AULA 19

Knuth-Morris-Pratt

CLRS 32.4

KMP e algoritmo do autômato

O algoritmo KMP-MATCHER pode ser visto como uma implementação do algoritmo

FINITE-AUTOMATON-MATCHER (P, m, T, n)

1 $q \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $q \leftarrow$ maior k tal que $P[1\,.\,.\,k]$ é sufixo de $T[1\,.\,.\,i]$
4 **se** $q = m$
5 **então** "P ocorre com deslocamento $i - m$"

As iterações do algoritmo KMP-MATCHER em que o valor de i não é incrementado estão determinando o

"maior k tal que $P[1\,.\,.\,k]$ é sufixo de $T[1\,.\,.\,i]$"

KMP e algoritmo do autômato

O algoritmo KMP-MATCHER pode ser visto como uma implementação do algoritmo

FINITE-AUTOMATON-MATCHER (P, m, T, n)

1 $q \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $\quad q \leftarrow$ maior k tal que $P[1 \,.\,.\, k]$ é sufixo de $T[1 \,.\,.\, i]$
4 $\quad$ **se** $q = m$
5 $\quad\quad$ **então** "P ocorre com deslocamento $i - m$"

O valor de i só é incrementado após a determinação desse

"maior k tal que $P[1 \,.\,.\, k]$ é sufixo de $T[1 \,.\,.\, i]$"

Para isto o algoritmo faz uso de uma certa função π.

Função prefixo

$\pi[q] :=$ maior comprimento de um prefixo próprio de $P[1\,..\,q]$ que é sufixo de $P[1\,..\,q]$

$:= \max\{k : k < q$ e $P[1\,..\,k]$ é sufixo de $P[1\,..\,q]\}$

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a
π	0	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6

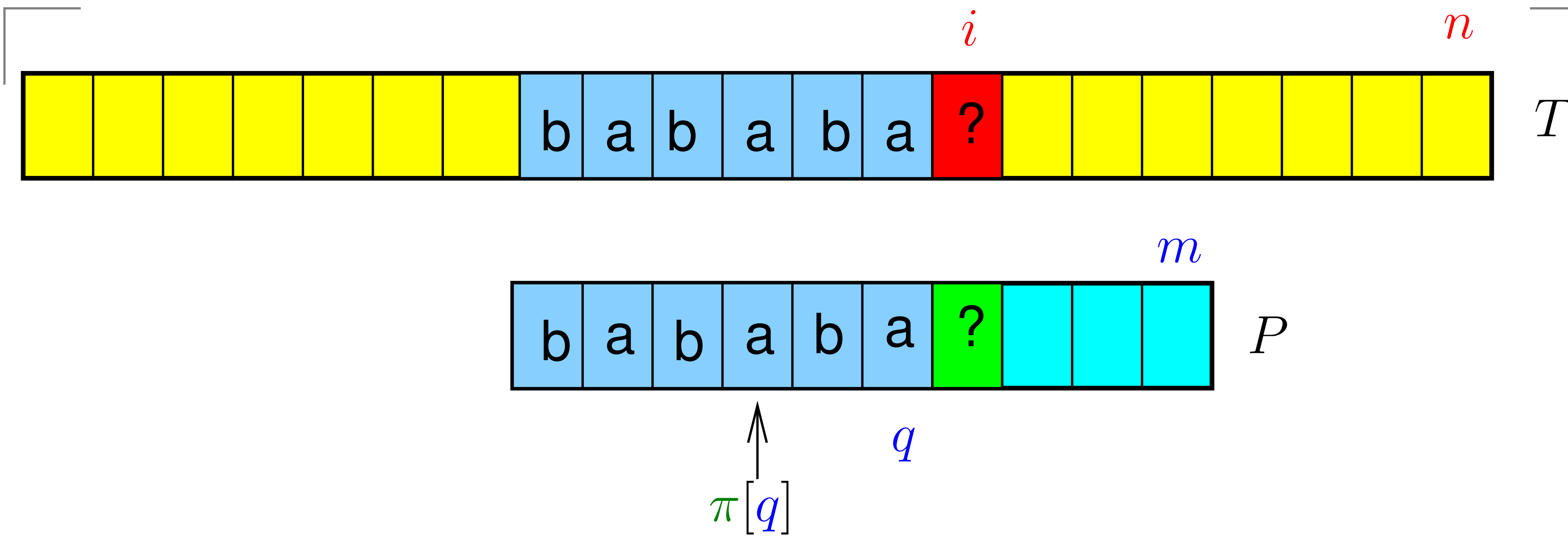
q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	a	b	a	b	a	b	a	b	c	a
π	0	0	1	2	3	4	5	6	0	1

Simulação

$P =$ a b a b b a b a b b a

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	T
1	a	b	a	b																				
4			a	b																				
4				a	b	a	b	b																
8						a	b	a	b	b	a	b	a	b	b									
15											a	b	a	b	b									
15													a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a	
i	1	1	1	3	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	

Iteração



Relações invariantes:

(i0) $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i-1]$

(i1) $P[1\,..\,k]$ não é sufixo de $T[1\,..\,i]$, para $k \geq q+2$.

KMP-Matcher

KMP-MATCHER (P, m, T, n)

$\pi \leftarrow$ COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P, m)
$i \leftarrow 1 \quad q \leftarrow 0$
enquanto $i \leq n+1$ **faça**
  se $q = m$ **então** $\triangleright$ caso 1
    "P ocorre com deslocamento $i - m$"
    $q \leftarrow \pi[q]$
  senão se $P[q{+}1] = T[i]$ **então** $\triangleright$ caso 2
    $q \leftarrow q + 1$
    $i \leftarrow i + 1$
  senão se $P[q{+}1] \neq T[i]$ **e** $q > 0$ **então** $\triangleright$ caso 3
    $q \leftarrow \pi[q]$
  senão se $P[q{+}1] \neq T[i]$ **e** $q = 0$ **então** $\triangleright$ caso 4
    $i \leftarrow i + 1$

Suponha $T[n+1] =$ "símbolo que não ocorre em $P[1\,..\,m]$"

Correção

Relação invariante: na linha 2 vale que

(i0) $P[1\,..\,q]$ é sufixo de $T[1\,..\,i{-}1]$

Na linha 2 vale ainda que

(i1) $P[1\,..\,k]$ não é sufixo de $T[1\,..\,i]$, para $k \geq q+2$.

Invariante (i1) implica que $i-m, i-m+1, \ldots, i-q-1$ não são deslocamentos válidos, ou seja

$P[1\,..\,m]$ não é sufixo de $T[1\,..\,i+1]$

$P[1\,..\,m]$ não é sufixo de $T[1\,..\,i+2]$

$\ldots$

$P[1\,..\,m]$ não é sufixo de $T[1\,..\,i+m-q-1]$.

Consumo de tempo

Exceto a linha 0, cada linha do algoritmo consome tempo $\Theta(1)$.

Caso 2 e caso 4 ocorrem $n+1$ vezes (total).

Para cada valor de i, número de ocorrências do caso 1 e caso 3 é $\leq m$.

Logo, o número total de iterações das linhas 2–12
é $\leq n+1+(n+1)m = (n+1)(m+1)$.

Portanto, o consumo de tempo total das linhas 1–12
é $\mathrm{O}(nm)$.

Consumo de tempo

Exceto a linha 0, cada linha do algoritmo consome tempo $\Theta(1)$.

Caso 2 e caso 4 ocorrem $n+1$ vezes (total).

Para cada valor de i, número de ocorrências do caso 1 e caso 3 é $\leq m$.

