AULA 9

Análise probabilística

CLRS 5.1, C.2, C.3

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1\,.\,.\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

MAX (A, n)
1 $\quad max \leftarrow 0$
2 $\quad$ **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $\qquad$ **se** $A[i] > max$
4 $\qquad\quad$ **então** $max \leftarrow A[i]$
5 $\quad$ **devolva** max

Quantas vezes linha 4 é executada?

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX (A, n)
1    max ← 0
2    para i ← 1 até n faça
3        se A[i] > max
4            então max ← A[i]
5    devolva max
```

Quantas vezes linha 4 é executada?
Melhor caso, pior caso, caso médio?

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

MAX (A, n)
1 $\quad max \leftarrow 0$
2 $\quad$ **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 $\quad\quad$ **se** $A[i] > max$
4 $\quad\quad\quad$ **então** $max \leftarrow A[i]$
5 $\quad$ **devolva** max

Quantas vezes linha 4 é executada?
Melhor caso, pior caso, caso médio?

Suponha que $A[1\,..\,n]$ é permutação aleatória uniforme de $1, \ldots, n$

Cada permutação tem probabilidade $1/n!$.

Um pouco de probabilidade

(S, Pr) espaço de probabilidade
$S =$ conjunto finito (eventos elementares)
$\mathrm{Pr}\{\} =$ (distribuição de probabilidades) função de S em $[0, 1]$ tal que

p1. $\mathrm{Pr}\{s\} \geq 0$;

p2. $\mathrm{Pr}\{S\} = 1$; e

p3. $R, T \subseteq S, R \cap T = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Pr}\{R \cup T\} = \mathrm{Pr}\{R\} + \mathrm{Pr}\{T\}$.

$\mathrm{Pr}\{U\}$ é abreviação de $\displaystyle\sum_{u \in U} \mathrm{Pr}\{u\}$.

Um pouco de probabilidade

(S, Pr) espaço de probabilidade
$S =$ conjunto finito (eventos elementares)
$\mathrm{Pr}\{\} =$ (distribuição de probabilidades) função de S em $[0,1]$ tal que

p1. $\mathrm{Pr}\{s\} \geq 0$;

p2. $\mathrm{Pr}\{S\} = 1$; e

p3. $R, T \subseteq S, R \cap T = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Pr}\{R \cup T\} = \mathrm{Pr}\{R\} + \mathrm{Pr}\{T\}$.

$$\mathrm{Pr}\{U\} \text{ é abreviação de } \sum_{u \in U} \mathrm{Pr}\{u\}.$$

No problema do máximo:

- S é o conjunto das permutações dos números em $A[1\,..\,n]$;
- na distribuição uniforme, para cada $s \in S$, $\mathrm{Pr}\{s\} = 1/n!$.

Eventos

Um evento é um subconjunto de S.

Eventos

Um evento é um subconjunto de S.

No problema do máximo, eventos são subconjuntos de permutações de $A[1\,..\,n]$.

Exemplo.

$$U := \{\text{permutações de } A[1\,..\,n] \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$$

é um evento de S.

Eventos

Um evento é um subconjunto de S.

No problema do máximo, eventos são subconjuntos de permutações de $A[1\,.\,.\,n]$.

Exemplo.

$$U := \{\text{permutações de } A[1\,.\,.\,n] \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$$

é um evento de S.

Se $\Pr\{\}$ é distribuição uniforme, então

$$\Pr\{U\} = ???.$$

Eventos

Um evento é um subconjunto de S.

No problema do máximo, eventos são subconjuntos de permutações de $A[1\,..\,n]$.

Exemplo.

$$U := \{\text{permutações de } A[1\,..\,n] \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$$

é um evento de S.

Se $\Pr\{\}$ é distribuição uniforme, então

$$\Pr\{U\} = 1/n.$$

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional de ocorrer um evento E ocorrer dado que um evento F ocorreu é

$$\Pr\{E \mid F\} = \frac{\Pr\{E \cap F\}}{\Pr\{F\}}.$$

A expressão acima só faz sentido quando $\Pr\{F\} \neq 0$.

$\Pr\{E \mid F\}$ lê-se “A probabilidade de E dado F”.

Intuitivamente, estamos interessados na probabilidade de ocorrer $E \cap F$ dentro de F. Como F define a nossa restrição do espaço, normalizamos as probabilidades dividindo por $\Pr\{F\}$.

Rescrevendo, temos que

