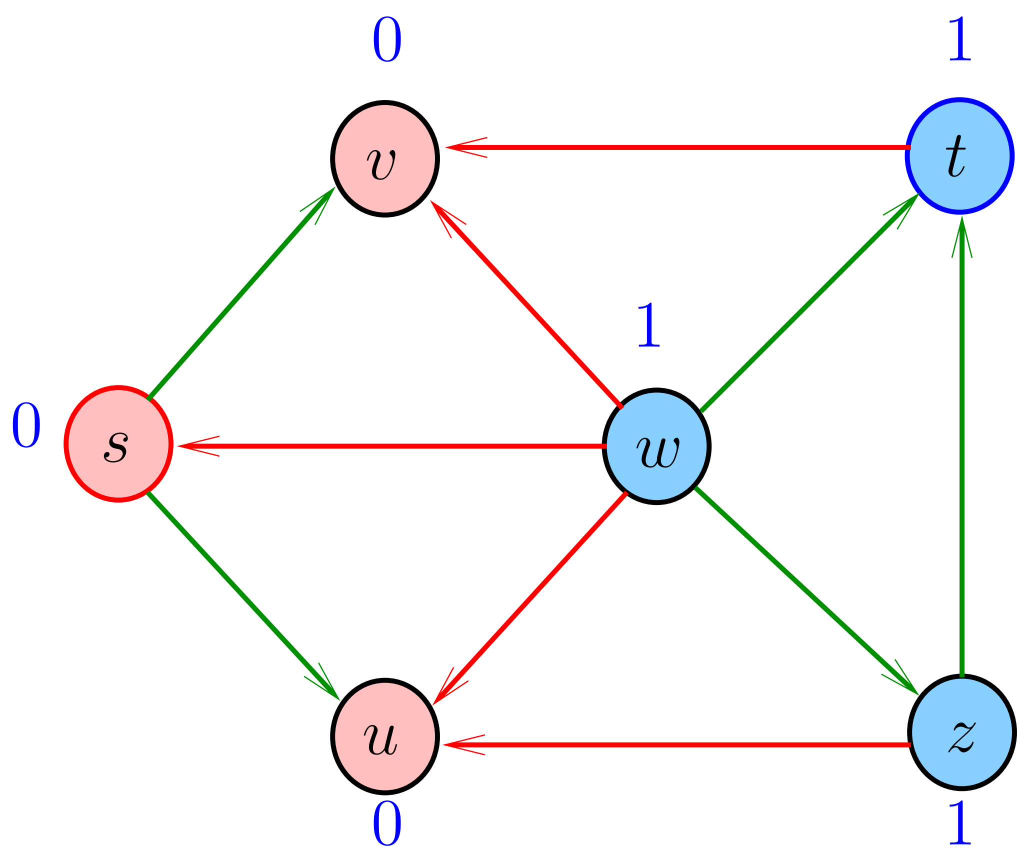
Melhores momentos

AULA 2

Propriedade de 0-Potenciais

Se y é um 0-potencial e existe um passeio de s a t então

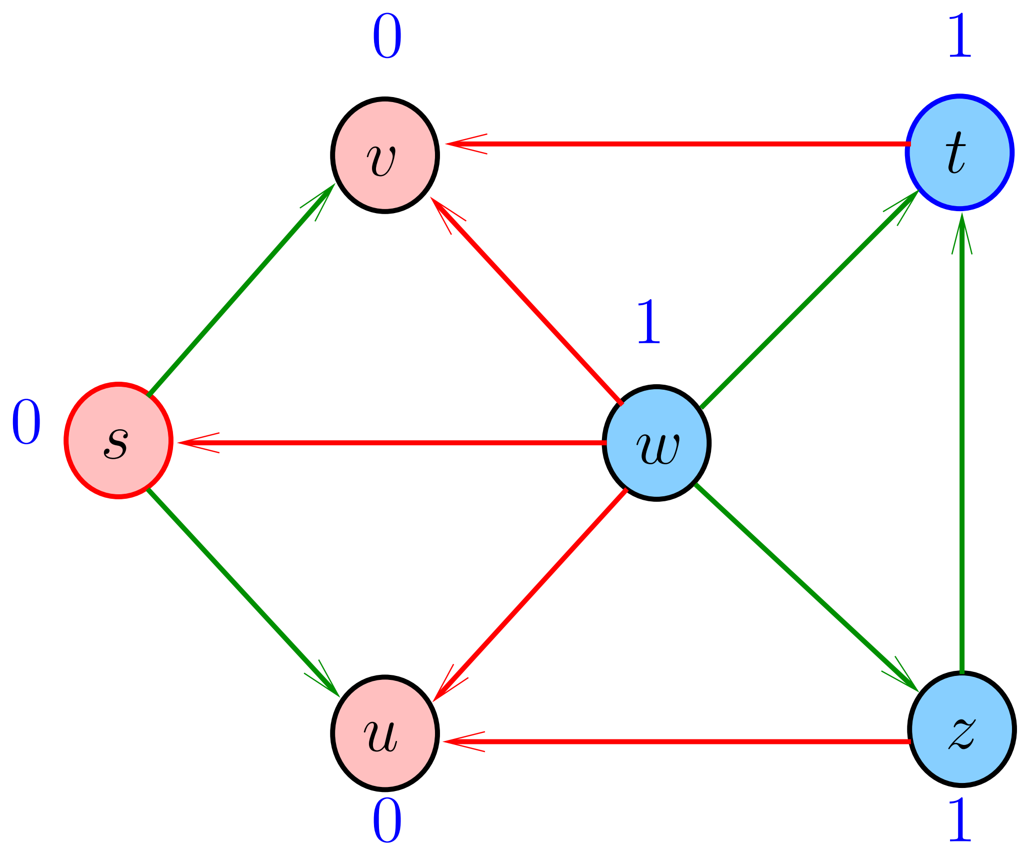
$$y(t) - y(s) \leq 0.$$



Propriedade de 0-Potenciais

Para mostrar que não existe um caminho de s a t basta exibir um 0-potencial tal que

$$y(t) - y(s) > 0.$$



Busca genérico (2)

Recebe dois nós s e t de um grafo (N, A) e devolve uma caminho de s a t ou um 0-potencial y tal que $y(t) - y(s) > 0$.

