AULA 21

Máximo divisor comum

CLRS 31.1 e 31.2

Divisibilidade

Suponha que a, b e d são números inteiros.

Dizemos que d divide a se $a = k\,d$ para algum número inteiro k.
$d \mid a$ é uma abreviação de "d divide a

Se d divide a, então dizemos que a é um multiplo de d.

Se d divide a e $d > 0$, então dizemos que d é um divisor de a

Se d divide a e d divide b, então d é um divisor comum de a e b.

Exemplo:
os divisores de 30 são: $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$ e 30
os divisores de 24 são: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ e 24
os divisores comuns de 30 e 24 são: $1, 2, 3$ e 6

Máximo divisor comum

O máximo divisor comum de dois números inteiros a e b, onde pelo menos um é não nulo, é o maior divisor comum de a e b.

O máximo divisor comum de a e b é denotado por mdc(a, b).

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos a e b, determinar mdc(a, b).

Café com leite

Recebe números inteiros não-negativos a e b e devolve mdc(a, b).

Café-Com-Leite (a, b) $\triangleright$ supõe $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

1 **se** $b = 0$ **então devolva** a
2 **se** $a = 0$ **então devolva** b
3 $d \leftarrow b$
4 **enquanto** $d \nmid a$ **ou** $d \nmid b$ **faça**
5 $\quad d \leftarrow d - 1$
6 **devolva** d

Relações invariantes: na linha 4 vale que

(i0) na linha 4 vale que $1 \leq d \leq b$;
(i1) na linha 4 vale que $k \nmid a$ ou $k \nmid b$ para cada $k > d$; e
(i2) na linha 5 vale que $d \nmid a$ ou $d \nmid b$.

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$\Theta(1)$
3	$\Theta(1)$
4	$\mathrm{O}(b)$
5	$\mathrm{O}(b)$
6	$\Theta(1)$
total	$\Theta(3) + \mathrm{O}(b) = \mathrm{O}(b)$

Quando a e b são relativamente primos, ou seja mdc$(a, b) = 1$, o consumo de tempo do algoritmo é $\Theta(b)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo Café-Com-Leite é $\mathrm{O}(b)$.

No pior caso, o consumo de tempo do algoritmo Café-Com-Leite é $\Theta(b)$.

Se o valor de b dobra, o consumo de tempo pode dobrar.

Seja $\beta := \langle b \rangle$ o número de bits ou tamanho de b.
O consumo de tempo do algoritmo Café-Com-Leite é $\mathrm{O}(2^\beta)$.

Brincadeira

Usei uma implementação do algoritmo Café-Com-Leite para determinar mdc$(2147483647, 2147483646)$.
Vejam quanto tempo gastou:

```
meu_prompt> time mdc 2147483647 2147483646
mdc: mdc de 2147483647 e 2147483646 e' 1.

real    2m49.306s
user    1m33.412s
sys     0m0.099s
```

Algoritmo de Euclides

Recebe números inteiros não-negativos a e b e devolve mdc(a, b).

EUCLIDES (a, b) $\triangleright$ supõe $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

1 **se** $b = 0$

2 **então devolva** a

3 **senão devolva** EUCLIDES $(b, a \mod b)$

"$a \mod b$" é o resto da divisão de a por b.

Exemplo: mdc$(12, 18) = 6$, pois

```
mdc(12,18)
   mdc(18,12)
      mdc(12,6)
         mdc(6,0)
```

Correção

A correção do algoritmo EUCLIDES é baseado no seguinte fato.

Suponha que $a \geq 0$ e $b > 0$. Para cada $d > 0$ vale que

$$d \mid a \text{ e } d \mid b \quad \text{se e só se} \quad d \mid b \text{ e } d \mid a \bmod b.$$

Em outras palavras, os pares (a, b) e $(b, a \bmod b)$ têm os mesmos divisores.