Logo, o número total de iterações das linhas 2–12

é $\leq n+1+(n+1)m = (n+1)(m+1)$.

Portanto, o consumo de tempo total das linhas 1–12

é $\mathrm{O}(nm)$.

EXAGERO!

Consumo de tempo

Exceto a linha 0, cada linha do algoritmo consome tempo $\Theta(1)$.

Caso 2 e caso 4 ocorrem $n + 1$ vezes (total).

O número de ocorrências do caso 1 e caso 3 é $\leq$ número de ocorrências do caso 2, pois

- q nunca é negativo;
- q é incrementado no caso 2;
- q é decrementado no caso 1 e no caso 3.

Logo, o número total de iterações é $\leq n + 1 + n + 1 = 2n + 2$.

Portanto, o consumo de tempo das linhas 1–12 é $\Theta(n)$.

KMP-Matcher

KMP-MATCHER (P, m, T, n)

```
π ← COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P, m)
i ← 1    q ← 0
enquanto i ≤ n faça
        enquanto q > 0 e P[q+1] ≠ T[i] faça
                q ← π[q]
        se P[q+1] = T[i] então
                q ← q + 1
        se q = m então
                "P ocorre com deslocamento i − m"
                q ← π[q]
```

Compute-Prefix-Function (grosseiro)

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

$\pi[1] \leftarrow 0$
$q \leftarrow 2$
enquanto $q \leq m$ **faça**
    $k \leftarrow q - 1$
    repita
        $i \leftarrow k$
        $j \leftarrow q$
        enquanto $i > 0$ **e** $P[i] = P[j]$ **faça**
            $i \leftarrow i - 1 \quad j \leftarrow j - 1$
        se $i > 0$
            então $k \leftarrow k - 1$
    até que $i = 0$
    $\pi[q] \leftarrow k$
devolva π

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
0-1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(m)$
3	$\Theta(m-1)$
4-6	$\mathrm{O}(m^2)$
7-8	$\mathrm{O}(m^3)$
9-11	$\mathrm{O}(m^2)$
12	$\Theta(m-1)$
13	$\mathrm{O}(m)$

total $\quad \Theta(3m-1) + \mathrm{O}(m^3 + 2m^2 + m)$

$$= \mathrm{O}(m^3)$$

Função prefixo e algoritmo do autômato

O algoritmo COMPUTE-PREFIX-FUNCTION pode ser semelhante ao algoritmo

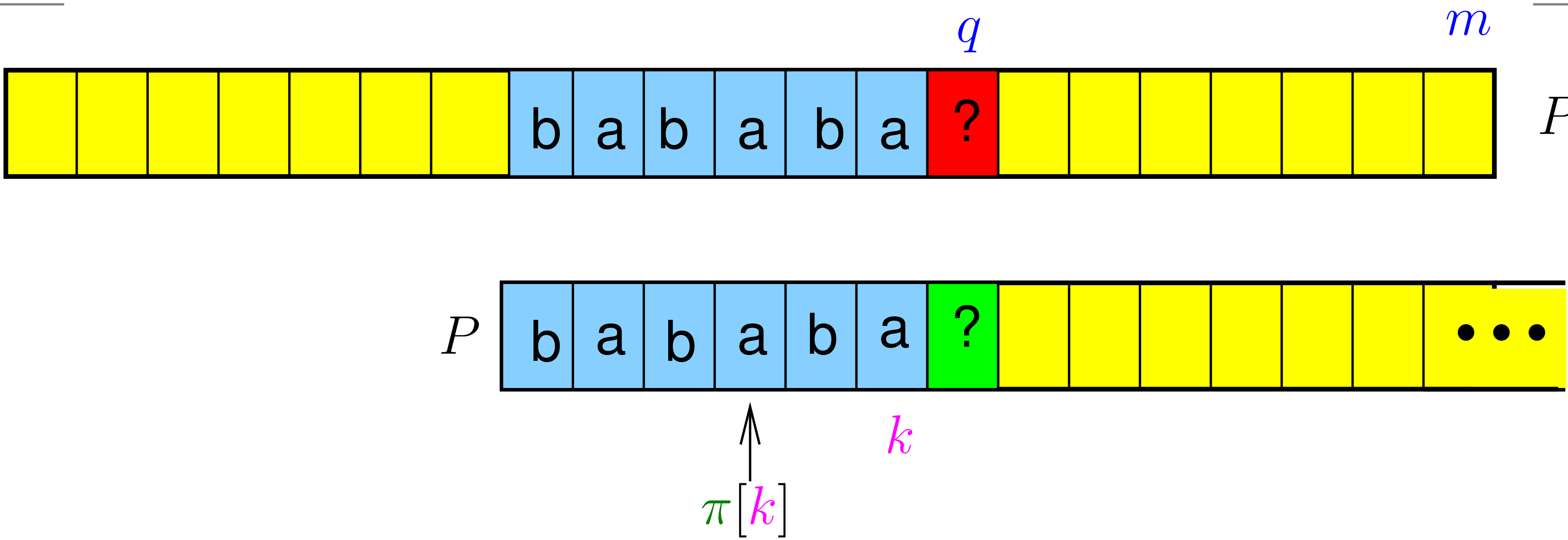
COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

```
para q ← 1 até m faça
        π[q] ← maior k tal que P[1 . . k] é sufixo próprio
               de P[1 . . q]
```

O valor de q só é incrementado após a determinação desse

"maior k tal que $P[1\,..\,k]$ é sufixo próprio de $P[1\,..\,i]$"

Iteração



Para determinar o

"maior k tal que $P[1\,..\,k]$ é sufixo próprio de $P[1\,..\,i]$"

podemos utilizar os valores de π já calculados.

Subestrutura ótima

Suponha que $P[1\,..\,k+1]$ é o maior prefixo próprio de $P[1\,..\,q]$ que é sufixo de $P[1\,..\,q]$ ($\pi[q] = k+1$).

Subestrutura ótima

Suponha que $P[1\,..\,k+1]$ é o maior prefixo próprio de $P[1\,..\,q]$ que é sufixo de $P[1\,..\,q]$ ($\pi[q] = k+1$).

Portanto,

- $P[k+1] = P[q]$ e
- $P[1\,..\,k]$ é prefixo próprio e sufixo de $P[1\,..\,q-1]$.

Logo, $P[1\,..\,k]$ é prefixo e sufixo de $P[1\,..\,\pi[q-1]]$.

Subestrutura ótima

Suponha que $P[1\,..\,k+1]$ é o maior prefixo próprio de $P[1\,..\,q]$ que é sufixo de $P[1\,..\,q]$ ($\pi[q] = k+1$).

Portanto,

- $P[k+1] = P[q]$ e
- $P[1\,..\,k]$ é prefixo próprio e sufixo de $P[1\,..\,q-1]$.

Logo, $P[1\,..\,k]$ é prefixo e sufixo de $P[1\,..\,\pi[q-1]]$.

Se $k \neq \pi[q-1]$, então

Subestrutura ótima

Suponha que $P[1\,..\,k+1]$ é o maior prefixo próprio de $P[1\,..\,q]$ que é sufixo de $P[1\,..\,q]$ ($\pi[q] = k+1$).

Portanto,

- $P[k+1] = P[q]$ e
- $P[1\,..\,k]$ é prefixo próprio e sufixo de $P[1\,..\,q-1]$.

Logo, $P[1\,..\,k]$ é prefixo e sufixo de $P[1\,..\,\pi[q-1]]$.

