# AULA 10

# Quicksort aleatorizado

CLRS 7.4

# Relembrar ...

Antes de mais nada, vamos relembrar rapidamente os melhores momentos da aula 9:

- PARTICIONE;
- consumo de tempo do PARTICIONE;
- QUICKSORT; e
- consumo de tempo do QUICKSORT.

# Partição

Problema: Rearranjar um dado vetor $A[p\,..\,r]$ e devolver um índice $q$, $p \leq q \leq r$, tais que

$$A[p\,..\,q-1] \leq A[q] < A[q+1\,..\,r]$$

Entra:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & p & & & & & & & & & r \\ \hline A & 99 & 33 & 55 & 77 & 11 & 22 & 88 & 66 & 33 & 44 \\ \hline \end{array}$$

Sai:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & p & & & & q & & & & & r \\ \hline A & 33 & 11 & 22 & 33 & 44 & 55 & 99 & 66 & 77 & 88 \\ \hline \end{array}$$

# Particione

| | $p$ | | | | | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $j$ | | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | $i$ | | | $j$ | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | | | | $j$ | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | $i$ | | | | $j$ | | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 11 | 55 | 77 | 99 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $i$ | | | | $j$ | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 55 | 77 | 99 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | $j$ | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | | $i$ | | | | $j$ | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 55 | 77 | 99 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | | | $i$ | | | | $j$ | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | | | $i$ | | | | | $j$ | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $i$ | | | | $j$ | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 55 | 77 | 99 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | $j$ | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | | | $j$ | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | | $j$ | | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | | $i$ | | | | $j$ | | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 55 | 77 | 99 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | | | $i$ | | | | $j$ | | | $x$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |
| | | | | $i$ | | | | | | $j$ |
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 33 | 99 | 55 | 88 | 66 | 77 | 44 |

# Particione

| $i$ | $j$ | | | | | | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | $i$ | | $j$ | | | | | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 99 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | $i$ | | | | $j$ | | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 11 | 55 | 77 | 99 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | $i$ | | | | $j$ | | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 77 | 99 | 55 | 88 | 66 | 33 | 44 |

| | | | | $i$ | | | | | | $j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 33 | 99 | 55 | 88 | 66 | 77 | 44 |

| | $p$ | | | | $q$ | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 88 | 66 | 77 | 99 |

# Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \leq q \leq r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \leq A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

PARTICIONE $(A, p, r)$
1 $x \leftarrow A[r]$ $\triangleright$ $x$ é o "pivô"
2 $i \leftarrow p{-}1$
3 **para** $j \leftarrow p$ **até** $r - 1$ **faça**
4 **se** $A[j] \leq x$
5 **então** $i \leftarrow i + 1$
6 $A[i] \leftrightarrow A[j]$
7 $A[i{+}1] \leftrightarrow A[r]$
8 **devolva** $i + 1$

O algoritmo PARTICIONE consome tempo $\Theta(n)$.

# Quicksort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT $(A, p, r)$
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE $(A, p, r)$
3 QUICKSORT $(A, p, q-1)$
4 QUICKSORT $(A, q+1, r)$

| | $p$ | | | | | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Quicksort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT $(A, p, r)$
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE $(A, p, r)$
3 QUICKSORT $(A, p, q-1)$
4 QUICKSORT $(A, q+1, r)$

| | $p$ | | | | $q$ | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 33 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 88 | 66 | 77 | 99 |

No começo da linha 3,

$$A[p \mathinner{.\,.} q-1] \le A[q] \le A[q+1 \mathinner{.\,.} r]$$

# Quicksort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT $(A, p, r)$
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE $(A, p, r)$
3 QUICKSORT $(A, p, q-1)$
4 QUICKSORT $(A, q+1, r)$

| | $p$ | | | | $q$ | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 33 | 44 | 55 | 88 | 66 | 77 | 99 |

# Quicksort

Rearranja $A[p \mathrel{.\,.} r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT $(A, p, r)$
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE $(A, p, r)$
3 QUICKSORT $(A, p, q - 1)$
4 QUICKSORT $(A, q + 1, r)$

| | $p$ | | | | $q$ | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |

O consumo de tempo é proporcional ao número de execuções da linha 4 do PARTICIONE.

# Resumo

O consumo de tempo do QUICKSORT é $O(n^2)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT no melhor caso é $\Theta(n \log n)$.

# Caso médio

O consumo de tempo do QUICKSORT no caso médio é $???$.