BUSCA-GENÉRICO (N, A, s, t)

para cada i em N **faça**
  $y(i) \leftarrow 1$
  $\pi(i) \leftarrow \mathrm{NIL}$
$y(s) \leftarrow 0$

enquanto $y(j) > y(i)$ **para** algum $ij \in A$ **faça**
  $y(j) \leftarrow y(i)$
  $\pi(j) \leftarrow i$

se $y(t) = 0$
  então devolva o st-caminho no grafo (N, A_π)
  senão devolva y

Correção

Início da última iteração:

- y é um 0-potencial
- se $y(t) = 0$ então (por (i2)) $\pi(t) \neq \text{NIL}$, logo (por (i3)) existe caminho de s a t
- se $y(t) = 1$ então (por (i1)) $y(t) - y(s) > 0$

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

Conclusão

Para quaisquer nós s e t de um grafo (N, A), vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe um 0-potencial y tal que $y(t) - y(s) > 0$.

Implementação do algoritmo genérico

BUSCA (N, A, s, t)

para cada i em N **faça**
    $A'(i) \leftarrow A(i) \quad y(i) \leftarrow 1 \quad \pi(i) \leftarrow \text{NIL}$
$y(s) \leftarrow 0 \quad L \leftarrow \{s\}$

enquanto $L \neq \emptyset$ **faça**
    escolha um nó i em L
    se $A'(i) \neq \emptyset$ **então**
        retire um arco ij de $A'(i)$
        se $y(j) = 1$ **então**
            $y(j) \leftarrow 0 \quad \pi(j) \leftarrow i \quad L \leftarrow L \cup \{j\}$
    senão $L \leftarrow L - \{i\}$

se $y(t) = 0$
    então devolva o st-caminho no grafo (N, A_π)
    senão devolva y

Invariantes

Na linha 3, antes da verificação da condição "$L \neq \emptyset$" valem, além de (i0)–(i3) as seguintes invariantes:

(i4) para cada arco pq, se $y(p) = 0$ e $y(q) = 1$ então $p \in L$;

(i5) $y(p) = 0$ para cada p em L;

(i6) para cada nó p e cada arco pq em $A(p) - A'(p)$, se $y(p) = 0$ então $y(q) = 0$.

Correção

No início da última iteração:

- Por (i4), $y(q) - y(p) \leq 0$ para todo pq; portanto, y é um 0-potencial.
- Se $y(t) = 1$, então (por (i1)) $y(t) - y(s) = 1 > 0$.
- Senão (por (i3)), há caminho de s a t.

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

AULA 3

Problema da Busca (continuação)

PF 3.3, 3.4

Consumo de tempo

Note que:

- $\leq n$ iterações passam pela linha 9
- $\leq \sum_{k \in N} |A(k)| = m$ iterações passam pelas linhas 6, 7, e 8
- consumo de tempo de cada iteração é $\mathrm{O}(1)$

Conclusão: o consumo de total de tempo das iterações das linhas 3–9 é $(n+m)\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n+m)$.

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 3–6 é

$$\leq n + m.$$

linha	consumo de todas as execuções da linha
0–1	$\mathrm{O}(n)$
2	$\mathrm{O}(1)$
3–9	$(n+m)\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n+m)$
10–12	$\mathrm{O}(n)$
total	$\mathrm{O}(n+1) + \mathrm{O}(2n+m)$
	$= \mathrm{O}(n+m)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo BUSCA é $O(n + m)$.

Busca em largura e em profundidade

- Se L no algoritmo BUSCA for manipulada como uma fila teremos um

  algoritmo de busca em largura

  ($=$ *breadth-first search* $=$ *BFS*).

- Se L no algoritmo BUSCA for manipulada como uma pilha teremos um

  algoritmo de busca em profundidade

  ($=$ *depth-first search* $=$ *DFS*).