Se $k \neq \pi[q-1]$, então

$P[1\,..\,k]$ é prefixo próprio e sufixo de $P[1\,..\,\pi[q-1]]$.

Logo, $P[1\,..\,k]$ é prefixo e sufixo de

$$P[1\,..\,\pi[\pi[q-1]]] = P[1\,..\,\pi^2[q-1]].$$

Subestrutura ótima (cont.)

Se $k \neq \pi^2[q-1]$, então

Subestrutura ótima (cont.)

Se $k \neq \pi^2[q-1]$, então

$$P[1\,..\,k] \text{ é prefixo próprio e sufixo de } P[1\,..\,\pi^2[q-1]].$$

Logo, $P[1\,..\,k]$ é sufixo de

$$P[1\,..\,\pi[\pi[\pi[q-1]]]] = P[1\,..\,\pi^3[q-1]].$$

Subestrutura ótima (cont.)

Se $k \neq \pi^2[q-1]$, então

$P[1\,.\,.\,k]$ é prefixo próprio e sufixo de $P[1\,.\,.\,\pi^2[q-1]]$.

Logo, $P[1\,.\,.\,k]$ é sufixo de

$$P[1\,.\,.\,\pi[\pi[\pi[q-1]]]] = P[1\,.\,.\,\pi^3[q-1]].$$

Se $k \neq \pi^3[q-1]$, então

$P[1\,.\,.\,k-1]$ é prefixo próprio e sufixo de $P[1\,.\,.\,\pi^3[q-1]]$.

Logo, $P[1\,.\,.\,k]$ é prefixo e sufixo de $P[1\,.\,.\,\pi^4[q-1]]$.

Se $k \neq \pi^4[q-1]$, então ...

Recorrência

$\pi[q] :=$ maior comprimento de um prefixo próprio de $P[1\,..\,q]$ que é sufixo de $P[1\,..\,q]$
$:= \max\{k : k < q$ e $P[1\,..\,k]$ é sufixo de $P[1\,..\,q]\}$

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
P	'?'	a	b	a	b	b	a	b	a	b	b	a
π	-1	0	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6

$\pi[0] = -1$

$\pi[1] = 0$

$\pi[q] = \max\{\pi^j[q-1]+1 : P[\pi^j[q-1]+1] = P[q]\}$

Suponha $P[0] =$ "coringa".

Compute-Prefix-Function (grosseiro)

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

$\pi[1] \leftarrow 0$
$q \leftarrow 2$
enquanto $q \leq m$ **faça**
    $k \leftarrow q - 1$
    repita
        $i \leftarrow k$
        $j \leftarrow q$
        enquanto $i > 0$ **e** $P[i] = P[j]$ **faça**
            $i \leftarrow i - 1 \quad j \leftarrow j - 1$
        se $i > 0$
            então $k \leftarrow k - 1$
    até que $i = 0$
    $\pi[q] \leftarrow k$
devolva π

Compute-Prefix-Function (melhorado)

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

$\pi[1] \leftarrow 0$
$q \leftarrow 2$
enquanto $q \leq m$ **faça**
  $k \leftarrow \pi[q-1]$
  repita
    $i \leftarrow k + 1$
    $j \leftarrow q$
    enquanto $i > 0$ **e** $P[i+1] = P[j]$ **faça**
      $i \leftarrow i - 1 \quad j \leftarrow j - 1$
    se $i > 0$
      então $k \leftarrow \pi[k]$
  até que $i = 0$
  $\pi[q] \leftarrow k + 1$
devolva π

Compute-Prefix-Function (melhor ainda)

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

$\pi[1] \leftarrow 0$
$q \leftarrow 2$
enquanto $q \leq m$ **faça**
    $k \leftarrow \pi[q-1]$
    repita
        $i \leftarrow k+1$
        $j \leftarrow q$
        se $P[i] = P[j]$
            então $i \leftarrow 0$
            senão $k \leftarrow \pi[k]$
    até que $i = 0$
    $\pi[q] \leftarrow k+1$
devolva π

Compute-Prefix-Function (limpo)

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

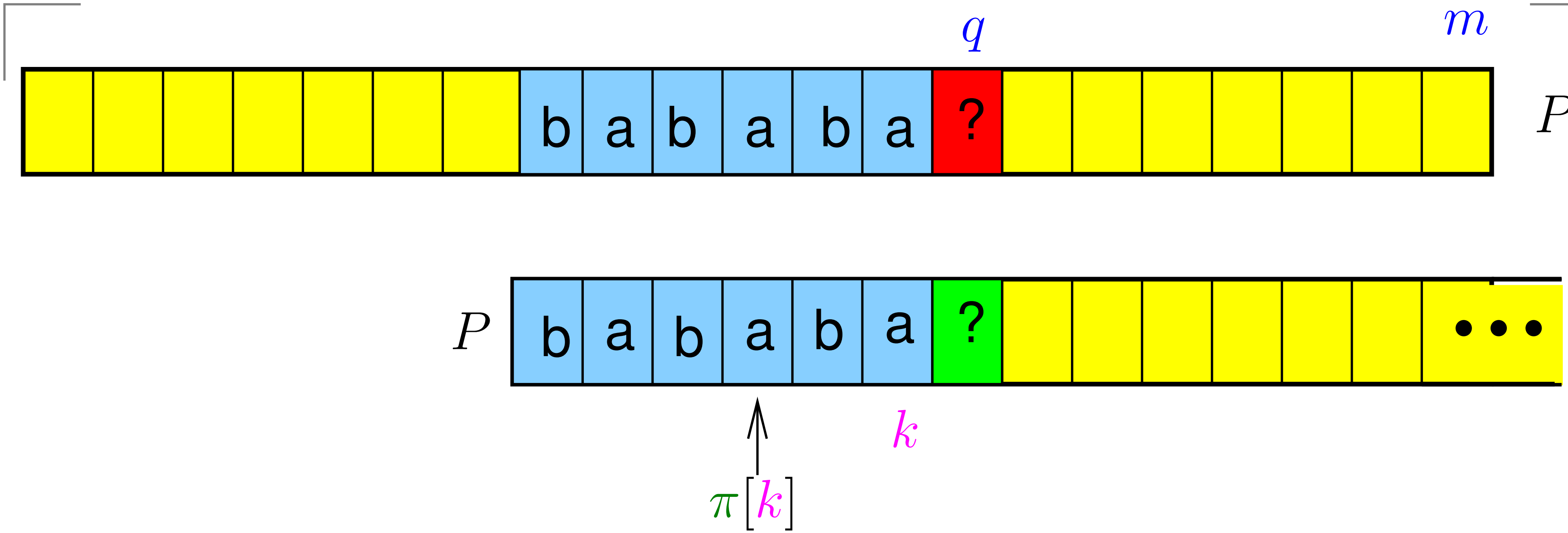
$\pi[1] \leftarrow 0$
$q \leftarrow 2 \quad k \leftarrow 0$
enquanto $q \leq m$ **faça**
    enquanto $k > 0$ **e** $P[k+1] \neq P[q]$ **faça**
        $k \leftarrow \pi[k]$
    se $P[k+1] = P[q]$
        então $k \leftarrow k+1$
    $\pi[q] \leftarrow k$
devolva π

Compute-Prefix-Function (limpo)

COMPUTE-PREFIX-FUNCTION (P, m)

$\pi[1] \leftarrow 0$
$q \leftarrow 2 \quad k \leftarrow 0$
enquanto $q \leq m$ **faça**
  se $P[k+1] = P[q]$ **então** $\triangleright$ caso 1
    $\pi[q] \leftarrow k + 1$
    $q \leftarrow q + 1$
    $k \leftarrow k + 1$
  senão se $P[k+1] \neq P[q]$ **e** $k > 0$ **então** $\triangleright$ caso 2
    $k \leftarrow \pi[k]$
  senão se $P[k+1] \neq P[q]$ **e** $k = 0$ **então** $\triangleright$ caso 3
    $\pi[q] \leftarrow 0$
    $q \leftarrow q + 1$
devolva π

Correção



Relações invariantes: na linha 2 vale que

(i0) $P[1\,..\,k]$ é sufixo de $P[1\,..\,q{-}1]$

(i1) $P[1\,..\,j]$ não é sufixo de $P[1\,..\,q]$, para $j > k+1$.