Outro exemplo

```
mdc(317811,514229)
  mdc(514229,317811)
    mdc(317811,196418)
      mdc(196418,121393)
        mdc(121393,75025)
          mdc(75025,46368)
            mdc(46368,28657)
              mdc(28657,17711)
                mdc(17711,10946)
                  mdc(10946,6765)
                    mdc(6765,4181)
                      mdc(4181,2584)
                        mdc(2584,1597)
                          mdc(1597,987)
                            mdc(987,610)
                              mdc(610,377)
```

Outro exemplo (cont.)

```
mdc(377,233)
   mdc(233,144)
      mdc(144,89)
         mdc(89,55)
            mdc(55,34)
               mdc(34,21)
                  mdc(21,13)
                     mdc(13,8)
                        mdc(8,5)
                           mdc(5,3)
                              mdc(3,2)
                                 mdc(2,1)
                                    mdc(1,0)
```

mdc$(317811, 514229) = 1$

Mais brincadeirinha

Usei uma implementação do algoritmo EUCLIDES para determinar mdc$(2147483647, 2147483646)$.
Vejam quanto tempo gastou:

```
meu_prompt> time euclides 2147483647 2147483646
mdc(2147483647,2147483646)
  mdc(2147483646,1)
    mdc(1,0)
euclides: mdc de 2147483647 e 2147483646 e' 1.

real    0m0.007s
user    0m0.002s
sys     0m0.004s
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES é proporcional ao número de chamadas recursivas.

Suponha que a função EUCLIDES faz k chamadas recursivas e que na 1a. chamada ao algoritmo tem-se que $a \geq b > 0$.

Sejam

$$(a, b) = (a_0, b_0), (a_1, b_1), \ldots (a_k, b_k) = (\text{mdc}(a, b), 0)$$

os valores dos parâmetros no início de cada chamada.

Portanto, que $a_{i+1} = b_i$ e $b_{i+1} = a_i \bmod b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Número de chamadas recursivas

Para números inteiros p e q, $p \geq q > 0$ vale que

$$p \bmod q < p/2$$

Desta forma,

$$\begin{array}{ccccccccc}
b_2 & = & a_1 \bmod b_1 & = & b_0 \bmod b_1 & < & b_0/2 & \leq & b/2^1 \\
b_4 & = & a_3 \bmod b_3 & = & b_2 \bmod b_3 & < & b_2/2 & \leq & b/2^2 \\
b_6 & = & a_5 \bmod b_5 & = & b_4 \bmod b_5 & < & b_4/2 & \leq & b/2^3 \\
b_8 & = & a_7 \bmod b_7 & = & b_6 \bmod b_7 & < & b_6/2 & \leq & b/2^4 \\
\vdots & = & \vdots & = & \vdots & < & \vdots & \leq & \vdots
\end{array}$$

O valor do 2o. parâmetro é reduzido a menos da sua metade a cada 2 chamadas recursivas.

Número de chamadas recursivas

Seja t o número inteiro tal que

$$2^t \leq b < 2^{t+1},$$

ou seja, $t = \lfloor \lg b \rfloor$.

Da desigualde estrita concluímos que o número de chamadas recursivas é $\leq 2\lfloor \lg b \rfloor + 1$.

Por exemplo, para $a = 514229$ e $b = 317511$ temos que

$$2\lg(b) + 1 = 2\lg(317511) + 1 < 2 \times 18.3 + 1 = 37.56$$

e o número de chamadas recursivas feitas por EUCLIDES $(514229, 317511)$ é 27.

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES é $\mathrm{O}(\lg b)$.

Seja $\beta := \langle b \rangle$ o número de bits ou tamanho de b.

O consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES é $\mathrm{O}(\beta)$.

