AULA 16

Problema dos intervalos disjuntos

Problema: Dados intervalos $[s[1], f[1]), \ldots, [s[n], f[n])$, encontrar uma coleção máxima de intervalos disjuntos dois a dois.

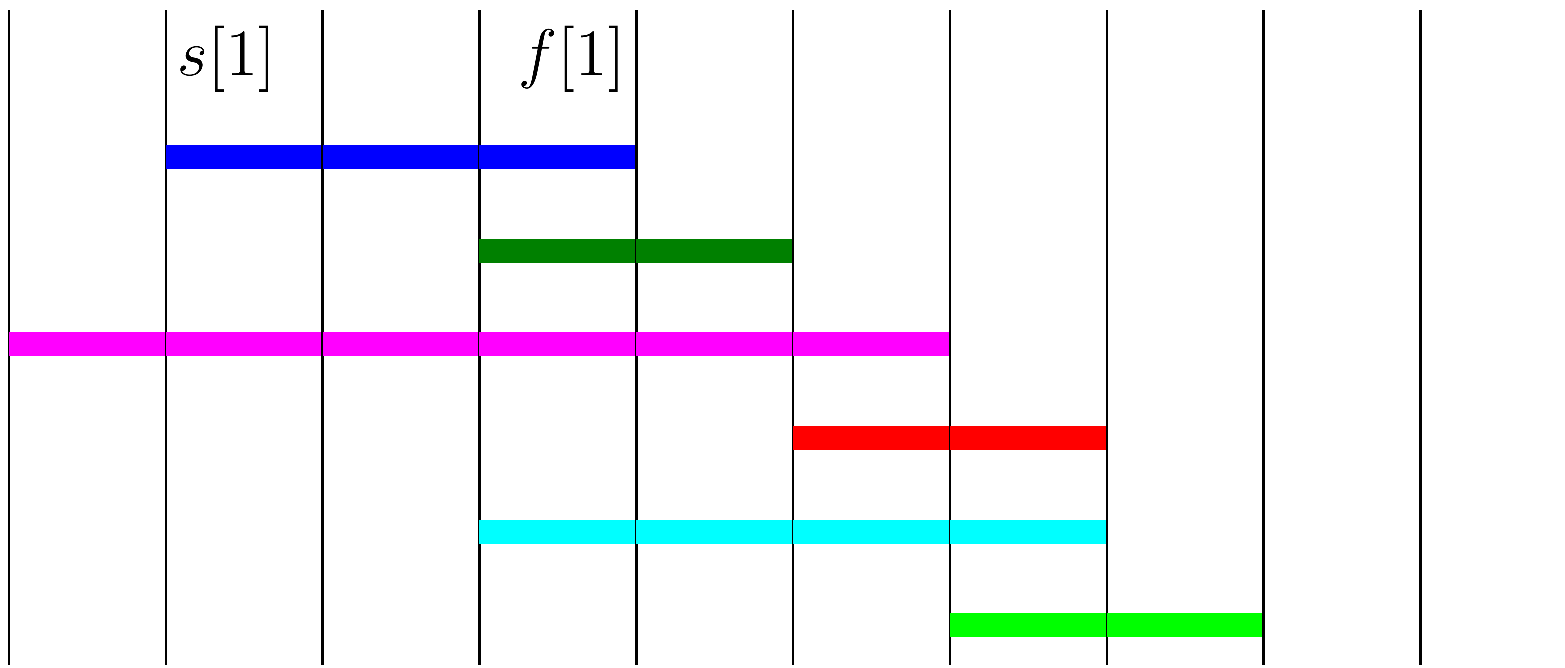
Solução é um subconjunto A de $\{1, \ldots, n\}$.

Problema dos intervalos disjuntos

Problema: Dados intervalos $[s[1], f[1]), \ldots, [s[n], f[n])$, encontrar uma coleção máxima de intervalos disjuntos dois a dois.