Consumo de tempo

Cada linha do algoritmo consome tempo $\Theta(1)$, exceto a linha 12 que pode consumir tempo $\mathrm{O}(m)$.

Caso 1 e caso 3 ocorrem m vezes (total).

O número de ocorrências do caso 2 é $\leq$ número de ocorrências do caso 1, pois

- k nunca é negativo;
- k é incrementado no caso 1; e
- k é decrementado no caso 2.

Logo, o número total de iterações é $\leq m + m = 2m$.

O consumo de tempo do algoritmo é $\Theta(m)$.

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo COMPUTE-PREFIX-FUNCTION é $\Theta(m)$.

O consumo de tempo do algoritmo KMP-MATCHER é $\Theta(n+m)$.

Conjuntos disjuntos dinâmicos

CLR 22 CLRS 21

Conjuntos disjuntos

Seja $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ uma coleção de conjuntos disjuntos, ou seja,

$$S_i \cap S_j = \emptyset$$

para todo $i \neq j$.

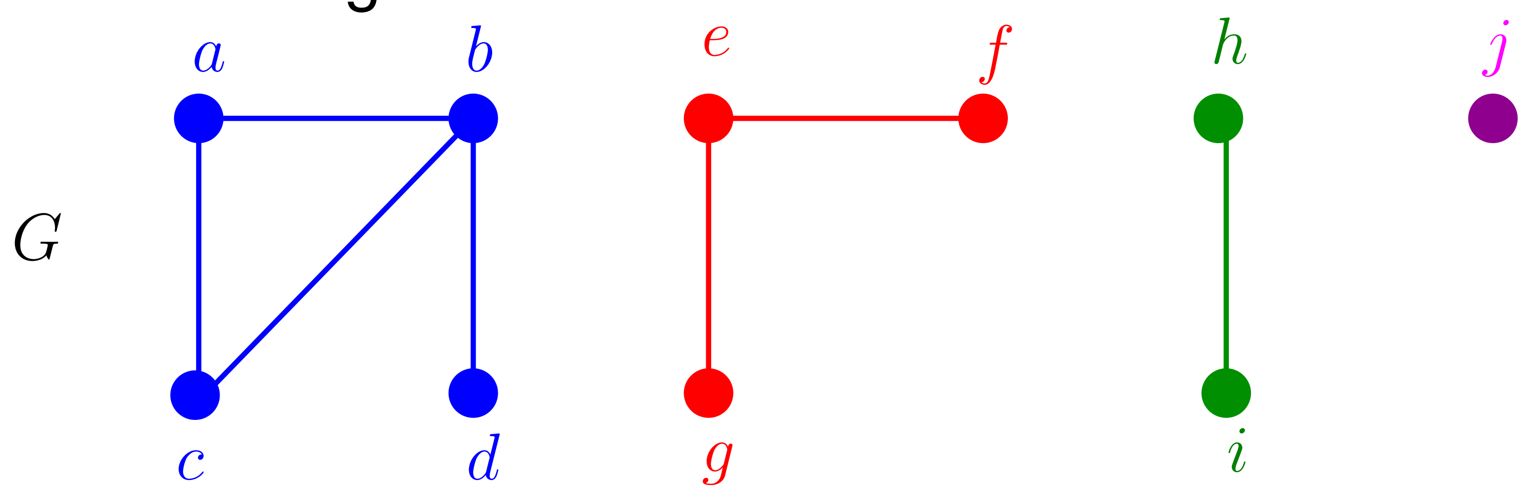
Conjuntos disjuntos

Seja $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ uma coleção de conjuntos disjuntos, ou seja,

$$S_i \cap S_j = \emptyset$$

para todo $i \neq j$.

Exemplo de coleção disjunta de conjuntos: componentes conexos de um grafo



componentes = conjuntos disjuntos de vértices

$$\{a, b, c, d\} \quad \{e, f, g\} \quad \{h, i\} \quad \{j\}$$

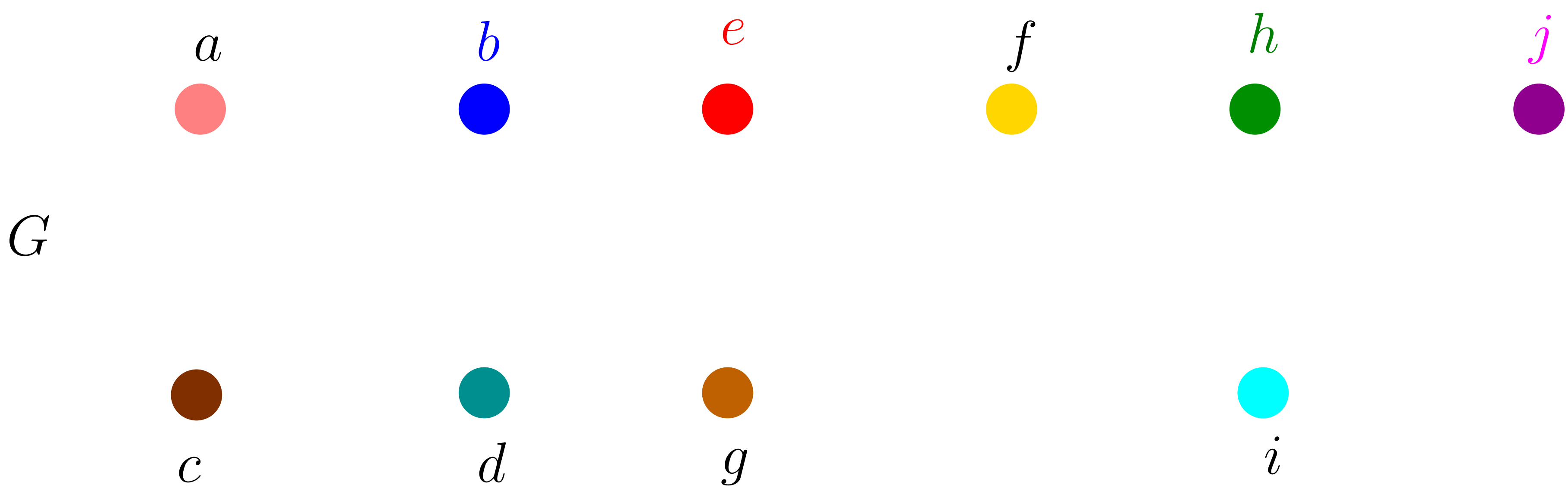
Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