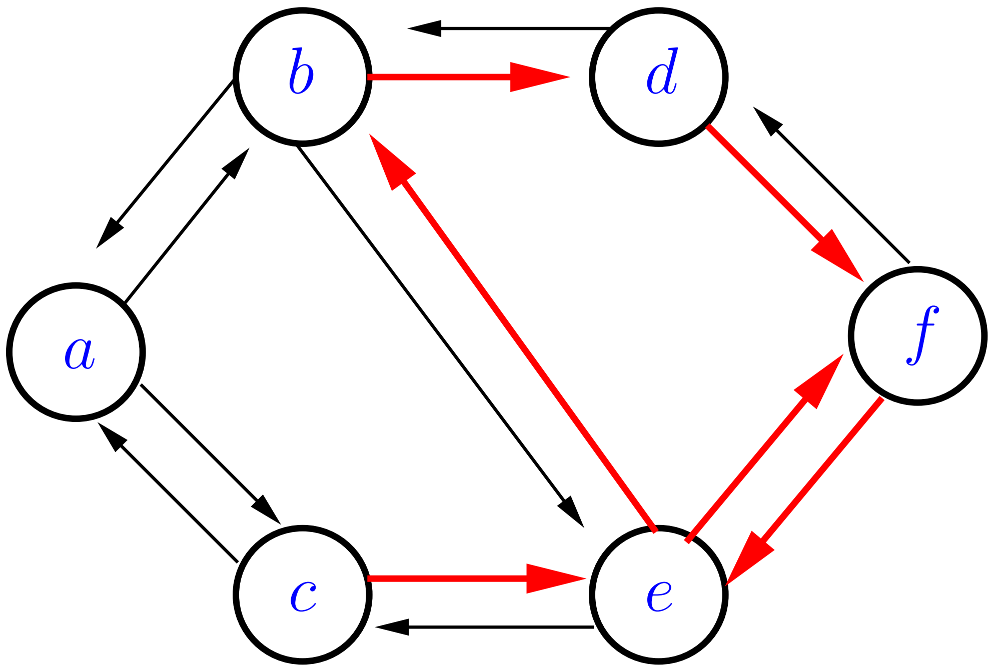
Ciclos e ordem topológica

PF 4.1, 4.2, 4.3

Passeios

Um passeio num grafo (N, A) é qualquer seqüência da forma $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_p \rangle$ onde (v_{k-1}, v_k) é um arco para $k = 1, \ldots, p$.

Exemplo: $\langle c, e, b, d, f, e, f \rangle$ é um passeio com origem em c é termino em f.

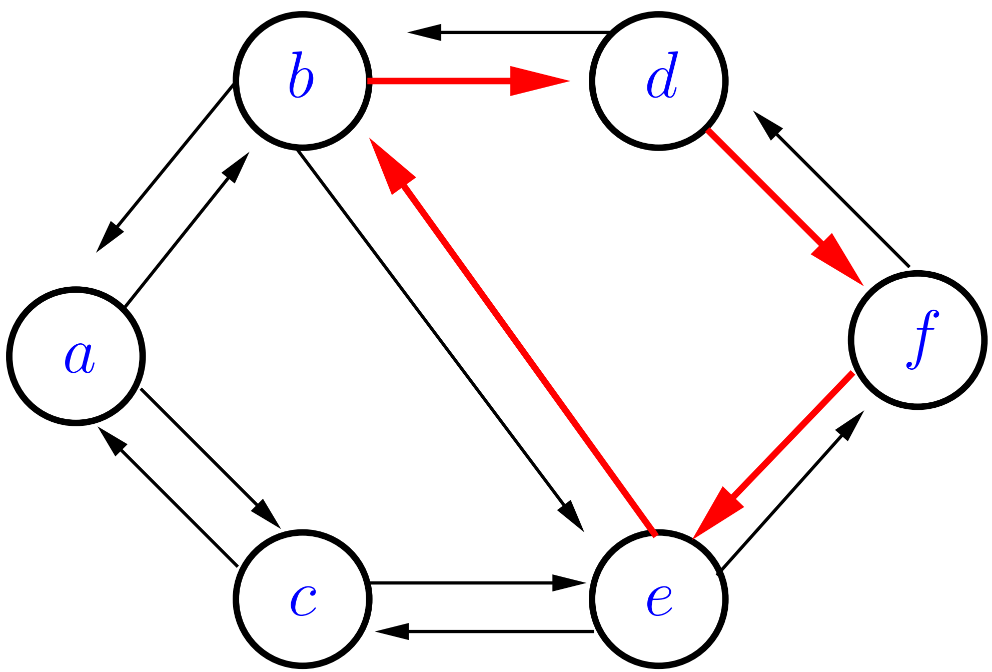


Ciclo

Um ciclo é um passeio $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_p \rangle$ em que $v_1, \ldots, v_p$ são distintos doia a dois e $v_0 = v_p$.

Um grafo é acíclico se não tem ciclos

Exemplo: $\langle f, e, b, d, f \rangle$ é um ciclo.



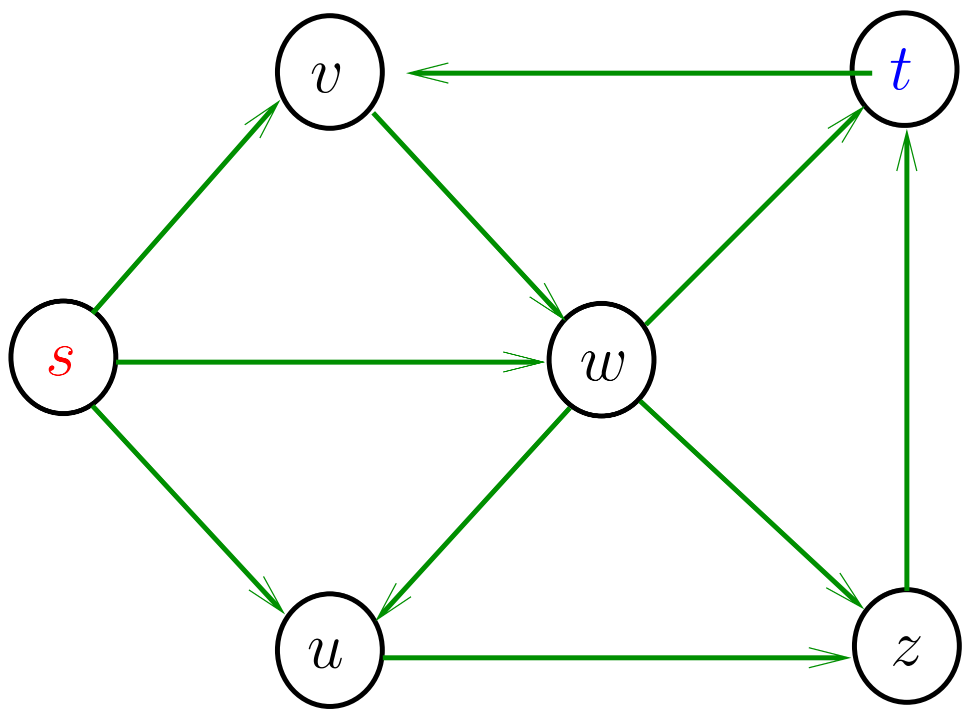
Problema

Problema do ciclo: Encontrar um ciclo de um grafo dado.