Solução é um subconjunto A de $\{1, \ldots, n\}$.

Exemplo:

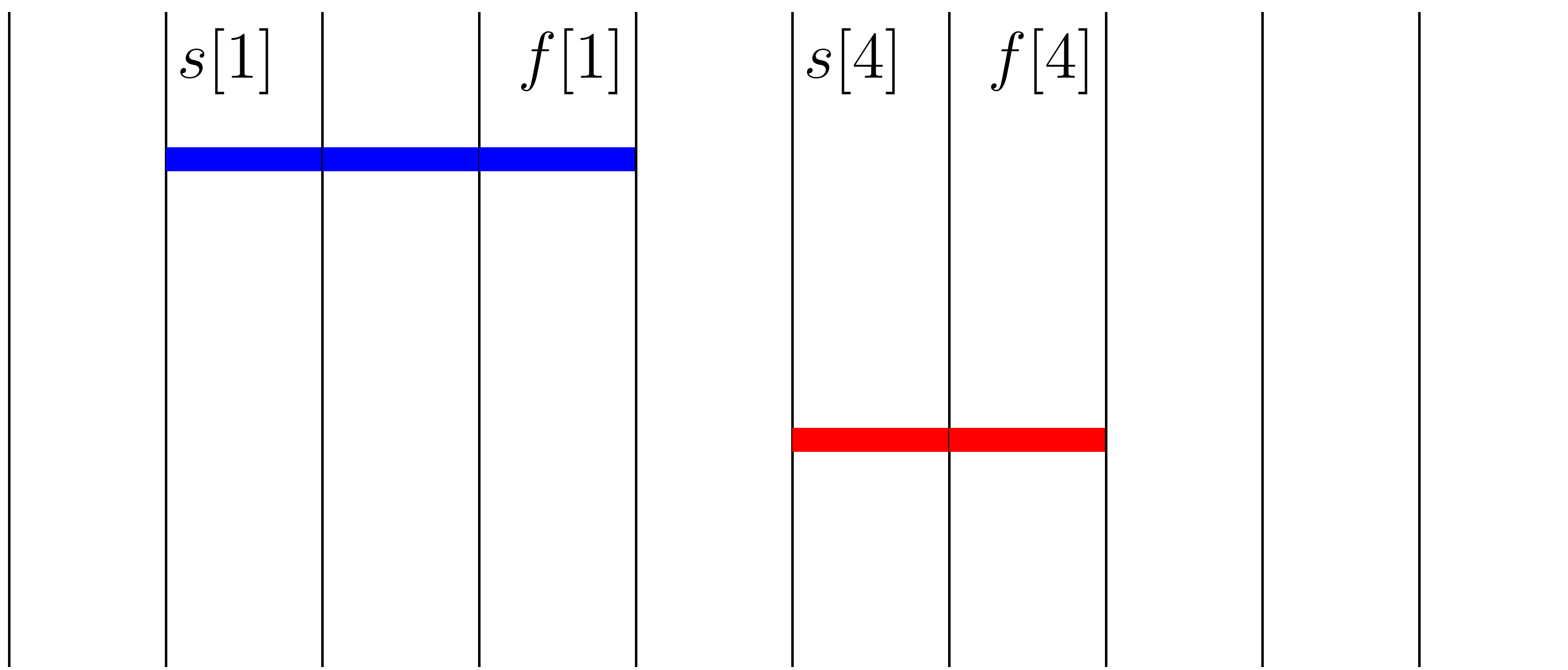


Problema dos intervalos disjuntos

Problema: Dados intervalos $[s[1], f[1]), \ldots, [s[n], f[n])$, encontrar uma coleção máxima de intervalos disjuntos dois a dois.

Solução é um subconjunto A de $\{1, \ldots, n\}$.

