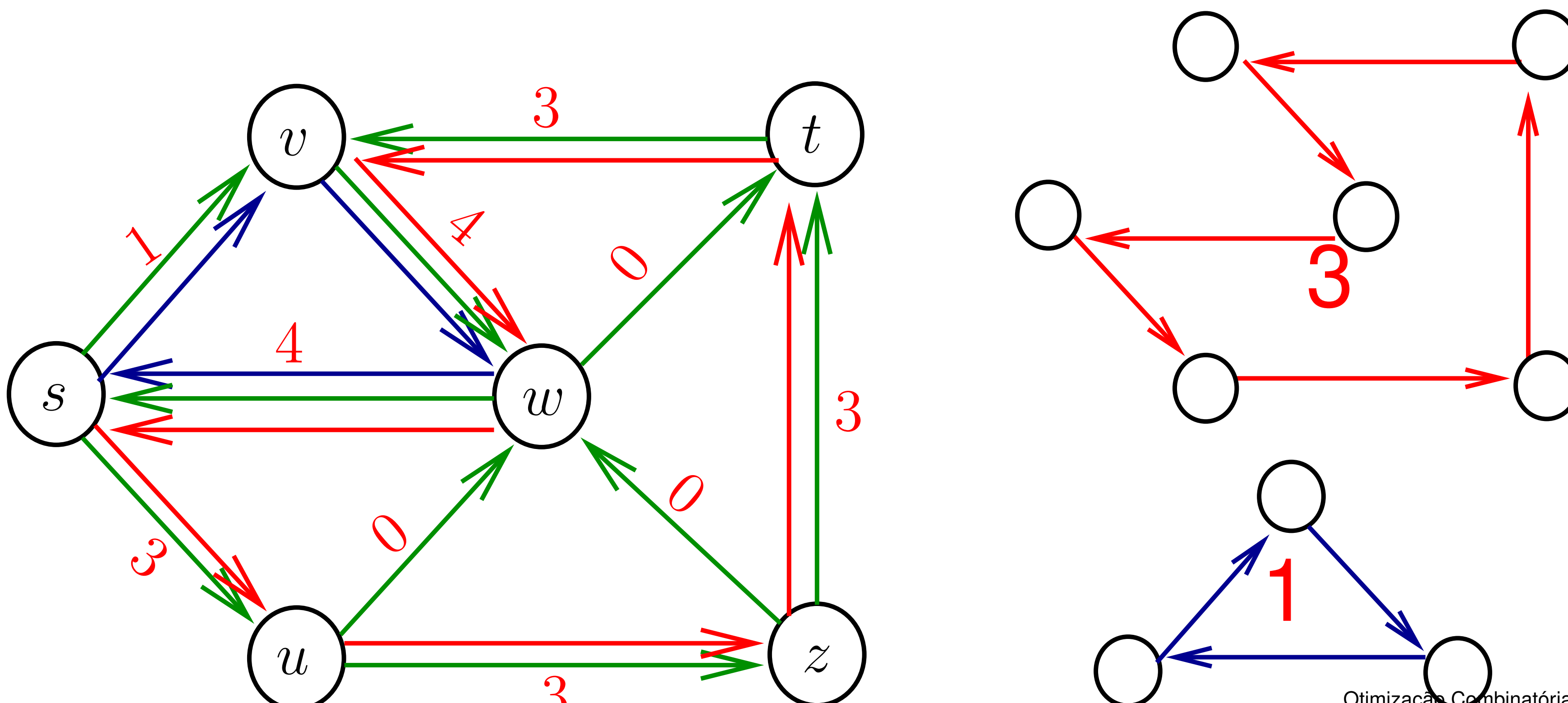


Mais circulações

Se $\mathcal{C}$ é uma coleção de ciclos e λ é uma função de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$, então o fluxo dado por

$$x(ij) := \sum(\lambda(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij é uma circulação.