Problema

Problema do ciclo: Encontrar um ciclo de um grafo dado.

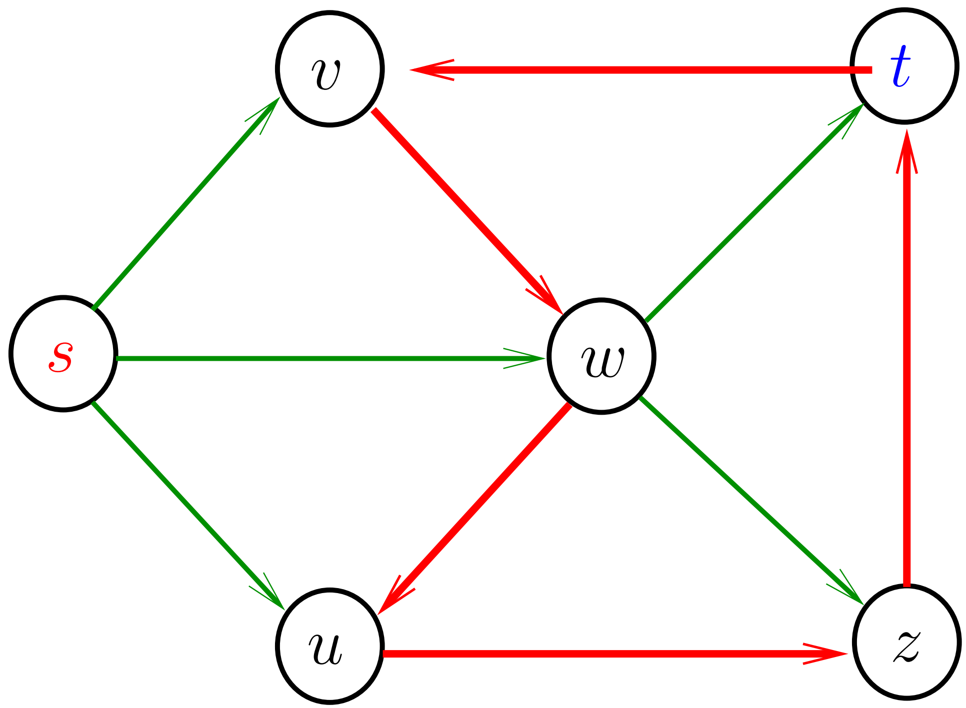
Entra:



Problema

Problema do ciclo: Encontrar um ciclo de um grafo dado.

Sai:



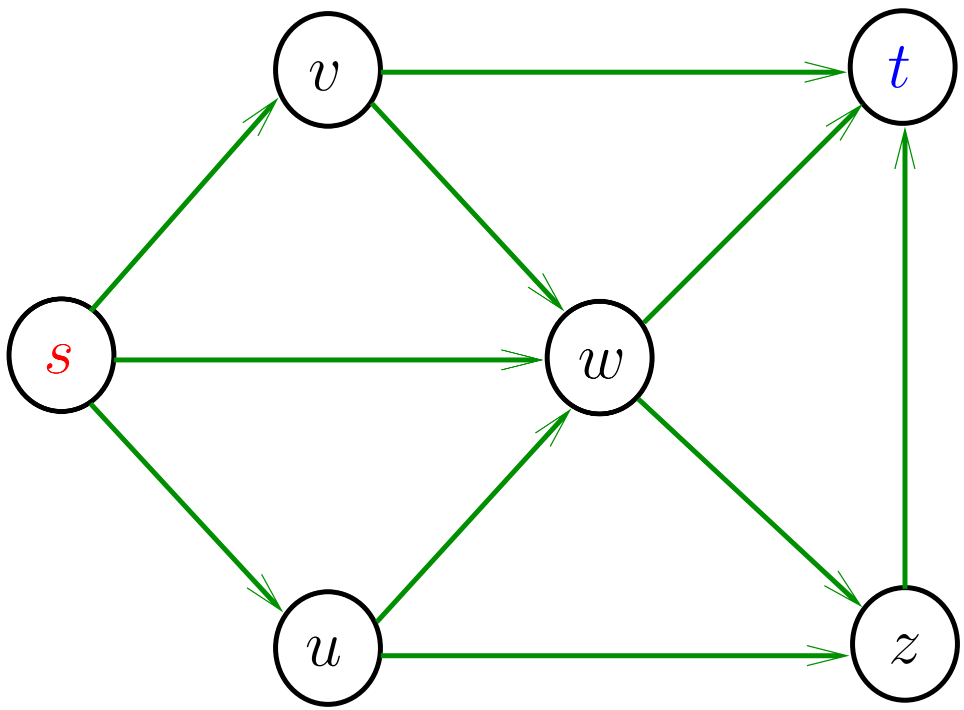
Condição de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema **não** tem solução?

Condição de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema **não** tem solução?