Solução:

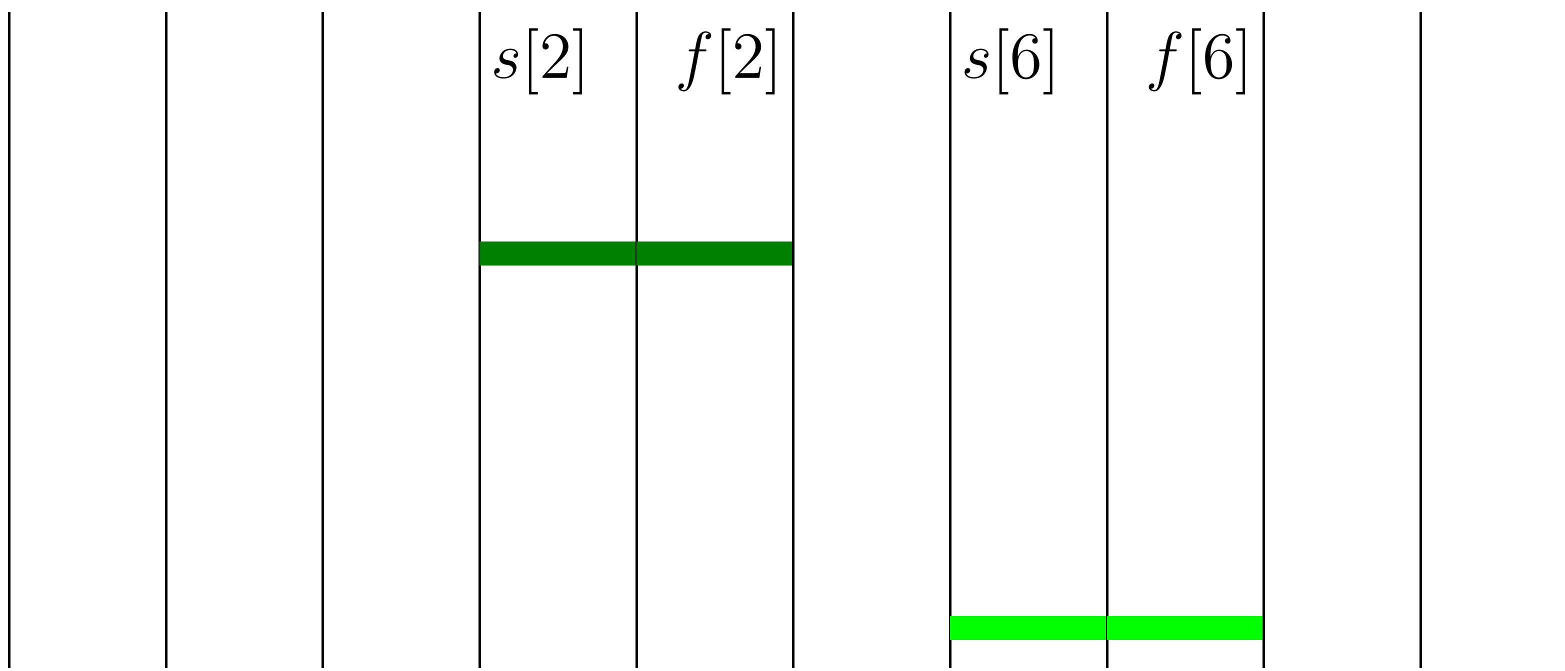


Problema dos intervalos disjuntos

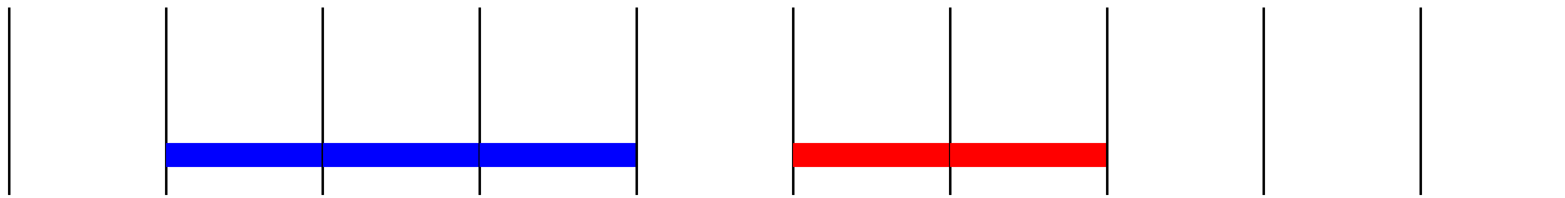
Problema: Dados intervalos $[s[1], f[1]), \ldots, [s[n], f[n])$, encontrar uma coleção máxima de intervalos disjuntos dois a dois.

Solução é um subconjunto A de $\{1, \ldots, n\}$.

Solução:



Motivação



Se cada intervalo é uma "atividade", queremos coleção disjunta máxima de atividades compatíveis
(i e j são compatíveis se $f[i] \leq s[j]$)

Nome no CLRS: Activity Selection Problem

Subestrutura ótima

Intervalos $S := \{1, \ldots, n\}$

Suponha que A é coleção máxima de intervalos de S disjuntos dois a dois.

Se $i \in A$

então $A - \{i\}$ é coleção máxima de intervalos disjuntos de $S - \{k : [s[k], f[k]) \cap [s[i], f[i]) \neq \emptyset\}$.

senão A é coleção máxima de intervalos disjuntos de $S - \{i\}$.

Demonstre a propriedade.

Subestrutura ótima II

Intervalos $S := \{1, \ldots, n\}$

Suponha que A é coleção máxima de intervalos de S disjuntos dois a dois.

Se $i \in A$ é tal que $f[i]$ é mínimo

então $A - \{i\}$ é coleção máxima de intervalos disjuntos de $\{k : s[k] \geq f[i]\}$.

$\{k : s[k] \geq f[i]\} =$ todos intervalos “à direita” de “i”.

