MAC 722 – Complexidade Computacional

Primeira lista de exercícios – Entrega **30 de março de 1998**

**Exercício 1 (1.4.9)**
Mostre que para qualquer polinômio $p(n)$ e qualquer constante $c > 0$ existe um inteiro $n_0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $2^{cn} > p(n)$. Calcule este $n_0$ quando

(a) $p(n) = n^2$ e $c = 1$;

(b) $p(n) = 100n^{100}$ e $c = 1/100$.

**Exercício 2**

(a) Suponha que seja dado um algoritmo $A$ que, dado um grafo $G$, *decida* se existe um emparelhamento perfeito em $G$. Mostre como, usando $A$, você pode obter um algoritmo que, dado $G$, *encontra* um emparelhamento perfeito em $G$ se o mesmo existir. Mostre também que se $A$ roda em tempo polinomial, então o seu algoritmo também roda em tempo polinomial.

(b) Suponha que seja dado um algoritmo $A$ que, dado um grafo $G$, *encontra* em $G$ um emparelhamento perfeito, se o mesmo existir. Mostre como, usando $A$, você pode obter um algoritmo que, dado $G$, *decide* se existe um emparelhamento perfeito em $G$. Mostre também que se $A$ roda em tempo polinomial, então o seu algoritmo também roda em tempo polinomial.

**Exercício 3 (2.8.8)**
Suponha que máquinas de Turing podem *remover* e *inserir* símbolos nas fitas, ao invés de somente escrever.

(a) Defina cuidadosamente a função de transição e a computação de tal máquina.

(b) Mostre que se tal máquina opera em tempo $f(n) \geq n + 2$, então ela pode ser simulada por uma máquina de Turing comum operando em tempo $O(f^2(n))$.

**Exercício 4**
Descreva uma máquina de Turing para calcular:

(a) $\lceil \log n \rceil$;

(b) $n + m$.

No item (b), considere que a entrada é codificada da forma

$$\triangleright x + y$$

onde $x$ e $y$ são as representações binárias de $n$ e $m$ e o $+$ é um símbolo especial.

**Exercício 5 (2.8.11)**
(**Linguagens regulares**) Suponha que uma linguagem $L$ é decidida por uma máquina de Turing com entrada e saída que usa espaço constante.

(a) Mostre que existe uma máquina de Turing equivalente que decide $L$ com apenas um string de entrada "read-only".

Tal máquina é chamada de um *two-way finite automaton*. Um *autômato finito* é um two-way finite automaton como movimento de cursor somente para a direita ($\rightarrow$). Uma linguagem decidida por um autômato finito é dita *regular*.

(b) Mostre que a seguinte linguagem é regular:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* | x \text{ contém pelo menos dois 0s mas não dois 0s consecutivos}\}.$$

**Exercício 6 (2.8.14)**
Dê uma prova detalhada do Teorema 2.3. Isto é, defina explicitamente a construção de uma máquina de Turing que, usando espaço $2 + \epsilon f(n)$, simula a máquina de Turing que decice $L$ em espaço $f(n)$. Suponha que a máquina a ser simulada tem somente uma fita além da fita de entrada.