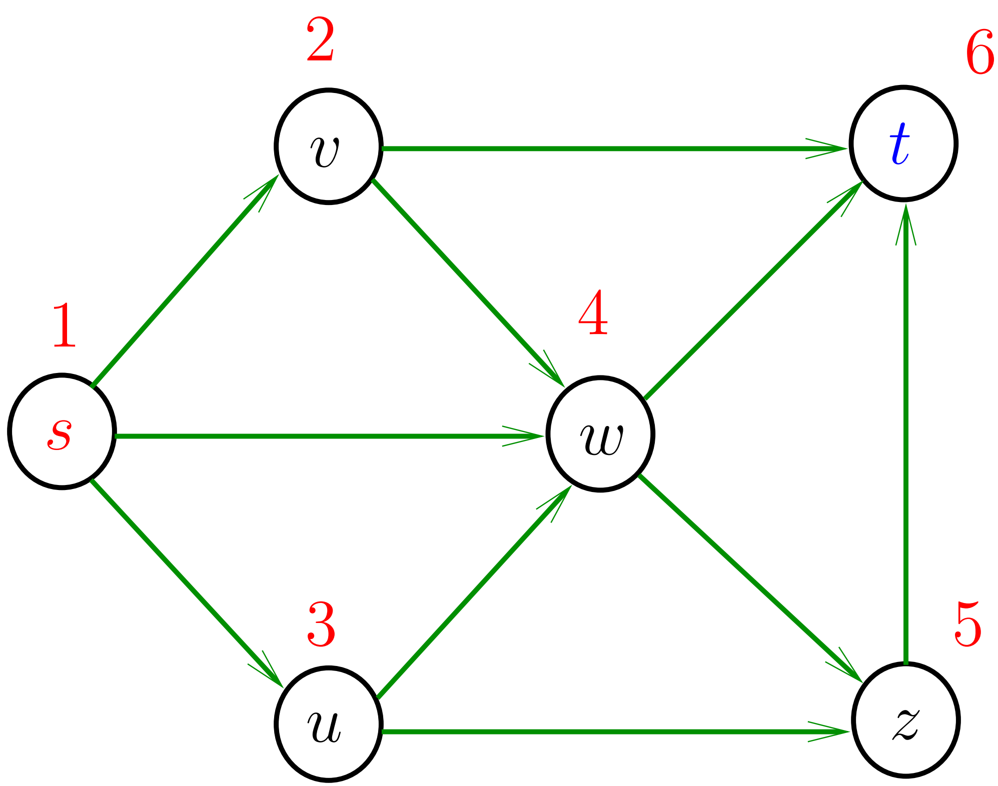
Entra:



Condição de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema **não** tem solução?

Sai: uma “certa ordem” dós nós

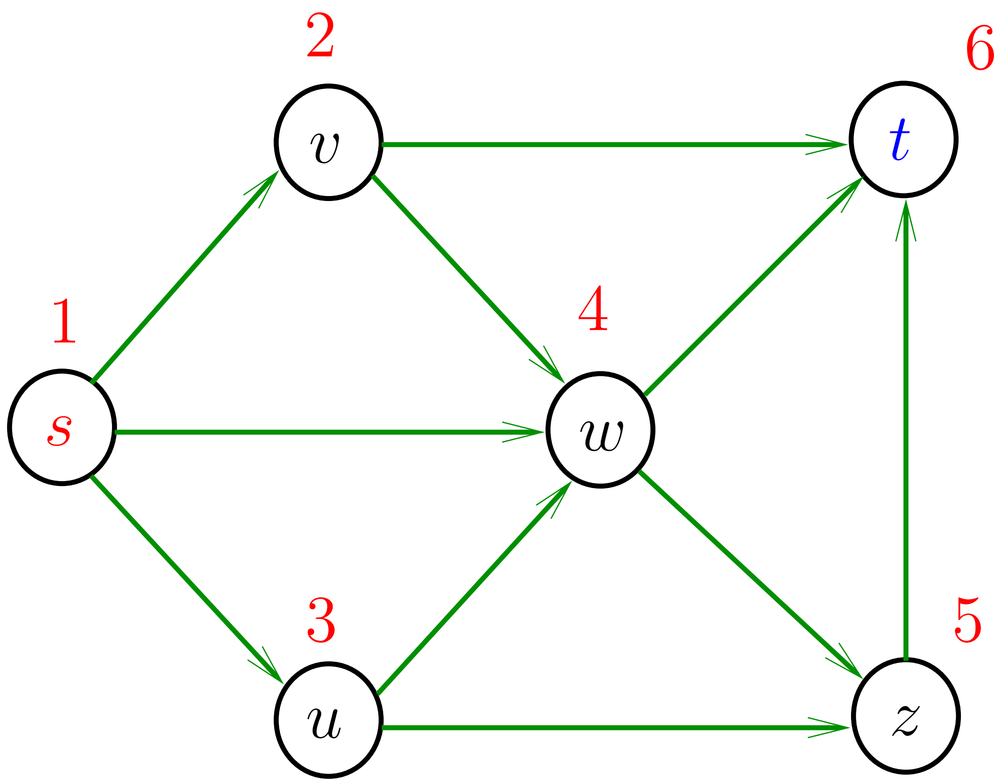


Ordem topológica

Uma enumeração $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ dos nós do grafo tal que