Demonstre a propriedade.

Algoritmo de programação dinâmica

Suponha $f[1] \leq f[2] \leq \cdots \leq f[n]$

$t[i] =$ tamanho de uma subcoleção disjunta máxima de $\{i, \ldots, n\}$

$$t[n] = 1$$

$$t[i] = \max\{t[i+1], 1 + t[k]\} \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1,$$

onde k é o menor índice tal que $s[k] \geq f[i]$.

Algoritmo de programação dinâmica

DYNAMIC-ACTIVITY-SELECTOR (s, f, n)

ordene s e f de tal forma que
$$f[1] \leq f[2] \leq \cdots \leq f[n]$$

$A[n+1] \leftarrow \emptyset$
para $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
  $A[i] \leftarrow A[i+1]$
  $k \leftarrow i+1$
  enquanto $k \leq n$ e $s[k] < f[i]$ **faça**
    $k \leftarrow k+1$
  se $|A[i]| < 1 + |A[k]|$
    então $A[i] \leftarrow \{i\} \cup A[k]$
devolva $A[1]$

Consumo de tempo é $\Theta(n^2)$.

Conclusão

Invariante: na linha 2 vale que

(i0) $A[j]$ é coleção disjunta máxima de $\{j, \ldots, n\}$ para $j = i + 1, \ldots, n$.

O consumo de tempo do algoritmo DYNAMIC-ACTIVITY-SELECTOR é $\Theta(n^2)$.

Escolha gulosa

Intervalos $S := \{1, \ldots, n\}$

Se $f[i]$ é mínimo em S,

então EXISTE uma solução ótima A tal que $i \in A$.

Demonstre a propriedade.