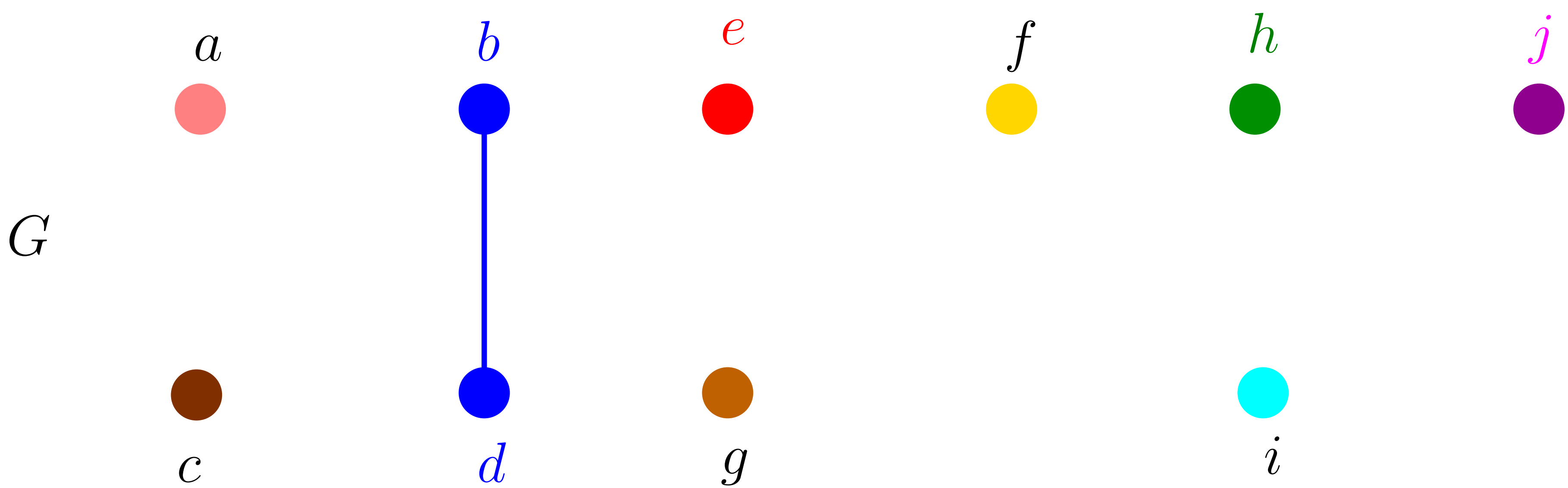


aresta	componentes
	$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

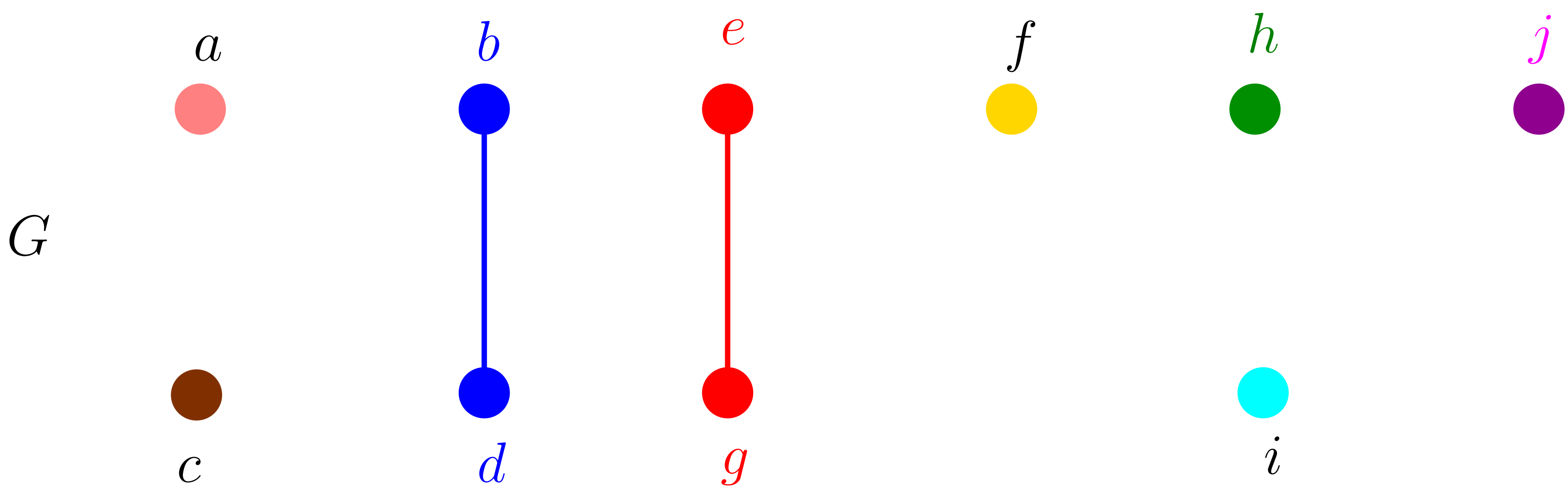


aresta	componentes
(b, d)	$\{a\}$ $\{b, d\}$ $\{c\}$ $\{e\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

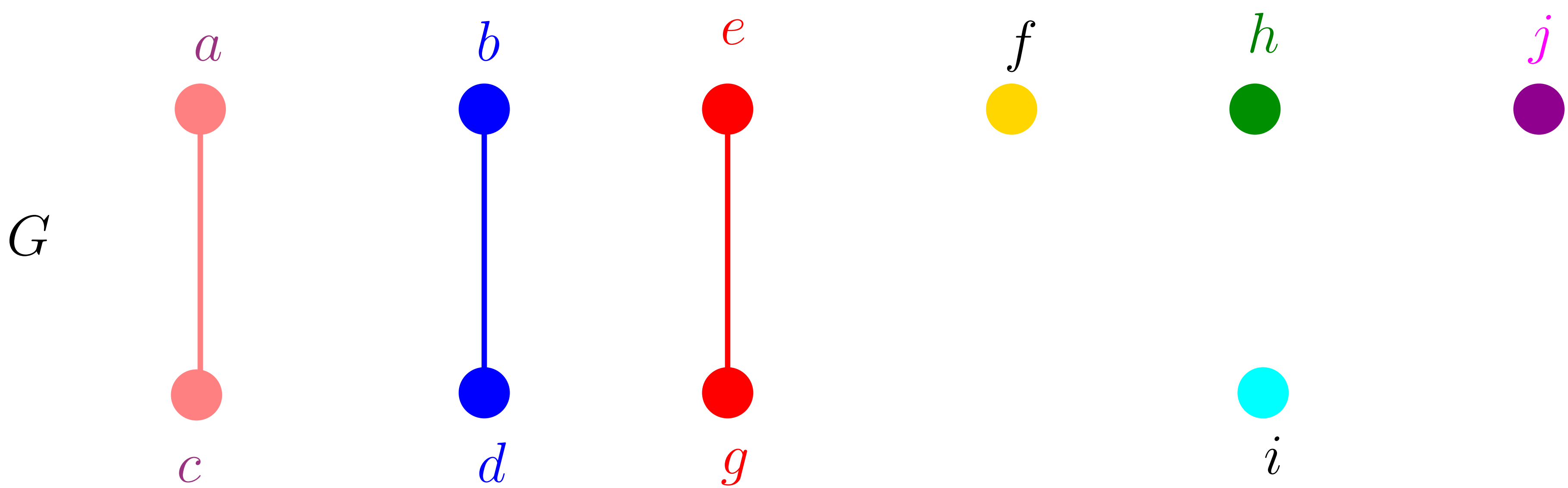


aresta	componentes
(e, g)	$\{a\}$ $\{b, d\}$ $\{c\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