Se o valor de β dobra, o consumo de tempo pode dobrar.

Se o tamanho de b dobra, o consumo de tempo pode dobrar.

$$b \times \lg b$$

b	$\lfloor \lg b \rfloor$
4	2
5	2
6	2
10	3
64	6
100	6
128	7
1000	9
1024	10
1000000	19
1000000000	29
$\vdots$	$\vdots$

Números de Fibonacci

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Algoritmo recursivo para F_n:

FIBO-REC (n)
se $n \leq 1$
  então devolva n
  senão $a \leftarrow$ FIBO-REC $(n-1)$
    $b \leftarrow$ FIBO-REC $(n-2)$
    devolva $a + b$

Euclides e Fibonacci

Os números de Fibonacci estão intimamente relacionados com o algoritmo de Euclides.

Verifique que

> A chamada EUCLIDES (F_{k+2}, F_{k+1}) faz k chamadas recursivas.

Verifique ainda que

> Se $a > b \geq 0$ e se EUCLIDES (a, b) faz $k \geq 1$ chamadas recursivas, então
>
> $$a \geq F_{k+2} \quad \text{e} \quad b \geq F_{k+1}.$$

Euclides e Fibonacci

Uma conseqüência imediata do fato anterior é:

Para todo inteiro $k \geq 1$, se $a > b \geq 0$ e $b < F_{k+1}$, então EUCLIDES (a, b) faz menos de k chamadas recursivas.

Exemplo:

$F_{29} = 514229$ e $F_{28} = 317811$ e e Euclides(514229,317811) faz 27 chamadas recursivas.

Razão Aurea

Suponha que um passarinho me contou que para todo $t \geq 2$ vale que

$$\phi^{t-2} \leq F_t < \phi^{t-1},$$

onde $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ que é um número entre 1.618 e 1.619.

Exemplo:

$$\phi^{26} < 1.619^{26} < 275689 < F_{28} = 317811 < 438954 < 1.618^{27} < \phi^{27}$$

Verifique que $1 + \phi = \phi^2$.

Número de chamadas (novamente)

Suponha $b \geq 4$. Se t é o número inteiro tal que

$$\phi^{t-2} \leq b < \phi^{t-1} < F_{t+1}$$

então o número k de chamadas recursivas de EUCLIDES (a, b) é no máximo

$$t - 1 \leq (2 + \log_\phi b) - 1 = 1 + \log_\phi b.$$

Exemplo: Segundo está nova estimativa temos que EUCLIDES$(514229, 317811)$ faz no máximo

$$1 + \log_\phi(317811) < 1 + \log_{1.619}(317811) < 1 + 26.28 = 27.45$$

e o número de chamadas é 27.
[Uauuuu. Isto foi muito perto! Talvez tenha alguma conta errada.]

Conclusão

Se k é número de chamadas recursivas feitas por EUCLIDES (a, b) então

$k \leq 1 + \log_\phi b$, onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Certificados

O algoritmo EUCLIDES pode ser facilmente modificado para nos fornecer números inteiros x e y tais que

$$ax + by = \text{mdc}(a, b).$$

Certificados

O algoritmo EUCLIDES pode ser facilmente modificado para nos fornecer números inteiros x e y tais que

$$ax + by = \text{mdc}(a, b).$$

E daí? Qual a graça nisto?

Certificados

O algoritmo EUCLIDES pode ser facilmente modificado para nos fornecer números inteiros x e y tais que

$$ax + by = \text{mdc}(a, b).$$

E daí? Qual a graça nisto?

Os números x e y são uma prova ou certificado da correção da resposta!

Certificados

Suponha que EUCLIDES (a, b) devolva d junto com x, y tais que $ax + by = d$

- podemos verificar se $d \mid a$ e $d \mid b$
- podemos verificar se $ax + by = d$

Se $d' \mid a$ e $d' \mid b$ então

$$d' \mid (ax + by) = d$$

e portanto $d' \leq d$