Algoritmo guloso

Devolve uma coleção máxima de intervalos disjuntos dois a dois.

```
INTERVALOS-DISJUNTOS (s, f, n)
0   ordene s e f de tal forma que
            f[1] ≤ f[2] ≤ ··· ≤ f[n]
1   A ← {1}
2   i ← 1
3   para j ← 2 até n faça
4       se s[j] ≥ f[i]
5           então A ← A ∪ {j}
6                 i ← j
7   devolva A
```

Consumo de tempo da linha 0 é $\Theta(n \lg n)$.
Consumo de tempo das linhas 1–7 é $\Theta(n)$.

Conclusão

Na linha 3 vale que

(i0) A é uma coleção máxima de intervalos disjuntos de $(s, f, j{-}1)$

> O consumo de tempo do algoritmo INTERVALOS-DISJUNTOS é $\Theta(n \lg n)$.

Algoritmos gulosos

Algoritmo guloso

- procura maximal e acaba obtendo máximo
- procura ótimo local e acaba obtendo ótimo global

costuma ser

- muito simples e intuitivo
- muito eficiente
- difícil provar que está correto

Problema precisa ter

- subestrutura ótima (como na programação dinâmica)
- propriedade da escolha gulosa (*greedy-choice property*)

Exercícios

Exercício 22.A [CLRS 16.1-1]
Escreva um algoritmo de programação dinâmica para resolver o problema dos intervalos disjuntos. (Versão simplificadda do exercício: basta determinar o *tamanho* de uma coleção disjunta máxima.) Qual o consumo de tempo do seu algoritmo?

Exercício 22.B
Prove que o algoritmo guloso para o problema dos intervalos disjuntos está correto. (Ou seja, prove a propriedade da subestrutura ótima e a propriedade da escolha gulosa.)

Exercício 22.C [CLRS 16.1-2]
Mostre que a seguinte idéia também produz um algoritmo guloso correto para o problema da coleção disjunta máxima de intervalos: dentre os intervalos disjuntos dos já escolhidos, escolha um que tenha instante de início máximo. (Em outras palavras, suponha que os intervalos estão em ordem decrescente de início.)

Exercício 22.D [CLRS 16.1-4]
Nem todo algoritmo guloso resolve o problema da coleção disjunta máxima de intervalos. Mostre que nenhuma das três idéias a seguir resolve o problema. Idéia 1: Escolha o intervalo de menor duração dentre os que são disjuntos dos intervalos já escolhidos. Idéia 2: Escolha um intervalo seja disjunto dos já escolhidos e intercepte o menor número possível de intervalos ainda não escolhidos. Idéia 3: Escolha o intervalo disjunto dos já selecionados que tenha o menor instante de início.

Mais exercícios

Exercício 22.E [Coloração de intervalos. CLRS 16.1-3]
Queremos distribuir um conjunto de atividades no menor número possivel de salas. Cada atividade a_i ocupa um certo intervalo de tempo $[s_i, f_i)$; duas atividades podem ser programadas para a mesma sala somente se os correspondentes intervalos são disjuntos. Descreva um algoritmo guloso que resolve o problema. (Represente cada sala por uma cor; use o menor número possível de cores para pintar todos os intervalos.) Prove que o número de salas dado pelo algoritmo é, de fato, mínimo.

Exercício 22.F [pares de livros]
Suponha dado um conjunto de livros numerados de 1 a n. Suponha que o livro i tem peso $p[i]$ e que $0 < p[i] < 1$ para cada i. Problema: acondicionar os livros no menor número possível de envelopes de modo que cada envelope tenha no máximo 2 livros e o peso do conteúdo de cada envelope seja no máximo 1. Escreva um algoritmo guloso que calcule o número mínimo de envelopes. O consumo de tempo do seu algoritmo deve ser $\mathrm{O}(n \lg n)$. Mostre que seu algoritmo está correto (ou seja, prove a "greedy-choice property" e a "optimal substructure" apropriadas). Estime o consumo de tempo do seu algoritmo.

