Survey sobre Diagrama de Voronoi

Luis Antônio Brasil Kowada

Dezembro, 1997

Abstract

Este trabalho pretende dar uma visão geral do que vem a ser Diagrama de Voronoi, cobrindo o seu histórico, conceituação, propriedades, importância, complexidade computacional, além de algumas aplicações.

1 Introdução

Há muitos problemas que podem ser reduzidos a encontrar a região mais próxima de um determinado ponto em relação a outros. A forma que se usa atualmente para isso, é através de Diagrama de Voronoi, como pode ser visto pelos inúmeros artigos publicados sobre o assunto na literatura relacionada com Geometria Computacional e com Ciência Natural [Aur91]. Para um conjunto S de pontos no plano, o Diagrama de Voronoi consiste de uma partição planar em regiões, onde cada região r_p é o sub-espaço contendo os pontos do plano mais perto de $p \in S$, em relação aos outros pontos de S.

2 Definições

A área que trata com problemas geométricos do ponto de vista computacional, é chamada de *Geometria Computacional*, isto é, desenvolvimento e análise de algoritmos para problemas geométricos [Aur91].

Seja S um conjunto de $n$pontos no plano, também chamados de *sites* , o *domínio* de $p \in S$ sobre q é definido como sendo o subconjunto de pontos do plano que estão mais próximos de p do que de q .

$$dom(p,q) = \{x \in \Re / \delta(x,y) \leq \delta(x,y)\}$$

onde δ é a função de distância euclidiana.

A *região* de um site $p \in S$ é a interseção dos domínios de p em relação a todos os outros pontos de S.

$$reg(p) = \bigcap_{q \in S/\{p\}} dom(p,q)$$

.

O conjunto de regiões forma uma partição planar e é chamado de *Diagrama de Voronoi*, denominado por V(S). Alguns chamam o diagrama de Voronoi de *Dirichlet Tessellation* [1], outros já dizem que estes dois conceitos possuem algumas diferenças [OkS92].

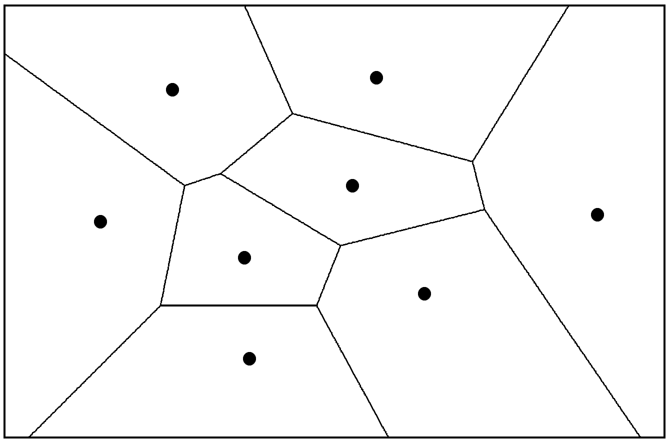

Figure 1: Exemplo de Diagrama de Voronoi

As arestas que separam as regiões no Diagrama de Voronoi são chamadas de *Arestas de Voronoi* e os cruzamentos destas arestas são os *Vértices de Voronoi.*

3 Propriedades

O diagrama de Voronoi possui uma série de características próprias. Aqui estamos listando apenas algumas que são muito importantes do ponto de vista matemático e computacional.

Proposição 3.1 *Como as regiões são formadas a partir da interseção de n-1 semi-planos, então elas são polígonos convexos (abertos ou fechados), e com no máximo n-1 arestas e vertices.*

Por isso cada região é também chamada de *Polígono de Voronoi.*

Proposição 3.2 *Cada ponto de uma aresta é equidistante de exatamente 2 sites e cada vértice da região é equidistante de pelo menos 3 sites.*

Proposição 3.3 *O diagrama de Voronoi de um conjunto S de n sítios tem no máximo 2n-5 vértices e 3n-6 arestas.*

Esta é umas das razões mais frequentes para se usar o diagrama de Voronoi na resolução de diversos problemas. Outra razão é o fato de V(S) manter as informações sobre a vizinhança de maneira explícita e computacionalmente prática.

4 Diagrama de Delaunay

O grafo dual de uma diagrama de Voronoi Vor(S) é o grafo cujo vértices são os sítios de S e dois vértices são conectados por uma aresta se as regiões de Voronoi são vizinhas. Este diagrama é chamado de *Diagrama de Delaunay* e é denotado por Del(S).