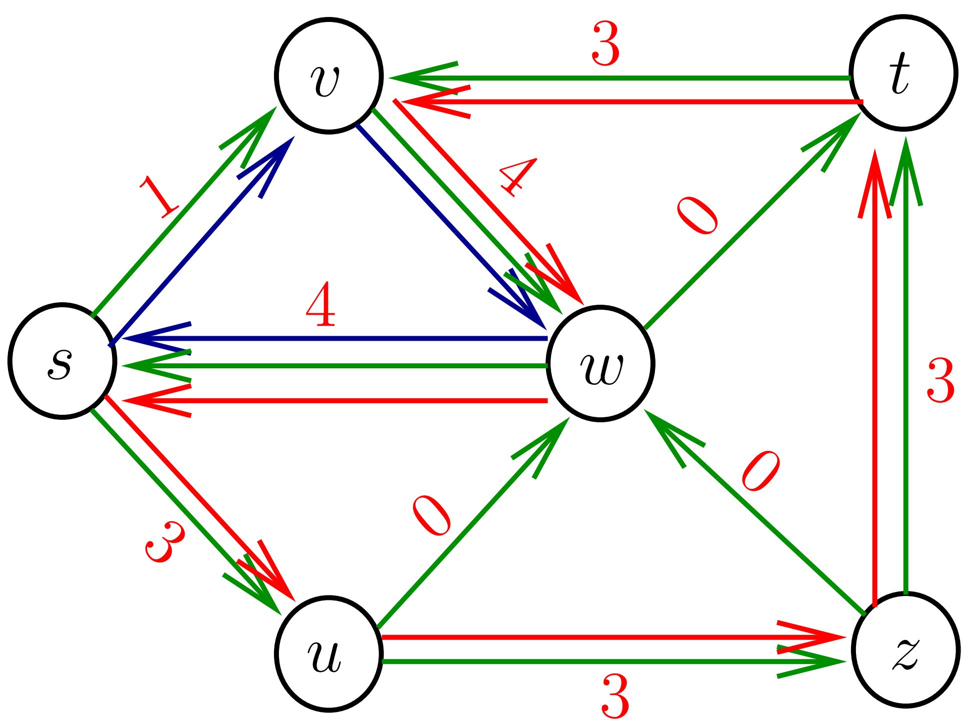


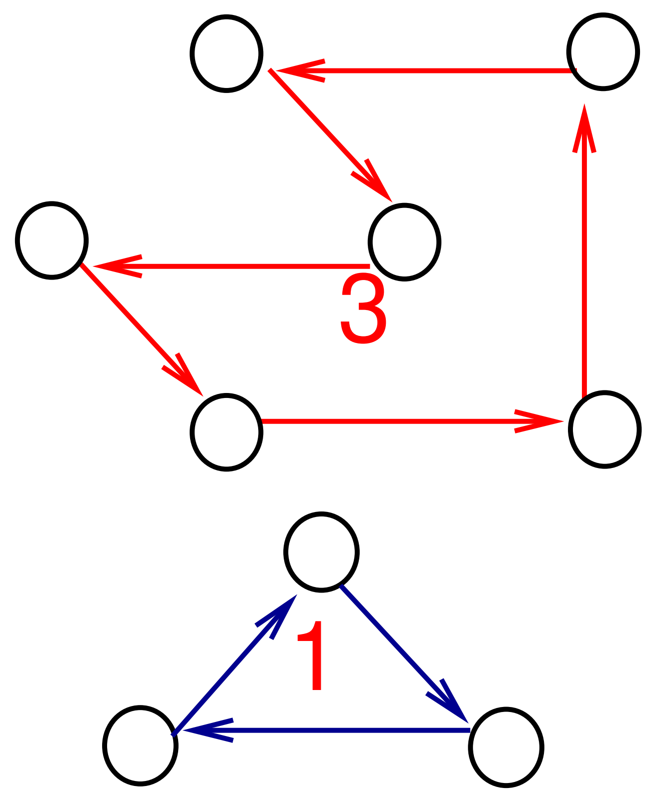
Decomposição de circulações

Se x é uma circulção então existe um coleção de ciclos $\mathcal{C}$ e $\lambda : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que $|\mathcal{C}| \leq m$ e

$$x(ij) = \sum(\lambda(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij.





Demonstração

A prova desse fato é algorítmica.