Partição $\frac{1}{3}$ para $\frac{2}{3}$:

$$R(n) = R(\lfloor \tfrac{n-1}{3} \rfloor) + R(\lceil \tfrac{2n-2}{3} \rceil) + \Theta(n)$$

Solução: $R(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.        veja exercício a seguir

# Exercício

Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + 5n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $\mathrm{O}(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

# Exercício

Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

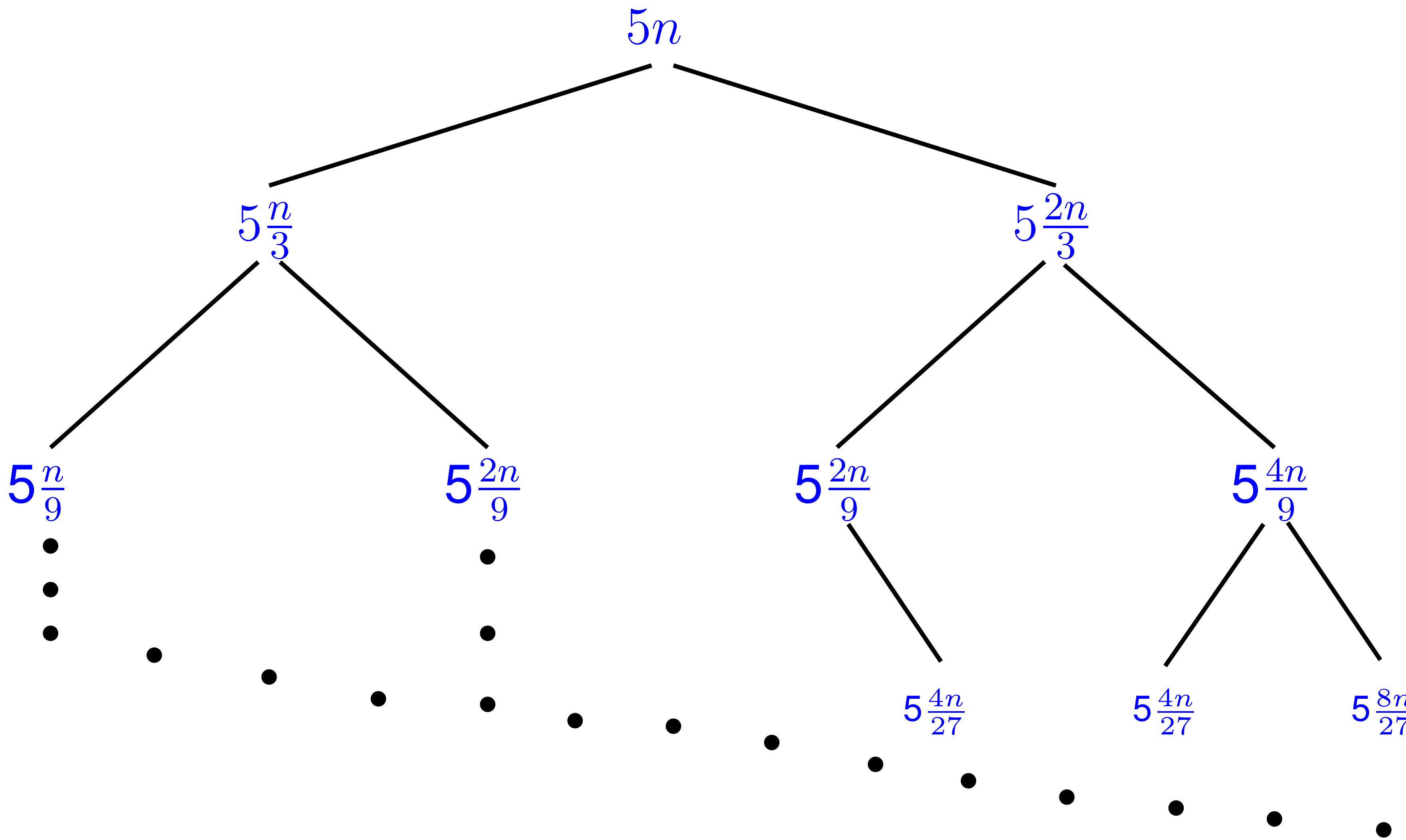
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + 5n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $\mathrm{O}(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

Vamos olhar a árvore da recorrência.