Mais exercícios ainda

Exercício 22.G [Bin-packing]
São dados objetos $1, \ldots, n$ e um número ilimitado de "latas". Cada objeto i tem "peso" w_i e cada lata tem "capacidade" 1: a soma dos pesos dos objetos colocados em uma lata não pode passar de 1. Problema: Distribuir os objetos pelo menor número possível de latas. Programe e teste as seguinte heurísticas. Heurística 1: examine os objetos na ordem dada; tente colocar cada objeto em uma lata já parcialmente ocupada que tiver mais "espaço" livre sobrando; se isso for impossível, pegue uma nova lata. Heurística 2: rearranje os objetos em ordem decrescente de peso; em seguida, aplique a heurística 1. Essas herísticas resolvem o problema? Compare com o exercício 22.F.
Para testar seu programa, sugiro escrever uma rotina que receba $n \leq 100000$ e $u \leq 1$ e gere $w_1, \ldots, w_n$ aleatoriamente, todos no intervalo $(0, u)$.

Exercício 22.H [parte de CLRS 16-4, modificado]
Seja $1, \ldots, n$ um conjunto de *tarefas*. Cada tarefa consome um dia de trabalho; durante um dia de trabalho somente uma das tarefas pode ser executada. Os dias de trabalho são numerados de 1 a n. A cada tarefa t está associado um *prazo* p_t: a tarefa deveria ser executada em algum dia do intervalo $1\,..\,p_t$. A cada tarefa t está associada uma *multa* não-negativa m_t. Se uma dada tarefa t é executada depois do prazo p_t, sou obrigado a pagar a multa m_t (mas a multa não depende do número de dias de atraso). Problema: Programar as tarefas (ou seja, estabelecer uma bijeção entre as tarefas e os dias de trabalho) de modo a minimizar a multa total. Escreva um algoritmo guloso para resolver o problema. Prove que seu algoritmo está correto (ou seja, prove a "greedy-choice property" e

Análise amortizada

CLR 18 ou CLRS 17

Contador binário

Incrementa de 1 o número binário representado por $A[1\,.\,.\,k]$.

INCREMENT (A, k)
    $i \leftarrow 0$
    enquanto $i < k$ **e** $A[i] = 1$ **faça**
        $A[i] \leftarrow 0$
        $i \leftarrow i + 1$
    se $i < k$
        então $A[i] \leftarrow 1$

Contador binário

Incrementa de 1 o número binário representado por $A[1\,.\,.\,k]$.

INCREMENT (A, k)
$i \leftarrow 0$
enquanto $i < k$ **e** $A[i] = 1$ **faça**
    $A[i] \leftarrow 0$
    $i \leftarrow i + 1$
se $i < k$
    então $A[i] \leftarrow 1$

Entrada:

$k-1$		3	2	1	0	
0	1	0	1	1	1	A

Contador binário

Incrementa de 1 o número binário representado por $A[1\,..\,k]$.

INCREMENT (A, k)
  $i \leftarrow 0$
  enquanto $i < k$ **e** $A[i] = 1$ **faça**
    $A[i] \leftarrow 0$
    $i \leftarrow i + 1$
  se $i < k$
    então $A[i] \leftarrow 1$

Entrada:

$k-1$		3	2	1	0	
0	1	0	1	1	1	A

Saída:

$k-1$		3	2	1	0	
0	1	1	0	0	0	A

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(1)$
2	$O(k)$
3	$O(k)$
4	$O(k)$
5	$\Theta(1)$
6	$O(1)$
total	$O(k) + \Theta(1) = O(k)$

"Custo" =

consumo de tempo = número de bits alterados = $O(k)$

Seqüência de n chamadas

$$\underbrace{\text{INCR} \quad \text{INCR} \quad \cdots \quad \text{INCR} \quad \text{INCR} \qquad \text{INCR}}_{n}$$

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(nk)$

Seqüência de n chamadas

$$\underbrace{\text{INCR} \quad \text{INCR} \quad \cdots \quad \text{INCR} \quad \text{INCR} \qquad \text{INCR}}_{n}$$

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(nk)$

EXAGERO!

