MAC 747 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

PROVA 1

1. Instruções

Esta prova é individual e deverá ser entregue até às 17 horas da segunda-feira dia 6 de outubro na secretaria do Departamento de Ciência da Computação (sala 256 do Bloco A).

2. Questões

1. (1.5 ponto) Pelo Teorema da Galeria de Arte (cf. Chvátal [1], veja também Fisk [3]) sabemos que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrirem qualquer polígono com n vértices.

   Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um polígono (vértices em ordem anti-horário a medida que eles ocorrem quando percorremos ∂P) e seja $V_k := \{v_i \mid i \mod 3 = k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Então guardas colocados nos vértices em V_k cobrem o polígono P para algum $k \in \{0, 1, 2\}$. Mostre através de um exemplo que o professor Sperto está enganado.
2. (2 pontos—Exercício 35.2-2 de [2]) Um *disco* (ou circulo) é a região do plano limitada por um circunferência. Um disco é dado através das coordenadas do seu centro e do valor do seu raio. Dois discos intersectam se eles tem algum ponto em comum. Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $O(n \log n)$ que dados n discos decide se qualquer dois deles intersectam.
3. (2 pontos—Algoritmo de tempo $O(n^2)$ para triangularização) O algoritmo baseado em remoção de orelhas que foi visto em sala de aula tem complexidade de tempo $O(n^3)$. Nesta questão você desenvolverá um algoritmo de complexidade de tempo $O(n^2)$ que usa a mesma estrutura de dados e a função `Diagonal`.

   Uma chamada para a função `Diagonal` custa tempo $O(n)$. Logo, para obtermos um algoritmo de complexidade de tempo $O(n^2)$, a função `Diagonal` poderá ser chamada apenas $O(n)$ vezes. Imagine que você primeiro determina quais as potenciais diagonais de orelhas são de fato uma diagonal do polígono P, e marque o vértice v_i como '`orelha`' se $v_{i-1}v_{i+1}$ é uma diagonal, caso contrário marque o vértice como '`não-orelha`'. Com isto já gastamos $O(n^2)$ operações elementares.

Date: 1 de outubro de 1997.

Seja P' o polígono de $n-1$ vértices resultante do polígono P após removermos uma de suas orelhas (digamos) $\triangle(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$. Responda as seguintes perguntas e justifique suas respostas:

(a) É verdade que se o vértice v_j, $j \neq i$, está marcado como '`orelha`' em P então v_j continua sendo a ponta de uma orelha em P'?
(b) Para quais valores de j a marca em v_j poderá ser alterada?
(c) Quantas novas candidatas a diagonais precisam ser verificadas? (Ou seja, quantas novas chamadas da função `Diagonal` precisam ser feitas?)
(d) Em quais condições um vértice marcado como `não-orelha` em P deverá ser marcado como `orelha` em P'?
(e) As marcas `orelha` e `não-orelha` de P' herdadas por P podem ser atualizadas em tempo $O(n)$?

Se a resposta para a última pergunta é sim então um algoritmo de triangularização de complexidade de tempo $O(n^2)$ pode ser obtido simplesmente mantendo-se as marcas `orelha` e `não-orelha` dos vértices do polígono corrente e a cada iteração escolhemos uma orelha do polígono corrente para ser removida.

Formule precisamente quais segmentos de P' precisam ser analisados para termos todas as orelhas de P' devidamente marcadas. Prove este lema, escreva o algoritmo resultante e a analise a sua complexidade de tempo.

4. (1 ponto—Simulação: triangularização de polígonos monótonos) Simule (de alguma maneira clara) a execução do algoritmo (linear) para triangularização de polígonos monótonos com o polígono da Figura 1.
5. (1 ponto—Simulação: partição em polígonos monótonos) Simule (de alguma maneira clara) a execução do algoritmo de varredura de partição em polígonos monótonos com o polígono da Figura 2.
6. (1 ponto—Algoritmo de Hertel e Mehlhorn: pior caso em relação ao ótimo) Encontre um polígono genérico que pode levar ao pior caso do algoritmo de Hertel e Mehlhorn em relação à partição ótima: o algorimo de Hertel e Mehlhorn produz $2r$ partes convexas, mas existe uma partição por diagonais com $\lceil r/2 \rceil + 1$ partes convexas (r é o número de vértices reflexos do polígono).
7. (1.5 ponto) Seja P um polígono convexo cujos vértices estão em um vetor em ordem anti-horária. Descreva um algoritmo que decide se um dado ponto p pertence a P. A complexidade de tempo do seu algoritmo deve ser $O(\log n)$.