$$(v_p, v_q) \in A \Rightarrow p < q$$

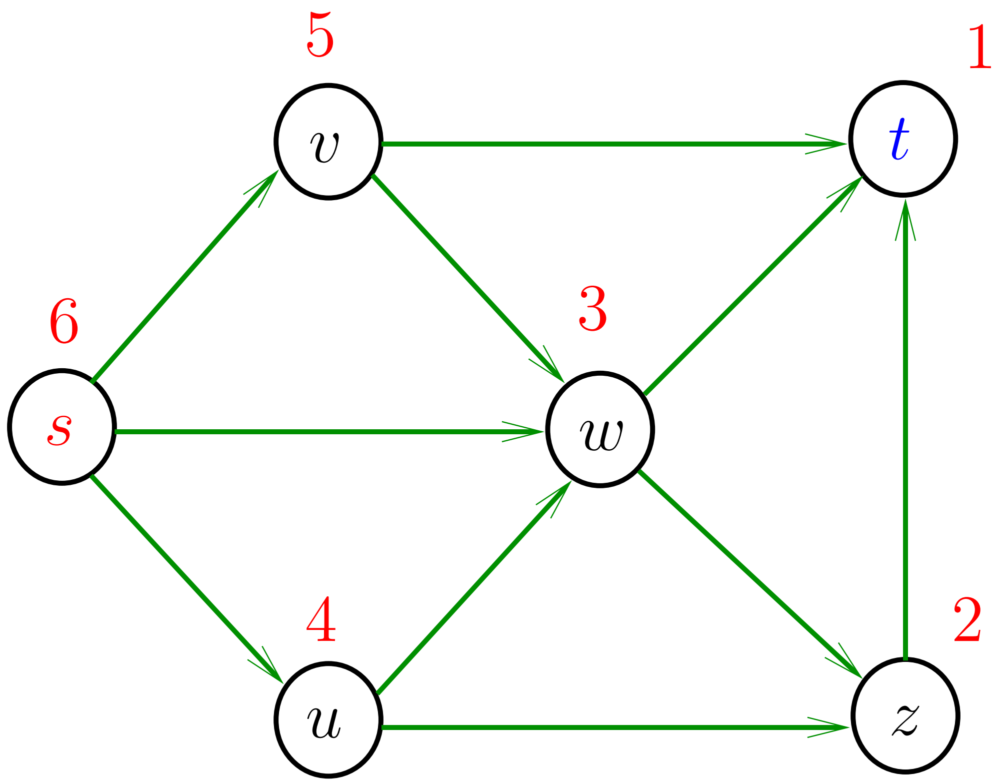
é conhecida como ordem topológica ($=$ topological order).



Condição de inexistências, ainda ...

Um -1-potencial é qualquer função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que

$$y(j) - y(i) \leq -1 \quad \text{para todo arco } ij.$$

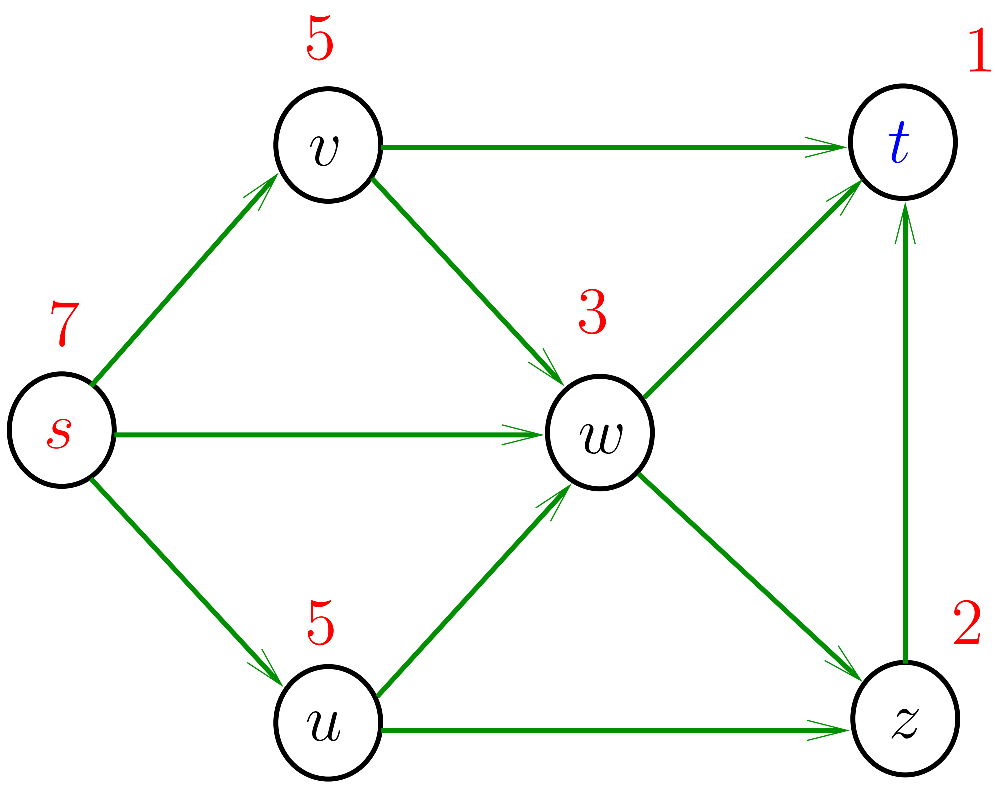


-1-Potenciais e ordem topológica

Se y é um -1-potencial então qualquer enumeração $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ dos nós tal que

$$y(v_1) \geq y(v_2) \geq \cdots \geq y(v_n)$$

é uma ordem topológica.