# Arvoré da recorrência




total de níveis $\leq \log_{3/2} n$

# Arvoré da recorrência

soma em cada horizontal $\leq 5n$

número de "níveis" $\leq \log_{3/2} n$

$T(n)$ = a soma de tudo

$$T(n) \;\leq\; 5n \log_{3/2} n \;+\; \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\log_{3/2} n}$$

$T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

# De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + 5n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

| $n$ | $T(n)$ |
|---|---|
| 1 | $1$ |
| 2 | $1 + 1 + 5 \cdot 2 = 12$ |
| 3 | $1 + 12 + 5 \cdot 3 = 28$ |
| 4 | $12 + 12 + 5 \cdot 4 = 44$ |

Vamos mostrar que $T(n) \leq 100\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$
Para $n = 2$ temos $T(2) = 12 < 100 \cdot 2 \cdot \lg 2$.
Para $n = 3$ temos $T(3) = 28 < 100 \cdot 3 \cdot \lg 3$.

Suponha agora que $n > 3$. Então

# Continuação da prova

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil) + T(\lfloor \tfrac{2n}{3} \rfloor) + 5n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 100\lceil \tfrac{n}{3} \rceil \lg \lceil \tfrac{n}{3} \rceil + 100\lfloor \tfrac{2n}{3} \rfloor \lg \lfloor \tfrac{2n}{3} \rfloor + 5n \\
&\leq 100\frac{n+2}{3} \lceil \lg \frac{n}{3} \rceil + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&< 100\frac{n+2}{3} (\lg \frac{n}{3} + 1) + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&= 100\frac{n+2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&= 100\frac{n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 100\frac{2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n
\end{aligned}
$$

# Continuação da continuação da prova

$$
\begin{aligned}
&< 100n\lg\frac{2n}{3} + 67\lg\frac{2n}{3} + 5n \\
&= 100n\lg n + 100n\lg\frac{2}{3} + 67\lg n + 67\lg\frac{2}{3} + 5n \\
&< 100n\lg n + 100n(-0.58) + 67\lg n + 67(-0.58) + 5n \\
&< 100n\lg n - 58n + 67\lg n - 38 + 5n \\
&= 100n\lg n - 53n + 67\lg n - 38 \\
&< 100n\lg n
\end{aligned}
$$

Iiiééééssss!

# De volta ao caso médio

O consumo de tempo do QUICKSORT no caso médio é $???$.

Partição $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$:

$$R(n) = R(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor) + R(\left\lceil \frac{9n-9}{10} \right\rceil) + \Theta(n)$$

# De volta ao caso médio

O consumo de tempo do QUICKSORT no caso médio é ???.

Partição $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$:

$$R(n) = R(\lfloor \tfrac{n-1}{10} \rfloor) + R(\lceil \tfrac{9n-9}{10} \rceil) + \Theta(n)$$

Solução: $R(n)$ é $\Theta(n \lg n)$

# De volta ao caso médio

O consumo de tempo do QUICKSORT no caso médio é $???$.

Partição $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$:

$$R(n) = R(\lfloor \tfrac{n-1}{10} \rfloor) + R(\lceil \tfrac{9n-9}{10} \rceil) + \Theta(n)$$

Solução: $R(n)$ é $\Theta(n \lg n)$

Isso sugere que consumo médio é $\Theta(n \lg n)$.

Confirmação?

# Exemplos

Número médio de execuções da linha 4 do PARTICIONE.

Suponha que $A[p\,.\,.\,r]$ é permutação de $1\,.\,.\,n$.

| $A[p\,.\,.\,r]$ | execs |
|---|---|
| 1,2 | 1 |
| 2,1 | 1 |
| média | 1 |

| $A[p\,.\,.\,r]$ | execs |
|---|---|
| 1,2,3 | 2+1 |
| 2,1,3 | 2+1 |
| 1,3,2 | 2+0 |
| 3,1,2 | 2+0 |
| 2,3,1 | 2+1 |
| 3,2,1 | 2+1 |
| média | 16/6 |

# Mais um exemplo

| $A[p\,.\,.\,r]$ | execs | $A[p\,.\,.\,r]$ | execs |
|---|---|---|---|
| 1,2,3,4 | 3+3 | 1,3,4,2 | 3+1 |
| 2,1,3,4 | 3+3 | 3,1,4,2 | 3+1 |
| 1,3,2,4 | 3+2 | 1,4,3,2 | 3+1 |
| 3,1,2,4 | 3+2 | 4,1,3,2 | 3+1 |
| 2,3,1,4 | 3+3 | 3,4,1,2 | 3+1 |
| 3,2,1,4 | 3+3 | 4,3,1,2 | 3+1 |
| 1,2,4,3 | 3+1 | 2,3,4,1 | 3+3 |
| 2,1,4,3 | 3+1 | 3,2,4,1 | 3+3 |
| 1,4,2,3 | 3+1 | 2,4,3,1 | 3+2 |
| 4,1,2,3 | 3+1 | 4,2,3,1 | 3+2 |
| 2,4,1,3 | 3+1 | 3,4,2,1 | 3+3 |
| 4,2,1,3 | 3+1 | 4,3,2,1 | 3+3 |
| | | média | 116/24 |

# Quicksort caso médio

Rearranja $A[p \mathinner{..} r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT $(A, p, r)$
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE $(A, p, r)$
3 QUICKSORT $(A, p, q-1)$
4 QUICKSORT $(A, q+1, r)$

Análise do consumo médio?