Conclusão: $d = \text{mdc}(a, b)$

Extended-Euclides

Recebe números inteiros não-negativos a e b e devolve números inteiros d, x e y tais que $d \mid a$, $d \mid b$ e $a\,x + b\,y = d$.

EXTENDED- EUCLIDES (a, b) ▷ supõe $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

se $b = 0$
    então devolva $(a, 1, 0)$
$(d', x', y') \leftarrow$ EXTENDED- EUCLIDES $(b, a \text{ mod } b)$
$(d, x, y) \leftarrow (d', y', x' - \lfloor a/b \rfloor y')$
devolva (d, x, y)

Self-certifying algorithms

Algoritmos que devolvem certificados da sua correção são chamados *self-certifying*.

Exemplos:

- EXTENDED- EUCLIDES
- Algoritmo de Dijkstra (caminhos mínimos)
- Algoritmo de Ford e Fulkerson (fluxos em redes)
- Algoritmos para programação linear
  devolvem soluções do problema primal e dual

Na página pessoal de Kurt Mehlhorn há um link para uma palestra sobre *Certifying Algorithms*.
Cópia local:

`http://www.ime.usp.br/~coelho/mac5711-2006/aulas/CertifyingAlgs.pdf`

Complex. computacional: P versus NP

CLR 36 ou CLRS 34

Complexidade computacional

Classifica os problemas em relação à dificuldade de resolvê-los algoritmicamente.

Disciplina:

MAC5722 Complexidade Computacional

Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma seqüência de símbolos retirados de algum alfabeto.

Este alfabeto pode ser, por exemplo, o conjunto de símbolos ASCII ou o conjunto $\{0, 1\}$.

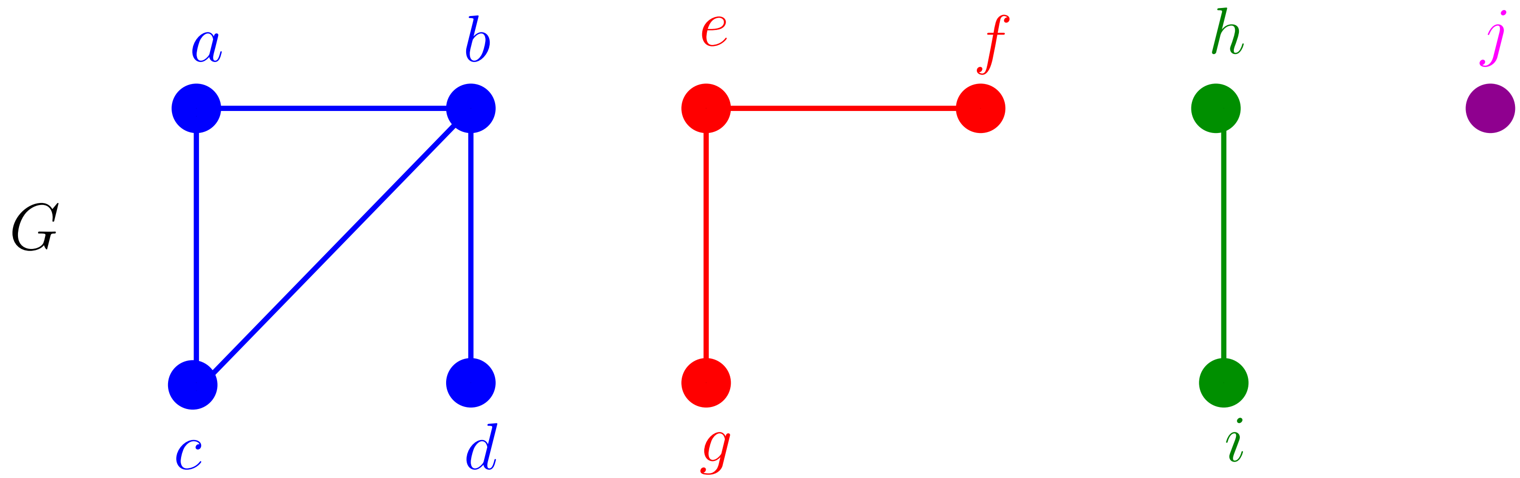
Qualquer seqüência dos elementos de um alfabeto é chamada de uma palavra.

Não é difícil codificar objetos tais como racionais, vetores, matrizes, grafos e funções como palavras.

O tamanho de uma palavra w, denotado por $\langle w \rangle$ é o número de símbolos usados em w, contando multiplicidades. O tamanho do racional '$123/567$' é 7.

Exemplo 1

Grafo



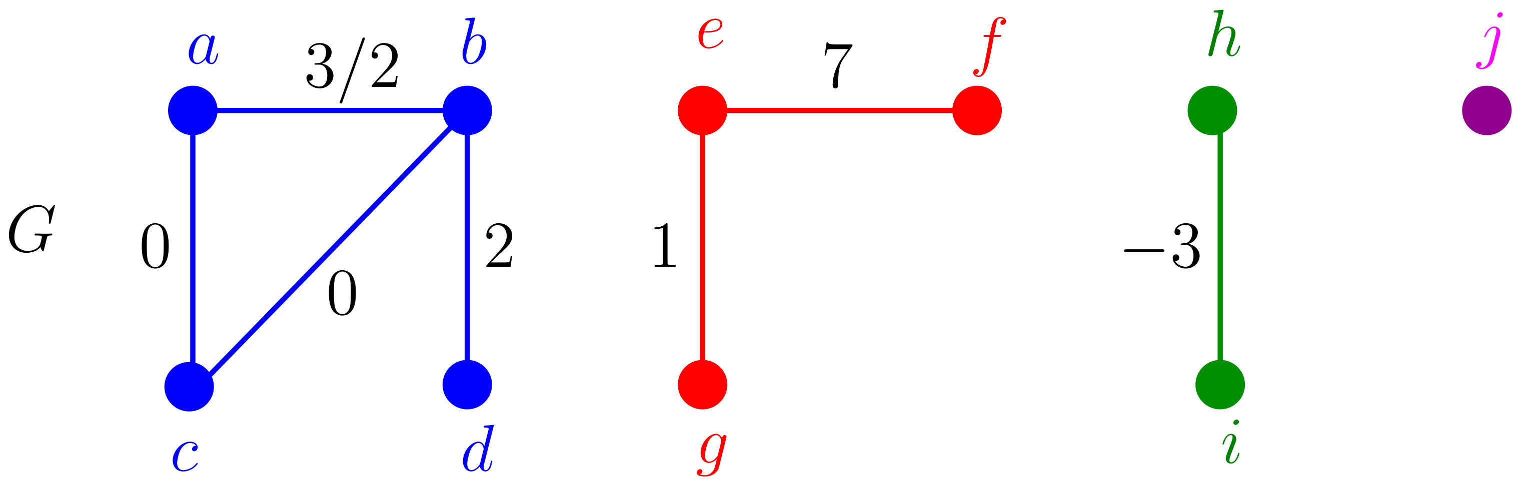
Palavra:

$(\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, \{\{bd\}, \{eg\}, \{ac\}, \{hi\}, \{ab\}, \{ef\}, \{bc\}\}$

Tamanho da palavra: 59

Exemplo 2

Função



Palavra:

$$((\{bd\}, 2), (\{eg\}, 1), (\{ac\}, 0), (\{hi\}, -3), (\{ab\}, 3/2), (\{ef\}, 7), (\{bc, 0)\}\}$$

Tamanho da palavra: 67

Tamanho de uma palavra

Para os nossos propósitos, não há mal em subestimar o tamanho de um objeto.

Não é necessário contar rigorosamente os caracteres '`{`', '`}`', '`(`', '`)`' e '`,`' dos exemplos anteriores.

Tamanho de um inteiro p é essencialmente $\lg |p|$.

Tamanho do racional p/q é, essencialmente, $\lg |p| + \lg |q|$.

Tamanho de um vetor $A[1 \, . \, . \, n]$ é a soma dos tamanhos de seus componentes

$$\langle A \rangle = \langle A[1] \rangle + \langle A[2] \rangle + \cdots + \langle A[n] \rangle .$$

Problemas e instâncias

Cada conjunto específico de dados de um problema define uma instância.

Tamanho de uma instância é o tamanho de uma palavra que representa a instância.

Problema que pede uma resposta do tipo SIM ou NÃO é chamado de problema de decisão.

Problema que procura um elemento em um conjunto é um problema de busca.