DECOMPOSIÇÃO-DE-CIRCULAÇÃO (N, A, x)

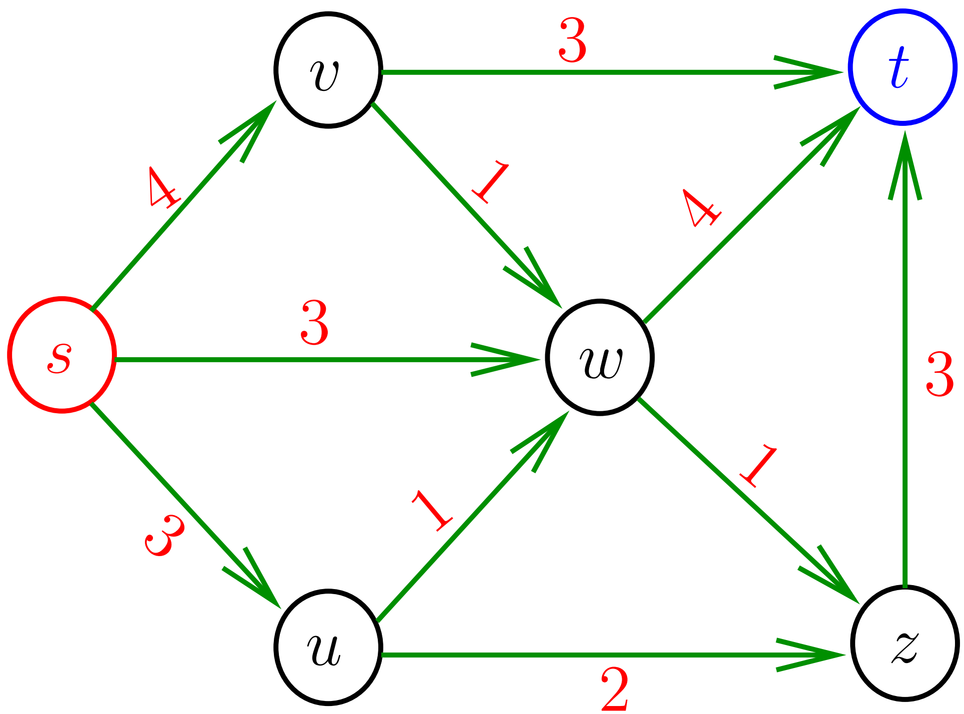
$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
$A_x \leftarrow \{ij : x(ij) > 0\}$
enquanto $A_x \neq \emptyset$ **faça**
    escolha pq em A_x
    $P \leftarrow$ BUSCA(N, A_x, q, p)
    $C \leftarrow P \cdot \langle p, q \rangle$
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{C\}$
    $\lambda(C) \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arcor de $C\}$
    para cada arco ij de C **faça**
        $x(ij) \leftarrow x(ij) - \lambda(C)$
        se $x(ij) = 0$
            então $A_x \leftarrow A_x - \{ij\}$
devolva $\mathcal{C}$ e λ

Fluxo entre dois nós

Um fluxo de s a t é qualquer fluxo x tal que

$$x(\bar{j}, j) - x(j, \bar{j}) = 0$$

para todo j em $N - \{s, t\}$.