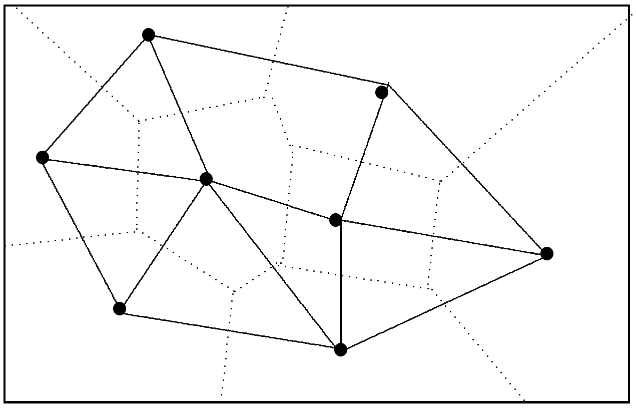

Figure 2: Exemplo de diagrama de Delaunay

Proposição 4.1 *O diagrama de Delaunay é uma triangularização do conjunto de sítios S.*

Proposição 4.2 *A construção do diagrama de Delaunay pode ser construida a partir do diagrama de Voronoi em tempo linear, e vice-versa.*

5 Aplicações em Ciência da Computação

5.1 Pesquisa em arquivo associativo

Suponha um arquivo com n registros (com 2 atributos cada), dado um novo registro R, quer-se saber que outro registro possui os atributos mais similares a este. Este problema foi proposto primeiramente em [Knu73] como uma generalização para 2-D do problema de se encontrar o melhor registro considerando apenas um atributo. Há uma solução óbvia com complexidade $O(\mathrm{n})$, pesquisando todos os registros, mas usando o diagrama de Voronoi se consegue $O(\lg\, n)$. A versão geométrica deste problema é conhecido como *Post-office Problem*, onde os pontos em vez de registros são postos de correio, o novo ponto, em vez de novo registro é uma casa e os atributos são coordenadas no plano.

5.2 Escalonamento no acesso a blocos

Ao se projetar um sistema operacional, um dos problemas encontrados é definir uma política de acesso a blocos no disco, de forma que o cabeçote de leitura/gravação mova o menos possível. A distância entre dois pontos percorrida pelo cabeçote é medida pela métrica L_1, distância Manhattan, isto é, dist(p,q)=$|q_x - p_x| + |q_y - p_y|$. Encontrar a melhor solução é um problema NP-completo, como foi mostrado por [Lee80]. Mas, uma solução aproximada menor que 2 vezes a ótima pode ser encontrada usando o diagrama de Voronoi. Isso é feito da seguinte forma: Primeiro, encontra-se, em $O(n\lg n)$ o diagrama de Voronoi induzido de baixo da métrica L_1 para n pontos requisitados.Em seguida, a árvore geradora de comprimento mínimo é construída, onde cada vértice da árvore está ligada apenas aos pontos vizinhos segundo a métrica L_1. Cada vértice da árvore é acessado duas vezes para o acesso a todos os pontos da entrada.

5.3 Detecção de Colisão

No movimento de partes de um robô, deve-se estar atento se não há obstáculos no caminho. Isto pode ser resolvido, definindo círculos ao redor de pontos críticos (obstáculos) , cujo raio é a tolerância do sistema. Todos os círculos cujo centro pertence ao mesmo objeto, possuem a mesma cor, e circulos de objetos diferentes possuem cores distintas. O problema pode, então, se reduzido a identificação de interseção de círculos coloridos. [Aur88], que pode ser resolvido em $O(n\lg n$ usando diagrama de Voronoi, porque dois circulos só se cruzam se são vizinhos no diagrama de Voronoi.

6 Perspectivas Históricas

O conceito de diagrama de Voronoi existe desde o século XVI. Em 1644, Descartes usou-o para descrever a forma como ele via que a matéria está distribuída no universo. Uma reprodução do diagrama feito por Descartes pode ser vista em [OkS92].

6.1 Ponto de Vista do Cientista Natural

Estrutura que existe de per se em alguns processos naturais ex. Cristais que começam a crescer no espaço homogeneamente, em todas as direções e param quando encostam um nos outros.

The picture below shows a dried lake-bed, at Salar de Atacama in northern Chile. A figura abaixo mostra o fundo de um lago em Salar de Acama, norte do Chile, cuja água evaporou, e a superfície foi se contraíndo, devido a grande quantidade de sal que continha. Pode-se perceber o contorno dos polígonos, formado pela cristalização do sal, com a forma de polígono de Voronoi.

Figure 3: Um exemplo de Diagrama de Voronoi encontrado na natureza

6.2 Ponto de Vista do Matemático

Estrutura auxiliar para investigar e calcular objetos matematicamente relacionados. Uma das mais antigas motivações matemáticas para estudar o diagrama de Voronoi foi a teoria das formas quadráticas, formulada por [Gauss1840]. Ele observou que formas quadráticas têm uma interpretação geométrica em termos do diagrama de Voronoi para sites que são paraleloedralmente ordenados no espaço.