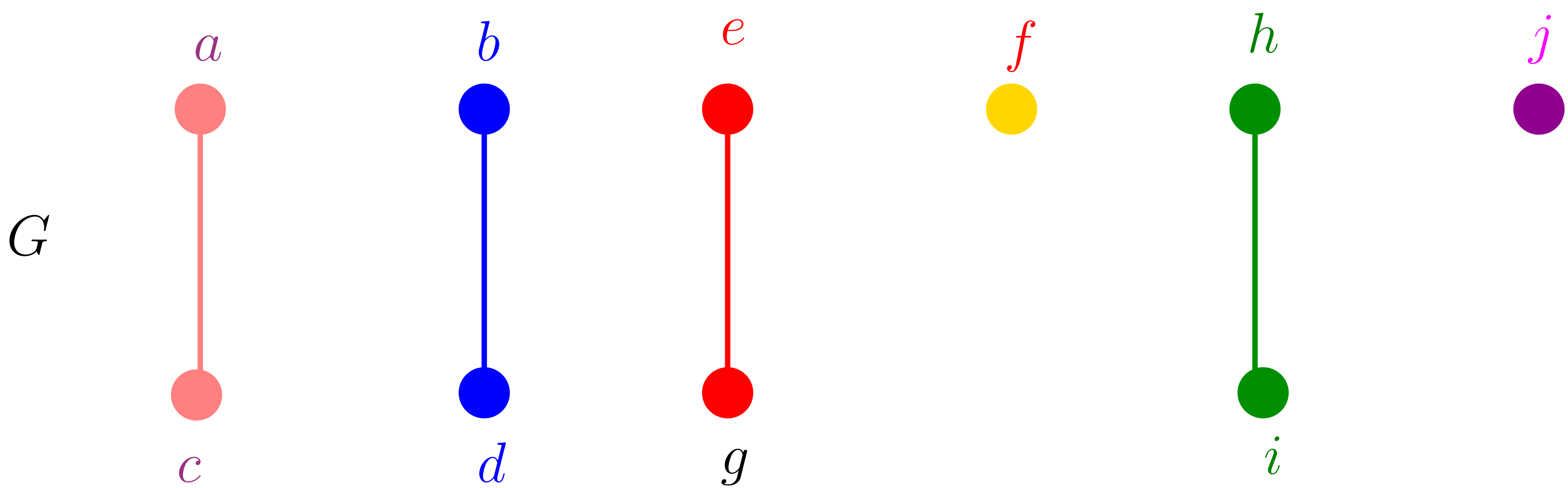


aresta	componentes
(a, c)	$\{a, c\}$ $\{b, d\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

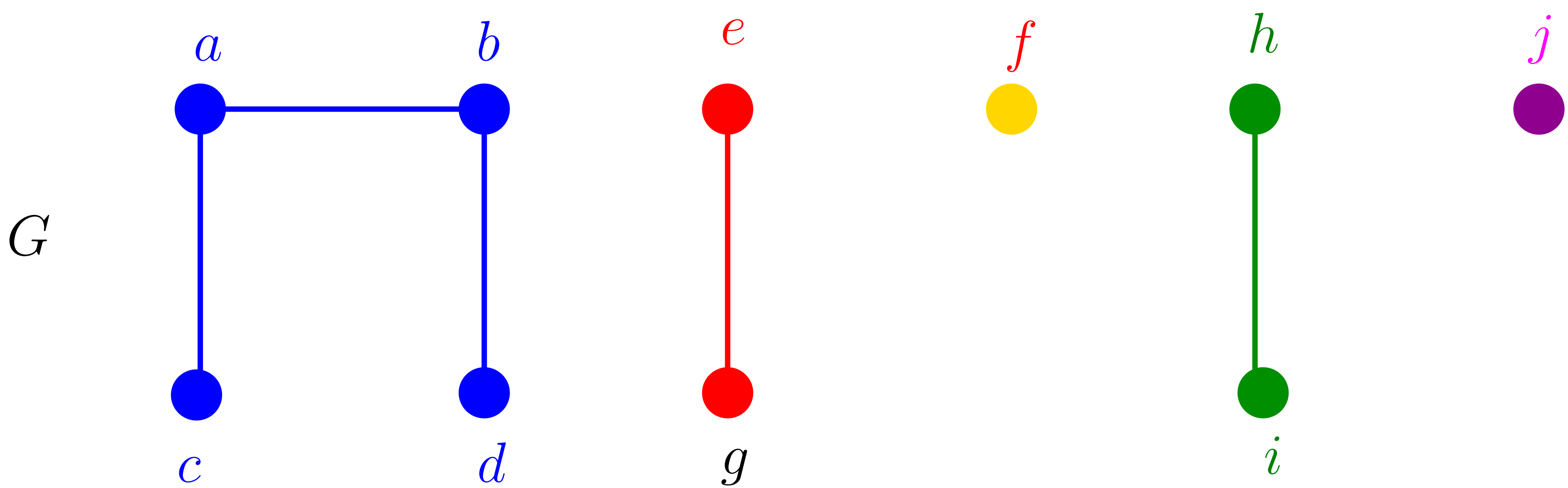


aresta	componentes
(h, i)	$\{a, c\}$ $\{b, d\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

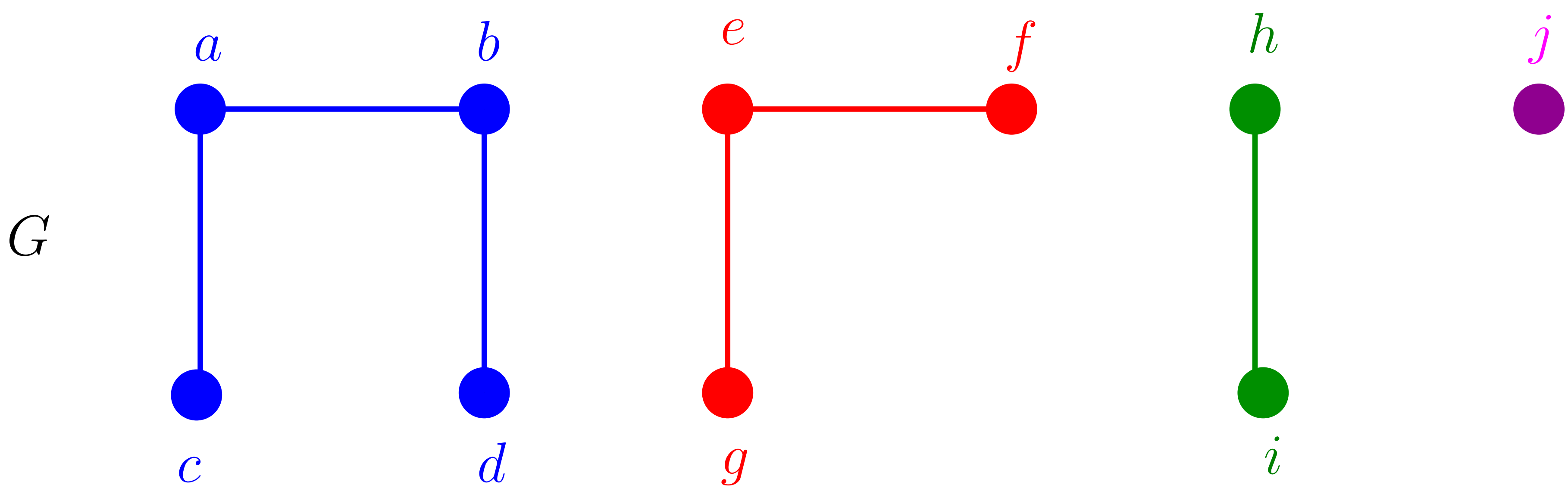


aresta	componentes
(a, b)	$\{a, b, c, d\}$ $\{e, g\}$ $\{f\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico