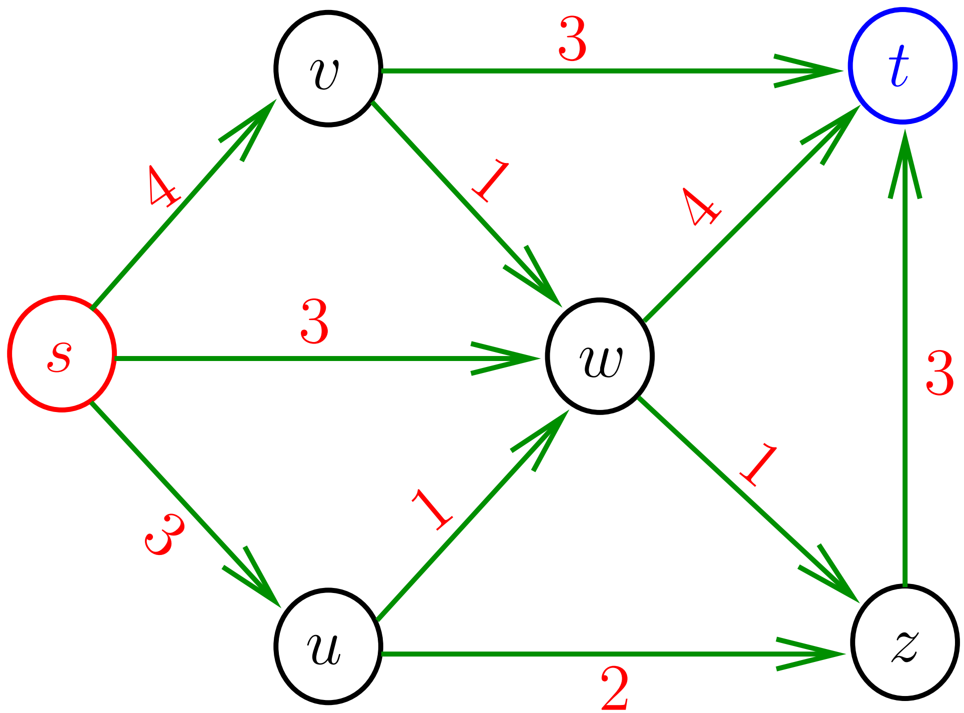


Valor de um st-fluxo

O valor de um st-fluxo x é

$$\text{val}(x) := x(\bar{t}, t) - x(t, \bar{t}).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = 3 + 3 + 4 - 0 = 10$

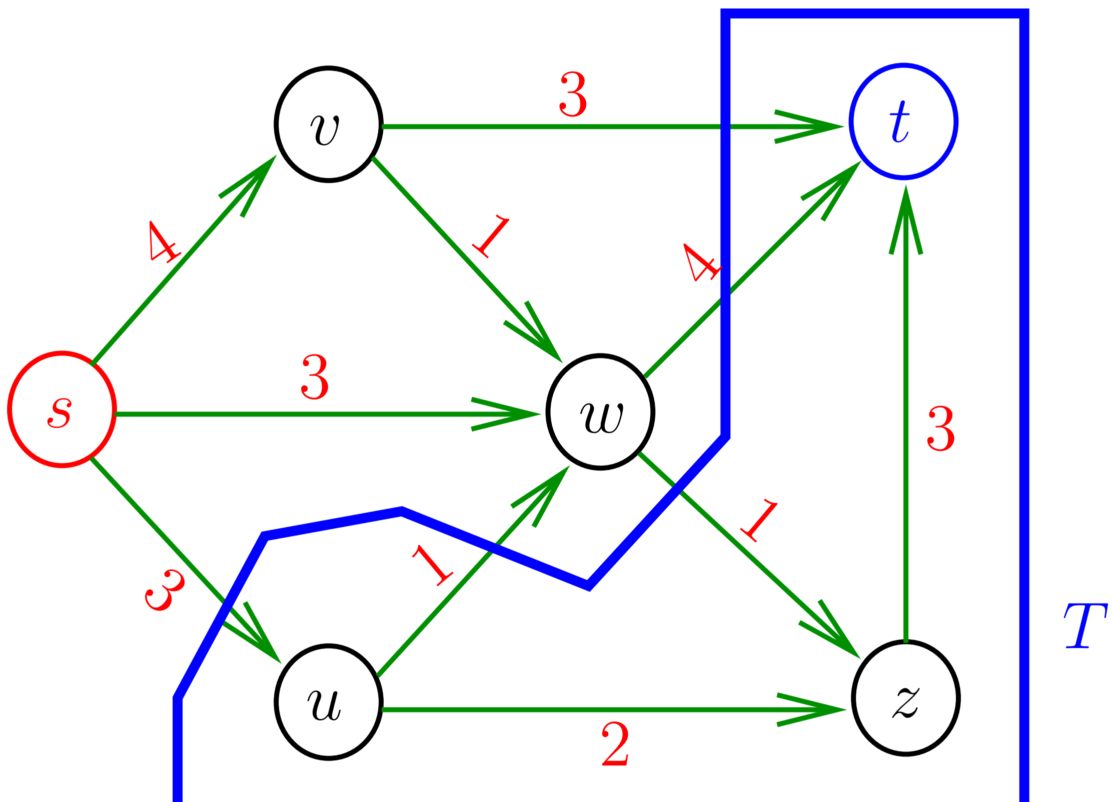


Valor de um st-fluxo

Para qualquer st-fluxo xe qualquer st-corte $\nabla(\overline{T}, T)$.