Exemplo

$n = 16$ $\qquad$ $k = 6$

A							A					
5	4	3	2	1	0		5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0		0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1		0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0		0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1		0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0		0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1		0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0		0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1		0	0	1	1	1	1
							0	1	0	0	0	0

Exemplo

$n = 16$ $\quad$ $k = 6$

A	A
5 4 3 2 1 0	5 4 3 2 1 0
0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 1	0 0 1 0 0 1
0 0 0 0 1 0	0 0 1 0 1 0
0 0 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1
0 0 0 1 0 0	0 0 1 1 0 0
0 0 0 1 0 1	0 0 1 1 0 1
0 0 0 1 1 0	0 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 1	0 0 1 1 1 1
	0 1 0 0 0 0

$A[0]$	muda	n	vezes
$A[1]$	"	$\lfloor n/2 \rfloor$	"
$A[2]$	"	$\lfloor n/4 \rfloor$	"
$A[3]$	"	$\lfloor n/8 \rfloor$	"

Custo amortizado

Custo total:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \;<\; n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \;=\; 2n \;=\; \Theta(n)$$

Custo amortizado (= custo fictício = custo faz-de-conta) de uma operação:

$$\frac{2n}{n} \;=\; \Theta(1)$$

Este foi o método agregado de análise: soma os custos de todas as operações para determinar o custo amortizado de cada operação

Conclusões

O consumo de tempo de uma seqüência de n execuções do algoritmo INCREMENT é $\Theta(n)$.

O consumo de tempo amortizado do algoritmo INCREMENT é $\Theta(1)$.

Método de análise contábil

Pague $2 para mudar $0 \to 1$

$0 para mudar $1 \to 0$

Custo amortizado por chamada de INCREMENT: $\leq$ $2

Seqüência de n chamadas de INCREMENT.

Como $ armazenado nunca é negativo,

$$
\begin{aligned}
\text{soma custos reais} &\leq \\
&\leq \text{soma custos amortizados} \\
&= 2n \\
&= \mathrm{O}(n)
\end{aligned}
$$

Método de análise potencial

$$A_0 \xrightarrow{\text{1ª op}} A_1 \xrightarrow{\text{2ª op}} A_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{n^{\text{a}}\text{ op}} A_n$$

A_i = estado de A depois da i^{a} operação

Custo real da i^{a} operação: $c_i = t_i + 1$
onde t_i = número de $1{\to}0$ na i^{a} operação

Energia potencial de A_i:

$$\begin{aligned} \Phi(A_i) &= \text{número de bits "1"} \\ &= \Phi(A_{i-1}) - t_i + 1 \\ &\geq 0 \quad \text{Importante!} \end{aligned}$$

Custo amortizado

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(A_i) - \Phi(A_{i-1}) \\
&= c_i + \Phi(A_{i-1}) - t_i + 1 - \Phi(A_{i-1}) \\
&= c_i - t_i + 1 \\
&= (t_i + 1) - t_i + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Custo amortizado

Soma dos custos amortizados limita a soma dos custos reais pois $\Phi \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i &= \sum (c_i + \Phi(A_i) - \Phi(A_{i-1})) \\
&= \sum c_i \;+\; \Phi(A_n) - \Phi(A_0) \\
&= \sum c_i \;+\; \Phi(A_n) - 0 \\
&= \sum c_i \;+\; \Phi(A_n) \\
&\geq \sum c_i\,, \qquad \text{(pois } \Phi(A_n) \geq 0\text{)} \\
&\geq \sum c_i \\
&= \text{soma dos custos reais}
\end{aligned}
$$

Conclusões

$$\sum c_i \;\leq\; \sum \hat{c}_i \;=\; 2n \;=\; \mathrm{O}(n)\,.$$

Resumo da relação entre c, $\hat{c}$ e Φ:

$$\hat{c}_i - c_i \;=\; \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

Pilhas

PUSH(S, x) empilha o elemento s na pilha S

POP(S) desempilha e devolve o elemento no topo de S

STACK-EMPTY(S) devolve VERDADE se a pilha S está vazia e FALSO em caso contrário.