Problema que procura um elemento de um conjunto de soluções viáveis que seja melhor possível em relação a algum critério é um problema de otimização

Máximo divisor comum

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos a e b, determinar mdc(a, b).

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Problema de busca

Instância: a e b

Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle$, essencialmente

$$\lg a + \lg b$$

Consumo de tempo do algoritmo Café-Com-Leite é $\mathrm{O}(b)$.
Consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES é $\mathrm{O}(\lg b)$.

Máximo divisor comum (decisão)

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos a, b e k, $\text{mdc}(a, b) = k$?

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: a, b, k

Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle k \rangle$, essencialmente

$$\lg a + \lg b + \lg k$$

Subseqüência comum máxima

Problema: Encontrar uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

Exemplos: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

Problema de otimização

Instância: $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$

Tamanho da instância: $\langle X\rangle + \langle Y\rangle$, essencialmente

$$n + m$$

Consumo de tempo REC-LCS-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$.
Consumo de tempo LCS-LENGTH é $\Theta(mn)$.

Subseqüência comum máxima (decisão)

Problema: $X[1\,.\,.\,m]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ possuem uma ssco máxima $\geq k$?

Exemplo: X = A B C B D A B

Y = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $X[1\,.\,.\,m]$, $Y[1\,.\,.\,n]$, k

Tamanho da instância: $\langle X\rangle + \langle Y\rangle + \langle k\rangle$, essencialmente

$$n + m + \lg k$$

Problema booleano da mochila

Problema (Knapsack Problem): Dados n, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e W, encontrar uma mochila boolena ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4
w	40	30	20	10
v	840	600	400	100
x	0	1	1	0

valor $= 1000$

Problema de otimização

Instância: n, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e W

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

Consumo de tempo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

Problema booleano da mochila (decisão)

Problema (Knapsack Problem): Dados n, $w[1..n]$ $v[1..n]$ e W e k, existeuma mochila boolena de valor $\geq k$.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

	1	2	3	4
w	40	30	20	10
v	840	600	400	100
x	0	1	1	0

valor $= 1000$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: n, $w[1..n]$ $v[1..n]$, W e k

Tamanho da instância: $\langle n \rangle + \langle w \rangle + \langle v \rangle + \langle W \rangle + \lg k$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W + \lg k$

Problema fracionário da mochila

Problema: Dados n, $w[1\,..\,n]$ $v[\,..\,n]$ e W, encontrar uma mochila ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4
w	40	30	20	10
v	840	600	400	100
x	1	1/3	0	0

valor $= 1040$

Problema de otimização

Instância: n, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e W
Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$,
essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$
Consumo de tempo MOCHILA-FRACIONÁRIA é $\Theta(n \lg n)$.

Problema fracionário da mochila (decisão)

Problema: Dados n, $w[1\,..\,n]$ $v[\,..\,n]$, W e k, existe uma mochila de valor $\geq k$?

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

	1	2	3	4
w	40	30	20	10
v	840	600	400	100
x	1	1/3	0	0

valor $= 1040$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: n, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e W

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n\lg W + n\lg V + \lg W$

Modelo de computação

É uma descrição abstrata e conceitual de um computador que será usado para executar um algoritmo.

Um modelo de computação especifica as operações elementares um algoritmo pode executar e o critério empregado para medir a quantidade de tempo que cada operação consome.

Operações elementares típicas são operações aritméticas entre números e comparações.

No critério uniforme supõe-se que cada operação elementar consome uma quantidade de tempo constante.

Problemas polinomiais

Análise de um algoritmo em um determinado modelo de computação estima o seu consumo de tempo e quantidade de espaço como uma função do tamanho da instância do problema.

Exemplo: o consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES (a, b) é expresso como uma função de $\langle a \rangle + \langle b \rangle$.

Um problema é solúvel em tempo polinomial se existe um algoritmo que consome tempo $\mathrm{O}(\langle I \rangle^c)$ para resolver o problema, onde c é uma constante e I é instância do problema.

Exemplos

- Máximo divisor comum
  Tamanho da intância: $\lg a + \lg b$
  Consumo de tempo Café-Com-Leite é $O(b)$ (não-polinomial)
  Consumo de tempo EUCLIDES é $O(\lg b)$ (polinomial)
- Subseqüência comum máxima
  Tamanho da instância: $n + m$
  Consumo de tempo REC-LEC-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$ (não-polinomial)
  Consumo de tempo LEC-LENGTH é $\Theta(mn)$ (polinomial).

Mais exemplos

- Problema booleano da mochila
  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$
  Consumo de tempo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$
  (não-polinomial)
- Problema fracionário da mochila
  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$
  Consumo de tempo MOCHILA-FRACIONÁRIA é
  $\Theta(n \lg n)$
  (polinomial).
- Ordenação de inteiros $A[1 \mathinner{.\,.} n]$
  Tamanho da instância: $n \lg M$,
  $M := \max\{|A[1]|, |A[2]|, \ldots, |A[n]|\} + 1$
  Consumo de tempo MERGE-SORT é $\Theta(n \lg n)$
  (polinomial).

Classe P

Por um algoritmo eficiente entendemos um algoritmo polinomial.

A classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais é denotada por P (classe de complexidade).

Exemplo: As versões de decisão dos problemas:

> máximo divisor comum, subseqüência comum máxima e mochila fracionária

estão em P.

Para muitos problemas, não se conhece algoritmo essencialmente melhor que “testar todas as possibilidades”. Em geral, isso não está em P.