$$\text{val}(x) := x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}).$$

Exemplo: $\text{val}(x) = (3 + 1 + 4 + 3) - 1 = 10$

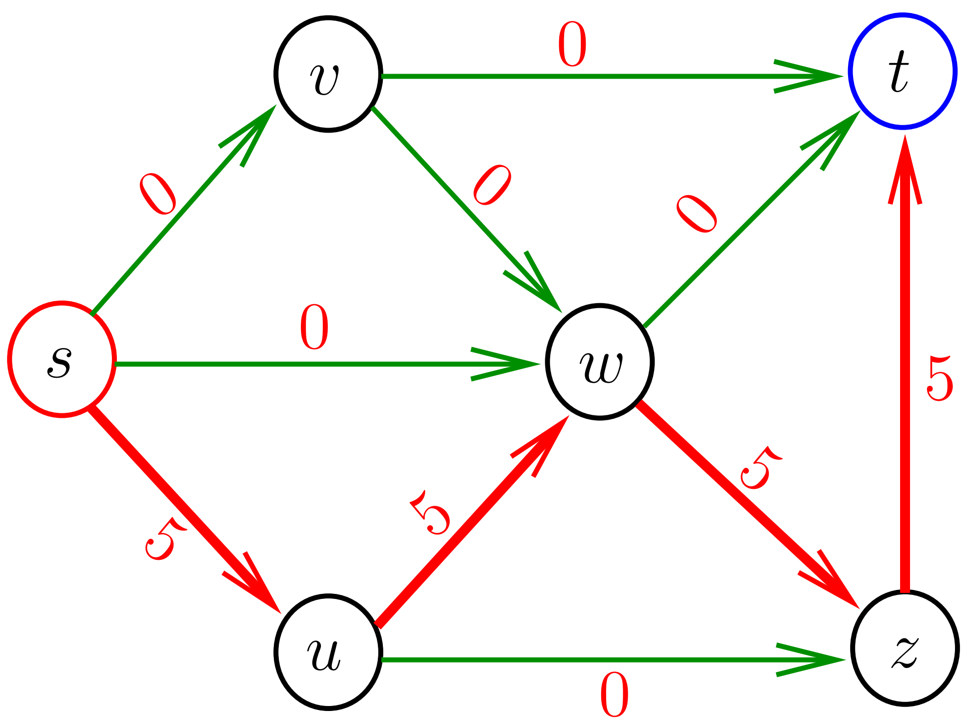


st-fluxos elementares

Se P é um st-caminho e α é um inteiro não-negativo então

$$x(ij) := \begin{cases} \alpha & \text{se } P \text{ passa por } ij \\ 0 & \text{em caso contrário,} \end{cases}$$

é a st-fluxo elementar definida por P e α.