Referências

1. V. Chavátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, Journal of Combinatorial Theory (B) **18** (1975), 39–41.
2. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, and R.L. Rivest, *Introduction to algorithms*, The MIT Electrical Engineering and Computer Scienece Series, The MIT Press, MacGraw-Hill Book Company, 1990, QA758 C811i.
3. S. Fisk, *A short proof of Chavátal's watchman theorem*, Journal of Combinatorial Theory (B) **24** (1978), 374.

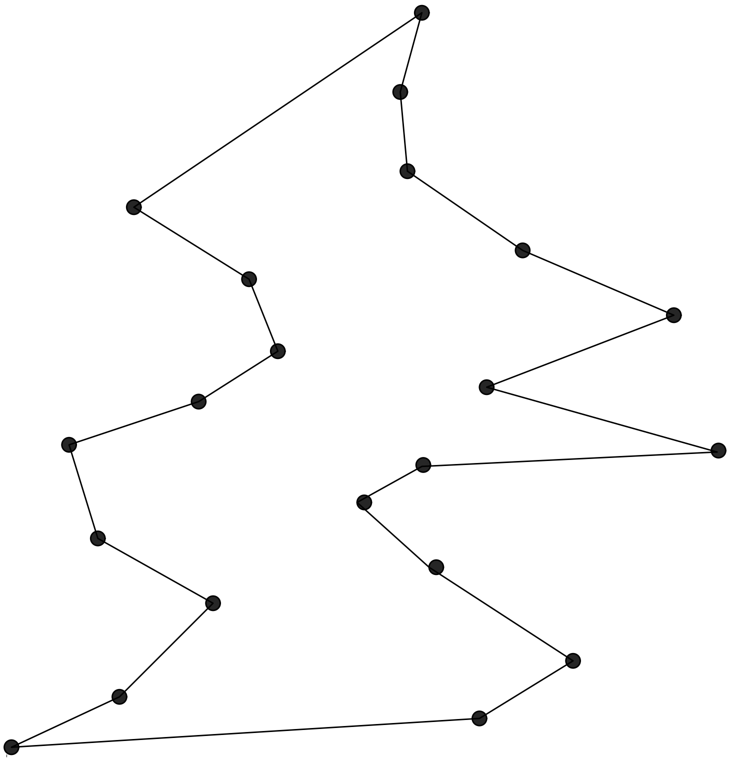

Figura 1. Um polígono monótono.

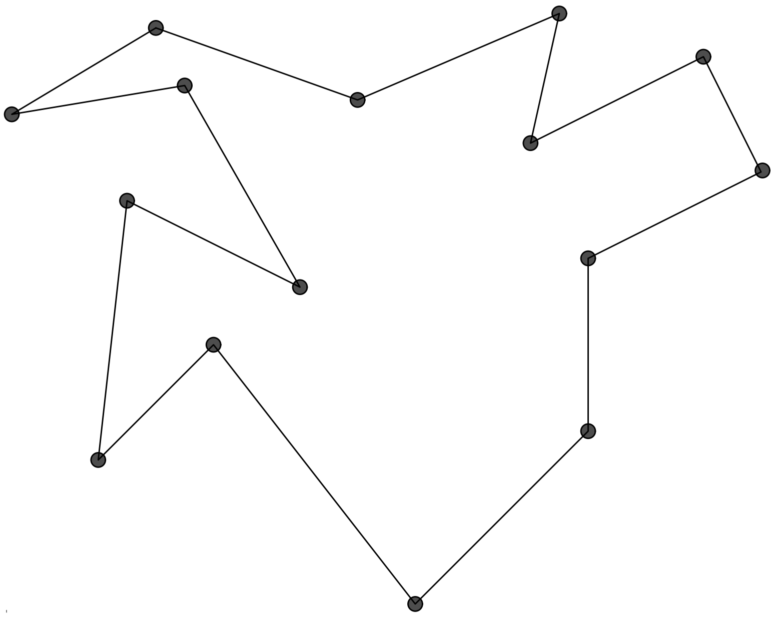

Figura 2. Um polígono para ser particionado em polígonos monótonos.