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE

Suponha que $A[1 \mathinner{..} n]$ é permutação aleatória uniforme de $1, \ldots, n$

Cada permutação tem probabilidade $1/n!$.

# Consumo de tempo médio

O número esperado $C(n)$ de comparações na linha 4 do PARTICIONE satisfaz a recorrência:

$$C(0) = 0$$

$$C(n) = \frac{1}{n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} C(k) + C(n-k-1)\Big) + n - 1 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rescrevendo ...

$$C(0) = 0$$

$$C(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C(k) + n - 1 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

# Consumo de tempo médio (cont.)

O número esperado $C(n)$ de comparações na linha 4 do PARTICIONE satisfaz a recorrência:

$$C(0) = 0$$

$$C(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C(k) + n - 1 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Para nos livrarmos da divisão, multiplicamos ambos os lados por $n$

$$nC(n) = 2\sum_{k=0}^{n-1} C(k) + n^2 - n$$

# Consumo de tempo médio (cont.)

Agora, para nos livramos do somatório, subtraímos a equação anterior de

$$(n-1)C(n-1) = 2\sum_{k=0}^{n-2} C(k) + (n-1)^2 - (n-1)$$

e obtemos

$$nC(n) - (n-1)C(n-1) = 2\,C(n-1) + 2n - 2.$$

Agora temos que resolver uma recorrência 'mais simples':

$$C(0) = 0$$

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

# Consumo de tempo médio (cont.)

Multiplicando, ambos os lados por $\frac{1}{n(n+1)}$ obtemos

$$\frac{1}{n+1}C(n) = \frac{1}{n}C(n-1) + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)}\ .$$

Fazendo $S(n) := \frac{1}{n+1}C(n)$ chegamos a recorrência

$$S(0) = 0$$

$$S(n) = S(n-1) + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

que tem como solução

$$S(n) = 2\Big(H_{n+1} - 2 - \frac{1}{n+1}\Big)\ .$$

# Consumo de tempo médio (cont.)

Concluímos que

$$C(n) = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2 \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\ln(n+1) < H_{n+1} < 1 + \ln(n+1)$$

Verifiquemos o valor de $C(n)$ para valores pequenos

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C(n)$ | 0 | 1 | 1 | $16/6$ | $116/24$ |

Hmmmmm, parece que está certo.

# Conclusões

$C(n)$ é $\Theta(n \log n)$.

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT é $\Theta(n \log n)$.

# Quicksort aleatorizado

PARTICIONE-ALEA$(A, p, r)$

$i \leftarrow$ RANDOM $(p, r)$
$A[i] \leftrightarrow A[r]$
**devolva** PARTICIONE $(A, p, r)$

QUICKSORT-ALE $(A, p, r)$

**se** $p < r$
    **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA $(A, p, r)$
        QUICKSORT-ALE $(A, p, q-1)$
        QUICKSORT-ALE $(A, q+1, r)$

Análise do consumo médio?

Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE

# Exemplo

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | 7 | 4 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 | 5 | 7 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

# Consumo de tempo esperado

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$.

$X_{ab}$ = número de comparações entre $a$ e $b$ na linha 4 de PARTICIONE

Queremos calcular

$$X = \text{total de comparações } \text{“}A[j] \leq x\text{”}$$
$$= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

# Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de $X_{ab}$ valer 1?

# Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de $X_{ab}$ valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}=1\} \;=\; \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} \;=\; \mathrm{E}[X_{ab}]$$

# Consumo de tempo esperado

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a, \ldots, b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de $X_{ab}$ valer 1?

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} = \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1} = \mathrm{E}[X_{ab}]$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$\mathrm{E}[X] =$ ????

# Consumo de tempo esperado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathrm{E}[X_{ab}] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \Pr\{X_{ab}=1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{b-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&< 2n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \;<\; 2n\,(1+\ln n)
\end{aligned}
$$

CLRS (A.7), p.1060

# Conclusões

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT-ALE é $O(n \log n)$.

Do exercício 7.4-4 do CLRS temos que

O consumo de tempo esperado do algoritmo QUICKSORT-ALE é $\Theta(n \log n)$.