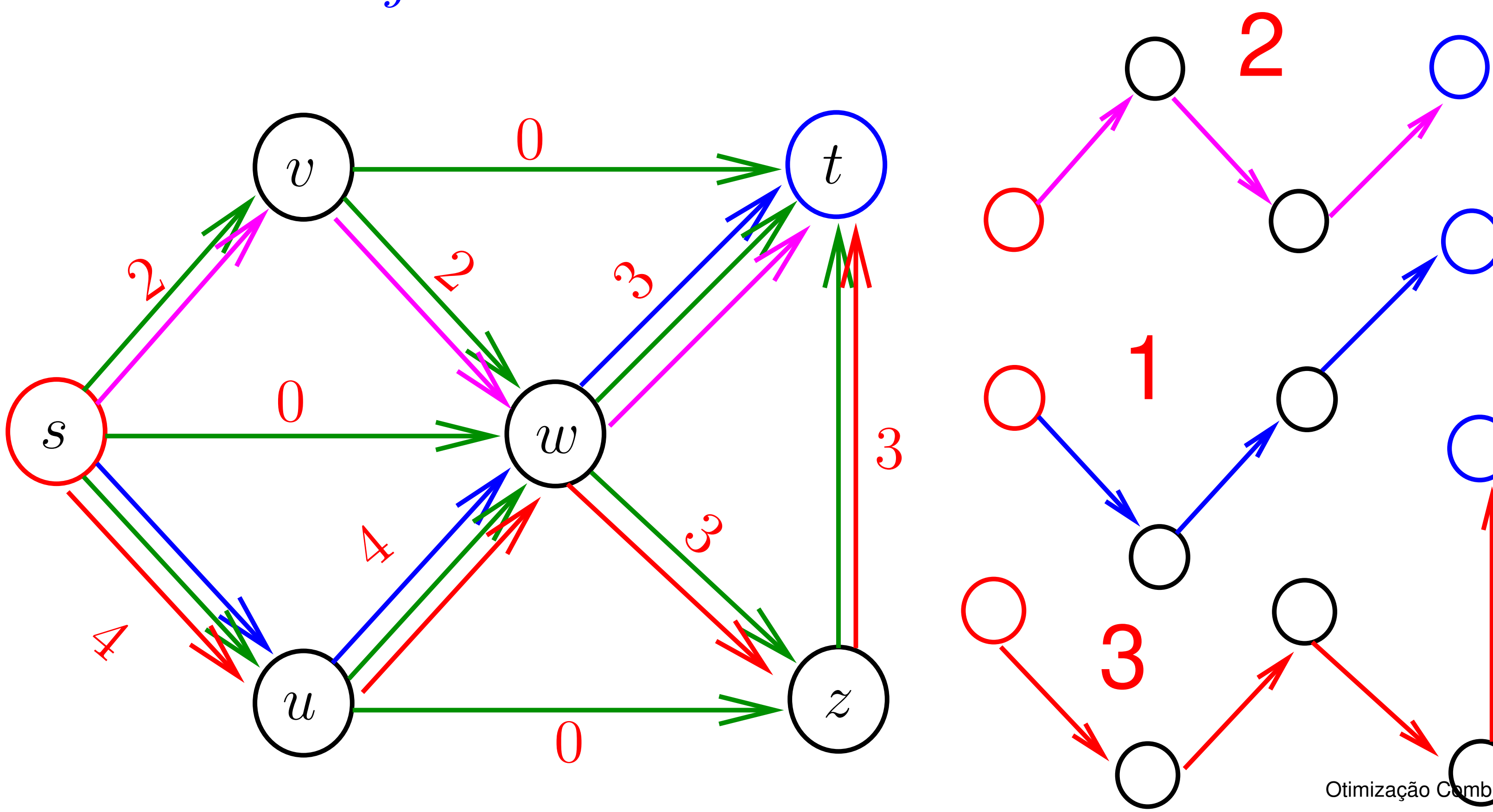


Mais st-fluxos

Se $\mathcal{P}$ é uma coleção de st-caminhos e λ é uma função de $\mathcal{P}$ em $\mathbb{Z}_{\geq}$, então o fluxo dado por

$$x(ij) := \sum(\lambda(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij é uma st-fluxo