MULTIPOP (S, k)

1 **enquanto** STACK-EMPTY(S) $=$ FALSO **e** $k \neq 0$ **faça**
2   POP(S)
3     $k \leftarrow k - 1$

Consumo de tempo de MULTIPOP é $\mathrm{O}(\min\{|S|, k\})$.

Seqüência de n chamadas

$$\underbrace{\text{PUSH} \quad \text{PUSH} \quad \cdots \quad \text{POP} \quad \text{PUSH} \quad \text{MULTIPOP}}_{n}$$

Consumo de tempo é $O(n^2)$

Seqüência de n chamadas

$$\underbrace{\text{PUSH} \quad \text{PUSH} \quad \cdots \quad \text{POP} \quad \text{PUSH} \quad \text{MULTIPOP}}_{n}$$

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(n^2)$

EXAGERO!

Método agregado

Cada elemento pode ser desempilhado apenas 1 vez.

Logo, número de POP's em uma pilha não vazia $\leq$ número de PUSH's.

Custo total:

$$= \text{custo PUSH's} + \text{custo POP's} + \text{custo MULTIPOP's}$$

$$\leq n + \text{custo POP's pilha ñ vazia}$$

$$\leq 2\,n = \mathrm{O}(n)$$

Custo amortizado de cada operação:

$$\frac{2n}{n} = \Theta(1)$$

Conclusões

O consumo de tempo de uma seqüência de n execuções dos algoritmos POP, PUSH e MULTIPOP é $\Theta(n)$.

O consumo de tempo amortizado de cada algoritmo é $\Theta(1)$.

Método de análise contábil

Custos reais:

PUSH	\$1
POP	\$1
MULTIPOP	\$ $\min\{|S|, k\}$

Créditos:

Pague	\$2 por um PUSH
	\$1 por um POP
	\$1 por um MULTIPOP

Custo amortizado por chamada de POP, PUSH e MULTIPOP: $\leq$ \$2

Método de análise contabil

Como $ armazenado nunca é negativo,

$$\begin{aligned} \text{soma custos reais} &\le \\ &\le \text{soma custos amortizados} \\ &\le 2n \\ &= \mathrm{O}(n) \end{aligned}$$

Método de análise potencial

$$S_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\ \text{op}} S_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\ \text{op}} S_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{n^{\text{a}}\ \text{op}} S_n$$

S_i = estado de S depois da i^{a} operação

Energia potencial de S_i:

$$\begin{aligned} \Phi(S_i) &= \text{número de objetos na pilha} \\ &\geq 0 \quad \text{(Importante!)} \end{aligned}$$

Custo amortizado PUSH

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é PUSH, então $c_i = 1$ e

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\ &= c_i + 1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Custo amortizado Pop

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é POP, então $c_i = 1$ e

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\
&= c_i - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Custo amortizado MULTIPOP

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é MULTIPOP e k' é o número de elementos desempilhados, então $c_i = k'$ e

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\ &= c_i - k' \\ &= k' - k' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Custo amortizado

Soma dos custos amortizados limita a soma dos custos reais pois $\Phi \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i &= \sum (\hat{c}_i - \Phi(S_i) + \Phi(S_{i-1})) \\
&= \sum \hat{c}_i \; - \; \Phi(S_n) + \Phi(S_0) \\
&= \sum \hat{c}_i \; - \; \Phi(S_n) + 0 \\
&= \sum \hat{c}_i \; - \; \Phi(S_n) \\
&\leq \sum \hat{c}_i \,, \qquad \text{(pois } \Phi(S_n) \geq 0\text{)} \\
&\leq \sum 2 \\
&= 2\,n
\end{aligned}
$$