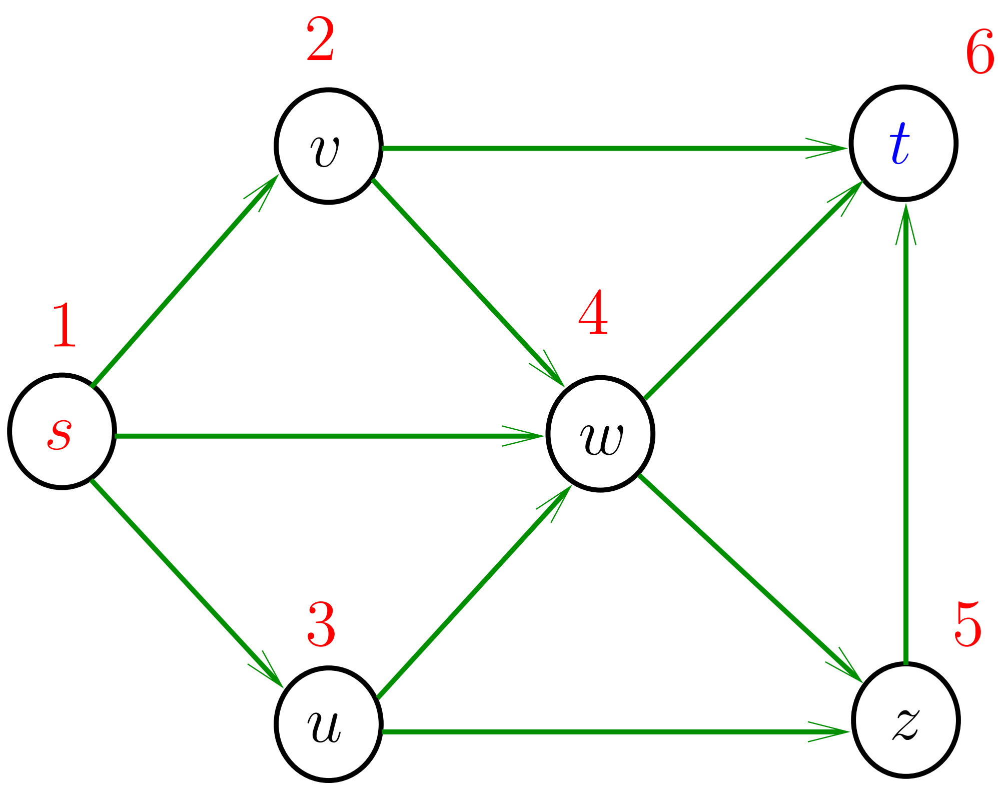


Ordem topológica e -1-potenciais

Se $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ é uma ordem topológica então

$$y(v_p) := n - p + 1$$

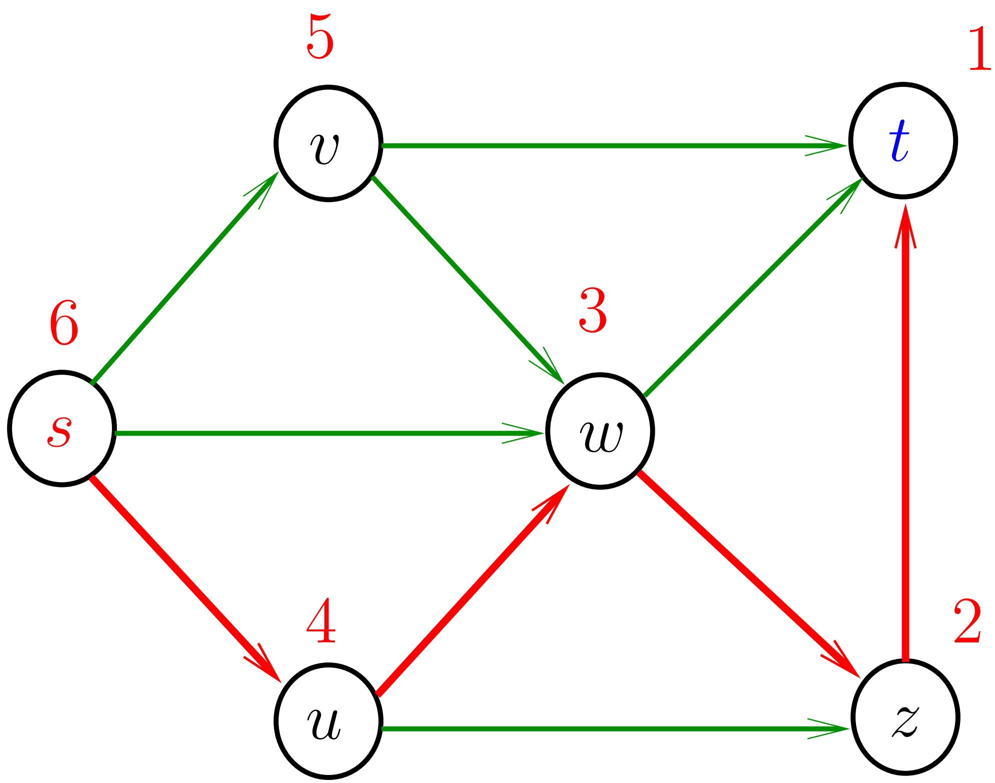
para $p = 1, \ldots, n$ é um -1-potencial.