6.3 Ponto de Vista do Cientista da Computação

O diagrama de Voronoi fornece uma estrutura de dados muito útil para a resoluções de problemas intrinsicamente geométricos. Inicialmente, é claro, o identificação do diagrama de Voronoi era feita manualmente, e não havia muita exatidão, principalmente nos casos em que havia muitos sites equidistantes a um ponto (condição degenerada). Uma tentativa de algoritmo usada decadas atrás era delinear o diagrama no plano, região por região, separando os sites vizinhos ao site analisado [Aur91]. Isso é claro, não era muito preciso e eficiente. Outra versão que surgiu era um algoritmo incremental que construia o diagrama vértice por vértice. Isto é, a cada novo vértice acrescentado, verifica-se o que ocorre com o entorno dele, comparando-o com os outros vértices. Logo o algoritmo possuia complexidade $O(n^2)$.

7 Diagrama de Voronoi e Ordenação

7.1 Quota inferior

Teorema 7.1 *Para o problema de identificação do diagrama de Voronoi a partir de S, não existe algoritmo com complexidade de tempo menor do que O(n · lg n).*

Demostração Sabe-se que o problema de ordenação possui cota inferior de $O(\text{n} \cdot \text{lg n})$. Como o problema de ordenação pode ser reduzido ao problema de construir uma triangularização, logo a triangularização de Delaunay possui cota inferior de $O(\text{n} \cdot \text{lg n})$. E esta por sua vez pode ser transformada para o diagrama de Voronoi em tempo linear, por isso, se o diagrama de Voronoi pudesse ser feito com menos de $O(\text{n} \cdot \text{lg n})$ operações, o problema de ordenação também poderia. [3]

[For88] mostrou que a pré-ordenação dos pontos em ambos os eixos, diminui a ordenação para $O(\text{nlglg}n)$.

7.2 Algoritmo Dividir para Conquistar

Como o diagrama de Voronoi possui uma relação muito próxima com o problema de ordenação, a classe de algoritmos *Dividir para Conquistar* se adequa muito bem a ele. Estes algoritmos podem ser divididos em 2 partes:

- **Divisão** O problema é fatiado em sub-problemas iguais que mantém a mesma estrutura do problema original, mas com um tamanho menor de entrada.

- **Conquista** Depois que um problema não pode mais ser sub-dividido, começa a fase de juntar os resultados parciais até voltar novamente ao problema original, mas com a solução. Alguns algoritmos desta classe concentram o seu esforço no processo de divisão como é o caso do quick-sort. Em outros, como o mergesort, a complexidade maior fica por conta da conquista.

8 Computando o Diagrama de Voronoi em Paralelo

Os algoritmos de Divisão e Conquista podem ser facilmente paralelizados. Por isso, logo surgiram algoritmos que computam o diagrama de Voronoi usando vários processadores. O modelo de computação mais usado para isso é o CREW PRAM (concurrent-read, exclusive-write parallel random access machine), que compartilham uma memória em comum. Usando $O(\text{n})$ processadores, onde n é o tamanho da entrada, consegue-se uma complexidade de apenas $O(\text{lg}n)$. Uma implementação disso pode ser vista em : [4].

References

[Aur88] Franz Aurenhammer. Improved algorithms for disc and balls using power diagrams. Journal Algorithms, 9:151–161, 1988.

[Aur91] Franz Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. ACM Computing Survey, 1991.

[For88] S. Fortune. Recursion der 'untersuchunger uber die eigenshaften der positiven ter naren quadratischen formen von ludwig august seeber-sorting helps for voronoi diagrams. manuscrito ATT Bell Lab., 1988.

[Knu73] Donald Knuth. *Approximation algorithms for packing small itensThe ARt of Coputer Programming III: Sorting and Serching*. Addison-Wesley, 1973.

[Lee80] D. T. Lee. Two-dimensional voronoi diagrams in the l_p-metric. *Journal ACM*, 27:604–618, 1980.

[OkS92] A. Okabe and k. Sugihara. *Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. Wiley and Sons, 1992.

Alguns sites interessantes sobre o assunto:

1 http://www.astro.virginia.edu/ eww6n/math/VoronoiDiagram.html

2 http://maths.uwa.edu.au/ watson/natural.html

3 http://ime.usp.br/ coelho/mac747/voronoisec5.ps

4 http://www.info.waseda.ac.jp/muraoka/members/kono

5 http://simon.cs.cornell.edu/Info/People/chew/Delaunay.html