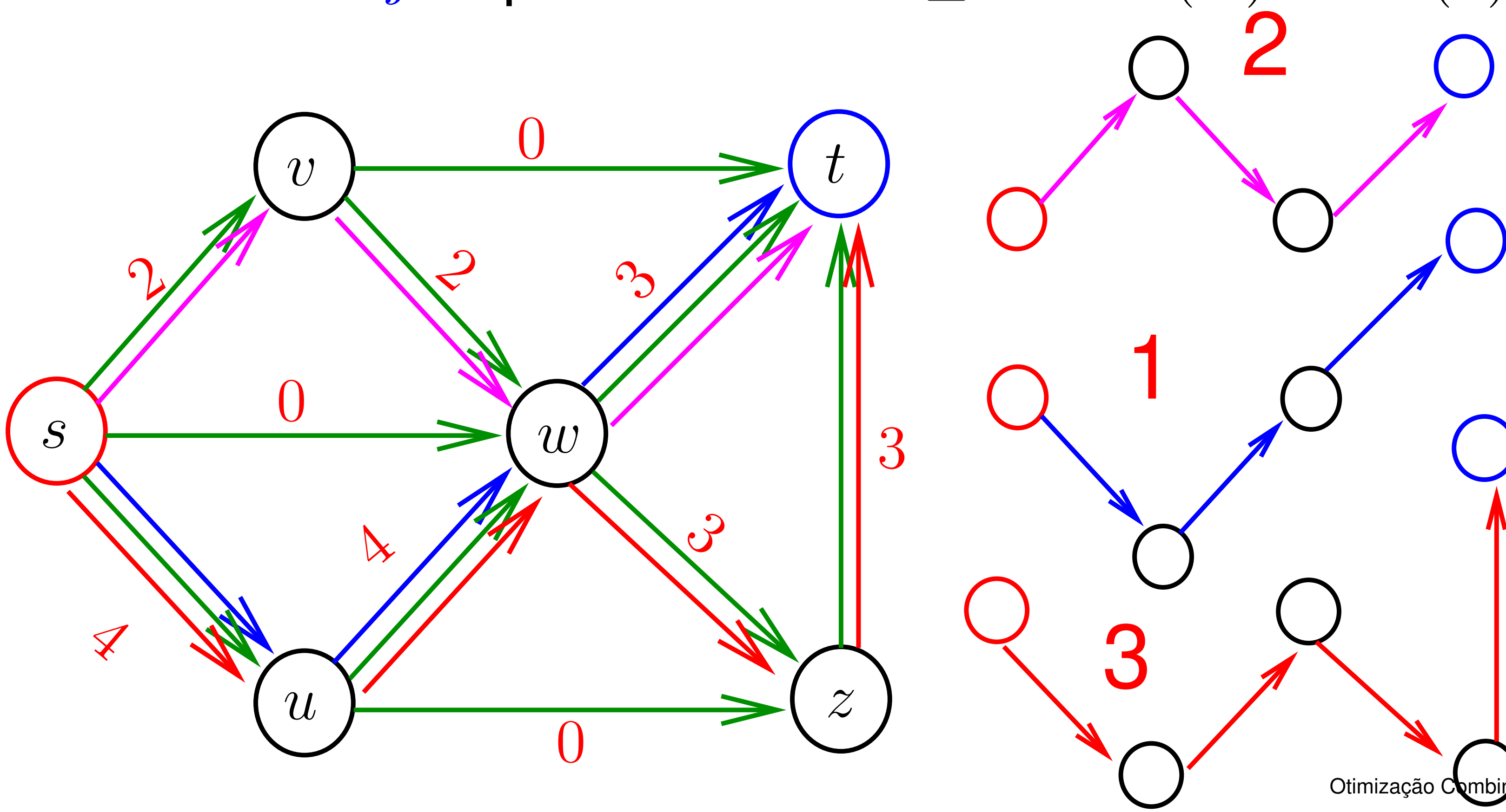


Decomposição de st-fluxos

Se x é uma st-fluxo então existe um coleção de st-caminhos $\mathcal{P}$, $|\mathcal{P}| \leq m$, e $\lambda : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$ tais que o st-fluxo

$$x'(ij) := \sum(\lambda(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$

para cada arco ij 'representa' x: $x' \leq x$ e $\mathrm{val}(x') = \mathrm{val}(x)$.



Demonstração

A prova desse fato é algorítmica.

DECOMPOSIÇÃO (N, A, x)

$\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$
$A_x \leftarrow \{ij : x(ij) > 0\}$
enquanto val$(x) > 0$ **faça**
    $P \leftarrow$ BUSCA (N, A_x, s, t)
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{P\}$
    $\lambda(P) \leftarrow \min\{x(ij) : ij$ é arcor de $P\}$
    para cada arco ij de P **faça**
        $x(ij) \leftarrow x(ij) - \lambda(P)$
        se $x(ij) = 0$
            então $A_x \leftarrow A_x - \{ij\}$
devolva $\mathcal{P}$ e λ

Conseqüência

(Carathéodory) Se x é um st-fluxo então existem

- uma coleção $\mathcal{P}$ de st-caminhos
- uma função $\lambda_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$
- uma coleção $\mathcal{C}$ de ciclos
- uma função $\lambda_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$

tais que $|\mathcal{P} \cup \mathcal{C}| \leq m$ e

$$x(ij) = \sum (\lambda_1(P) : P \in \mathcal{P} \text{ e } P \text{ passa por } ij)$$
$$+ \sum (\lambda_2(C) : C \in \mathcal{C} \text{ e } C \text{ passa por } ij)$$

para cara arco ij.

Decomposição de fluxos

A demonstração é algorítmica.

DECOMPOSIÇÃO-DE-FLUXO (N, A, x)

1 $\mathcal{P}, \lambda_1 \leftarrow$ DECOMPOSIÇÃO (N, A, x)

2 $\mathcal{C}, \lambda_2 \leftarrow$ DECOMPOSIÇÃO-DE-CIRCULAÇÃO (N, A, x)

3 **devolva** $\mathcal{P}, \lambda_1, \mathcal{C}, \lambda_2$