Propriedade de -1-Potenciais

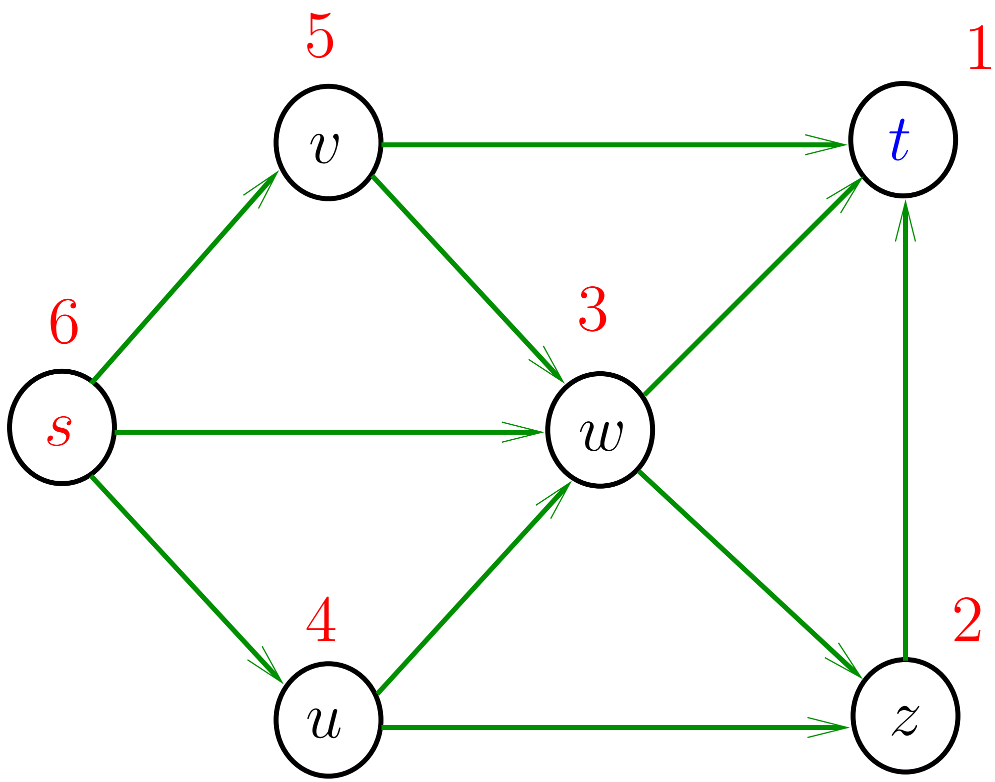
Se y é um -1-potencial e P é passeio de s a t então

$$y(t) - y(s) \leq -|P|.$$



Propriedade de -1-Potenciais

Para mostrar que não existe um ciclo basta exibir um -1-potencial.



DAG genérico

Recebe um grafo (N, A) e devolve uma ciclo ou um -1-potencial.

DAG-GENÉRICO (N, A)

para cada i em N **faça**
    $y(i) \leftarrow n + 1$ $\quad \triangleright$ $n + 1$ faz o papel de ∞
    $\pi(i) \leftarrow \mathrm{NIL}$

enquanto $y(j) > y(i) - 1$ **para** algum $ij \in A$ **faça**
    $y(j) \leftarrow y(i) - 1$
    $\pi(j) \leftarrow i$
    se $y(j) \leq 0$
        então devolva j e **pare**

devolva y

Invariantes

Na linha 4, antes da verificação da condição "$y(j) > y(i) - 1 \ldots$" valem as seguintes invariantes:

(i1) para cada arco pq no grafo de predecessores tem-se que $y(q) - y(p) \geq -1$;

(i2) para qualquer **passeio** P no grafo de predecessores,

$$y(t) \geq n + 1 - |P|,$$

onde t é o término de P.

(i2') para qualquer nó t vale que

no grafo de predecessores existe uma **passeio** com término em t com $\geq n + 1 - y(t)$ nós.

Correção

- Devido a condição da linha 4 é evidente que na linha 9 o algoritmo devolve um -1-potencial.
- Se o algoritmo pára após a execução da linha 8 temos que, pelo invariante (i2'), existe no grafo de predecessores um passeio com pelo menos

$$n + 1 - y(j) \geq n + 1 - 0 = n + 1.$$

Logo, o grafo de predecessores possui um ciclo. Este ciclo pode ser encontrado a partir de j.

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

Conclusão

Um grafo é acíclico se e somente se admite um -1-potencial (ou, se e somente se admite uma ordem topológica).

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 4–8 é

$$\leq n^2.$$

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-3	$\mathrm{O}(n)$
4	$n^2\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(n^2m)$
5-7	$n^2\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n^2)$
8	$\mathrm{O}(1)$
9	$\mathrm{O}(n)$
total	$\mathrm{O}(1) + \mathrm{O}(n^2) + 2\,\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(n^2m)$
	$= \mathrm{O}(n^2m)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
DAG-GENÉRICO é $O(n^2m)$.

Implementação do algoritmo genérico

Recebe um grafo (N, A) e devolve uma ciclo ou um -1-potencial.

DAG (N, A)
para cada i em N **faça**
    $A'(i) \leftarrow A(i)$
    $y(i) \leftarrow n + 1$
    $\pi(i) \leftarrow \text{NIL}$
rótulo $\leftarrow 1$

enquanto $y(s) = n + 1$ para algum $s \in N$ **faça**
    DAG–DFS$(N, A', s,$ *rótulo*$)$

    devolva y

O potencial y devolvido é uma numeração DFS pós-ordem.

DAG-DFS

DAG-DFS $(N, A', s, \textit{rótulo})$

$L \leftarrow \langle s \rangle$
enquanto $L \neq \langle\rangle$ **faça** $\triangleright$ L funciona como uma pilha
 seja i o primeiro elemento de L
 se $A'(i) \neq \emptyset$ **então**
  retire um arco ij de $A'(i)$
  se $y(j) = n + 1$ **então**
   $\pi(j) \leftarrow i$
   se j está em L
    então devolva j e **pare**
    senão acrescente j ao início de L
  senão $y(i) \leftarrow \textit{rótulo}$
   $\textit{rótulo} \leftarrow \textit{rótulo} + 1$
   retire i de L

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 8–19 é $\leq m$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\mathrm{O}(1)$
6-7	$\mathrm{O}(n)$
8-9	$\mathrm{O}(n+m)$
10-16	$\mathrm{O}(m)$
17-18	$\mathrm{O}(n)$
19	$\mathrm{O}(n)$

total $\quad \mathrm{O}(1) + 4\,\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(n+m)$

$$= \mathrm{O}(n+m)$$

Conclusão

$\boxed{\text{O consumo de tempo do algoritmo DAG é } O(m+n).}$