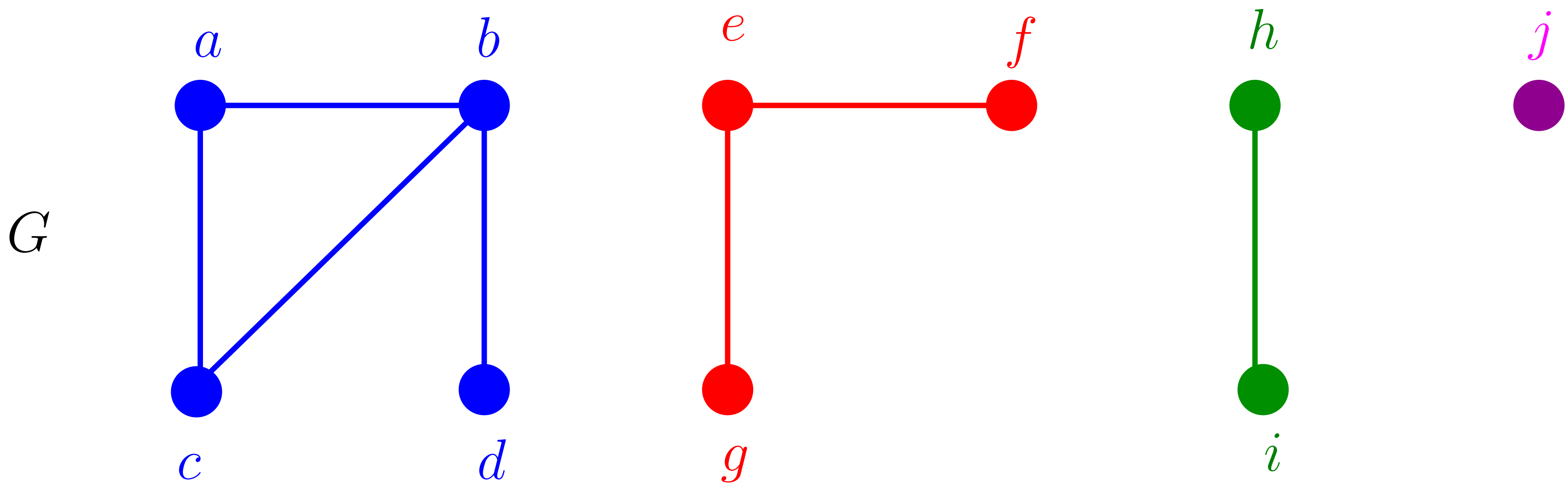


aresta	componentes
(e, f)	$\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Coleção disjunta dinâmica

Conjuntos são modificados ao longo do tempo

Exemplo: grafo dinâmico



aresta	componentes
(b, c)	$\{a, b, c, d\}$ $\{e, f, g\}$ $\{h, i\}$ $\{j\}$

Operações básicas

$\mathcal{S}$ coleção de conjuntos disjuntos.

Cada conjunto tem um representante.

MAKESET (x): x é elemento novo
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{x\}$

UNION (x, y): x e y em conjuntos diferentes
$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} - \{S_x, S_y\} \cup \{S_x \cup S_y\}$
x está em S_x e y está em Sy

FINDSET (x): devolve representante do conjunto que contém x

Connected-Componets

Recebe um grafo G e contrói uma representação dos componentes conexos.

CONNECTED-COMPONENTS (G)

1 **para cada** vértice v de G **faça**
2 MAKESET (v)
3 **para cada** aresta (u, v) de G **faça**
4 **se** FINDSET $(u) \neq$ FINDSET (v)
5 **então** UNION (u, v)

Consumo de tempo

$n :=$ número de vértices do grafo
$m :=$ número de arestas do grafo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$= \Theta(n)$
2	$= n \times$ consumo de tempo MAKESET
3	$= \Theta(m)$
4	$= 2m \times$ consumo de tempo FINDSET
5	$\leq n \times$ consumo de tempo UNION
total	$\leq \Theta(n + m) + n \times$ consumo de tempo MAKESET $+2m \times$ consumo de tempo FINDSET $+n \times$ consumo de tempo UNION

Same-Component

Decide se u e v estão no mesmo componente:

SAME-COMPONENT (u, v)

1 **se** FINDSET $(u) =$ FINDSET (v)
2 **então devolva** SIM
3 **senão devolva** NÃO

Algoritmo de Kruskal

Encontra uma árvore geradora mínima (CLRS 23).

MST-KRUSKAL (G, w) $\triangleright$ G conexo

$A \leftarrow \emptyset$
para cada vértice v **faça**
  MAKESET (v)
coloque arestas em ordem crescente de w
para cada aresta uv em ordem crescente de w **faça**
  se FINDSET $(u) \neq$ FINDSET (v)
    então $A \leftarrow A \cup \{uv\}$
      UNION (u, v)
devolva A

"Avô" de todos os algoritmos gulosos.

Conjuntos disjuntos dinâmicos

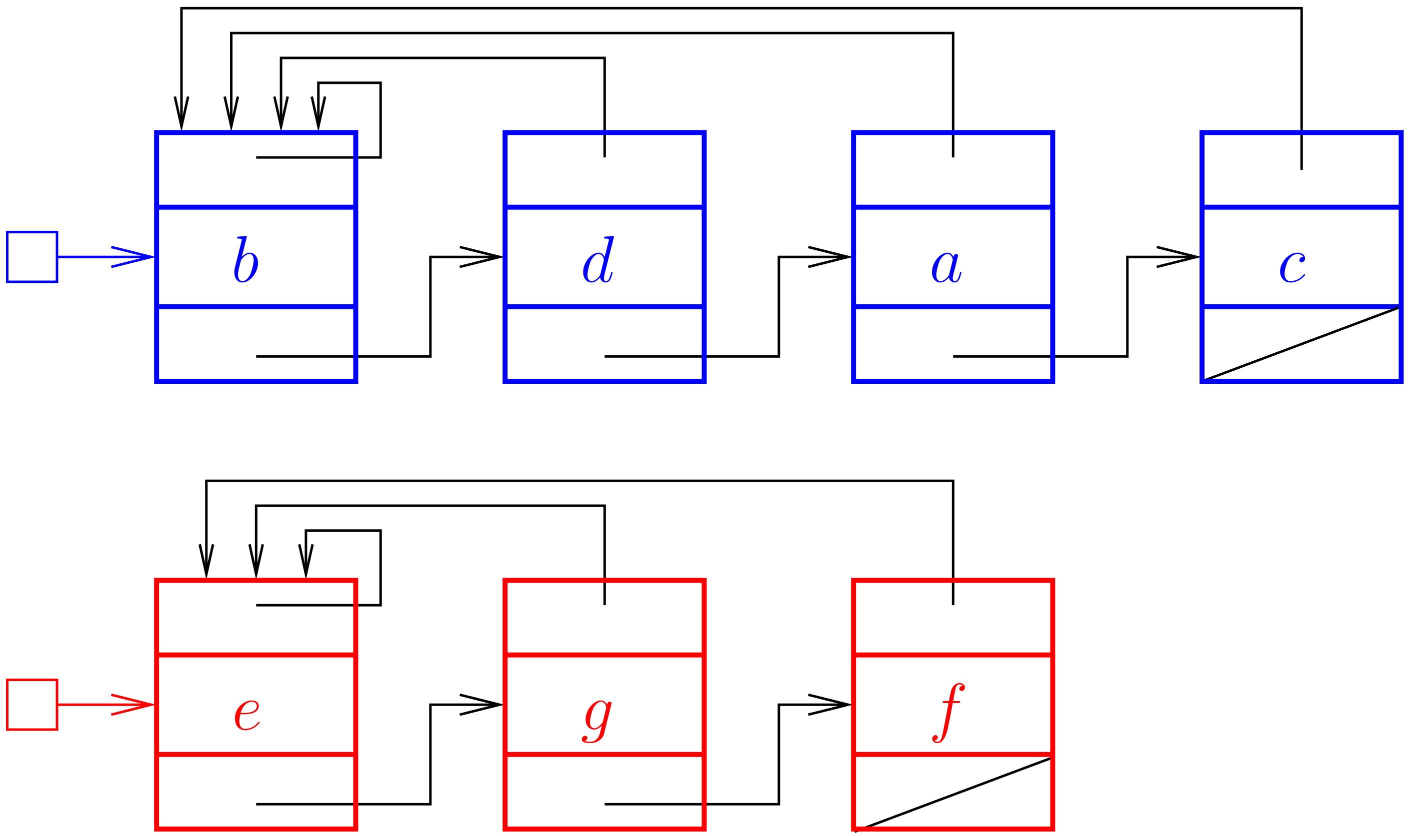
Seqüência de operações MAKESET, UNION, FINDSET

$$\underbrace{\underbrace{\text{M} \quad \text{M} \quad \text{M}}_{n} \quad \text{U} \quad \text{F} \quad \text{U} \quad \text{U} \quad \text{F} \quad \text{U} \quad \text{F} \quad \text{F} \quad \text{F} \quad \text{U} \quad \text{F}}_{m}$$

Que estrutura de dados usar?

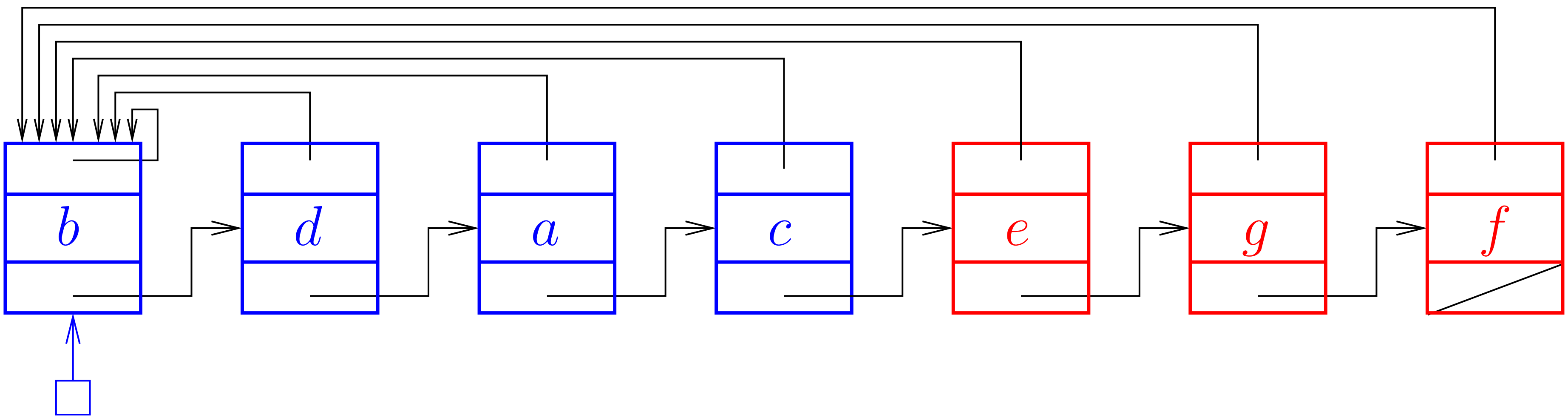
Compromissos (*trade-offs*)

Estrutura de listas ligadas



- cada conjunto tem um representante (início da lista)
- cada nó x tem um campo $repr$
- $repr[x]$ é o representante do conjunto que contém x

Estrutura de listas ligadas



UNION (a, e) : atualiza apontador para o representante.

Consumo de tempo

Operação	número de objetos atualizados
MAKESET(x_1)	1
MAKESET(x_2)	1
$\vdots$	1
MAKESET(x_n)	1
UNION(x_1, x_2)	1
UNION(x_2, x_3)	2
$\vdots$	$\vdots$
UNION(x_{n-1}, x_n)	$n - 1$
total	$= \Theta(n^2) = \Theta(m^2)$

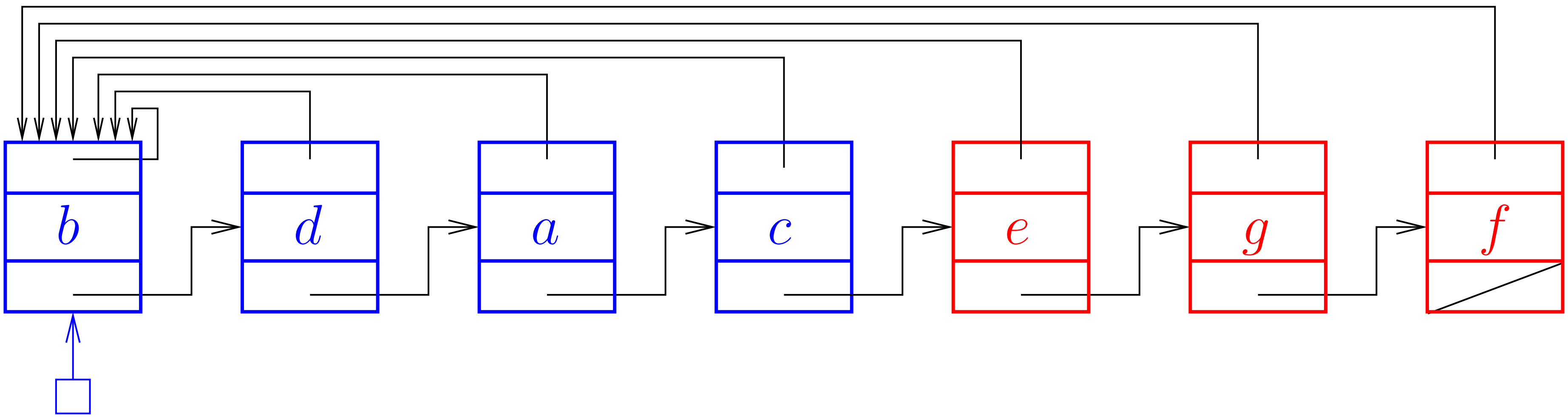
Consumo de tempo

MAKESET	$\Theta(1)$
UNION	$\mathrm{O}(n)$
FINDSET	$\Theta(1)$

Uma seqüência de m operações pode consumir tempo $\Theta(m^2)$ no pior caso.

Consumo de tempo amortizado de cada operação é $\mathrm{O}(m)$.

Melhoramento: *weighted-union*



- cada representante armazena o comprimento da lista
- a lista menor é concatenada com a maior

Cada objeto x é atualizado $\leq \lg n$:

cada vez que x é atualizado o tamanho da lista dobra.

Conclusão

Se conjuntos disjuntos são representados através de listas ligadas e *weighted-union* é utilizada, então uma seqüência de m operações MAKESET, UNION e FINDSET, sendo que n são MAKESET, consome tempo $O(m + n \lg n)$.