$$\Pr\{E \cap F\} = \Pr\{F\} \times \Pr\{E \mid F\}.$$

Probabilidade condicional (exemplo)

E := {permutações de $A[1\,.\,.\,4]$ em que $A[1] = 1$ e $A[2] = 2$}

F := {permutações de $A[1\,.\,.\,4]$ em que $A[1] = 1$}

$\Pr\{E \cap F\} = \Pr\{E\} = 2!/4! = 1/12$

$\Pr\{F\} = 3!/4! = 1/4$

Logo,

$$\Pr\{E \mid F\} = \frac{\Pr\{E \cap F\}}{\Pr\{F\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Verifique que $1/3$ das permutações de $A[1\,.\,.\,4]$ com $A[1] = 1$ têm $A[2] = 2$.

Variáveis aleatórias e esperança

Uma variável aleatória é uma função númerica definida sobre os eventos elementares.

Variáveis aleatórias e esperança

Uma variável aleatória é uma função númerica definida sobre os eventos elementares.

Exemplo de variável aleatória

$X(A) :=$ número de execuções da linha 4 em MAX(A, n)

Variáveis aleatórias e esperança

Uma variável aleatória é uma função númerica definida sobre os eventos elementares.

Exemplo de variável aleatória

$X(A) :=$ número de execuções da linha 4 em MAX(A, n)

"$X = k$" é uma abreviação de $\{s \in S : X(s) = k\}$

Esperança $\mathrm{E}[X]$ de uma variável aleatória X

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k \in X(S)} k \cdot \Pr\{X = k\} = \sum_{s \in S} X(s) \cdot \Pr\{s\}$$

Variáveis aleatórias e esperança

Uma variável aleatória é uma função númerica definida sobre os eventos elementares.

Exemplo de variável aleatória

$X(A) :=$ número de execuções da linha 4 em MAX(A, n)

"$X = k$" é uma abreviação de $\{s \in S : X(s) = k\}$

Esperança $\mathrm{E}[X]$ de uma variável aleatória X

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k \in X(S)} k \cdot \Pr\{X = k\} = \sum_{s \in S} X(s) \cdot \Pr\{s\}$$

Linearidade da esperança: $\mathrm{E}[\alpha X + Y] = \alpha \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$

De volta ao máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

MAX (A, n)
1 $max \leftarrow 0$
2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
3 **se** $A[i] > max$
4 **então** $max \leftarrow A[i]$
5 **devolva** max

Quantas vezes linha 4 é executada no caso médio?

Suponha que $A[1\,..\,n]$ é permutação aleatória uniforme de $1, \ldots, n$

Cada permutação tem probabilidade $1/n!$.

Exemplos

$A[1\,..\,2]$	linha 4
1,2	2
2,1	1
$\mathrm{E}[X]$	3/2

$A[1\,..\,3]$	linha 4
1,2,3	3
1,3,2	2
2,1,3	2
2,3,1	2
3,1,2	1
3,2,1	1
$\mathrm{E}[X]$	11/6

Mais um exemplo

$A[1\,..\,4]$	linha 4
1,2,3,4	4
1,2,4,3	3
1,3,2,4	3
1,3,4,2	3
1,4,2,3	2
1,4,3,2	2
2,1,3,4	3
2,1,4,3	2
2,3,1,4	3
2,3,4,1	3
2,4,1,3	2
2,4,3,1	2

$A[1\,..\,4]$	linha 4
3,1,2,4	2
3,1,4,2	2
3,2,1,4	2
3,2,4,1	2
3,4,1,2	2
3,4,2,1	2
4,1,2,3	1
4,1,3,2	1
4,2,1,3	1
4,2,3,1	1
4,3,1,2	1
4,3,2,1	1

$\mathrm{E}[X]$ 50/24

Variáveis aleatórias indicadoras

X = número total de execuções da linha 4

Variáveis aleatórias indicadoras

$$X \;=\; \text{número total de execuções da linha 4}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se "}max \leftarrow A[i]\text{" é executado} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= \text{número total de execuções da linha 4} \\ &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

Variáveis aleatórias indicadoras

$$X = \text{número total de execuções da linha 4}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se "}max \leftarrow A[i]\text{" é executado} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= \text{número total de execuções da linha 4} \\ &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

Esperanças:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_i] &= 0 \times \Pr\{X_i = 0\} + 1 \times \Pr\{X_i = 1\} \\ &= \Pr\{X_i = 1\} \\ &= \text{probabilidade de que } A[i] \text{ seja} \\ &\quad\ \text{máximo em } A[1\mathinner{..}i] \\ &= 1/i \end{aligned}$$

Esperança

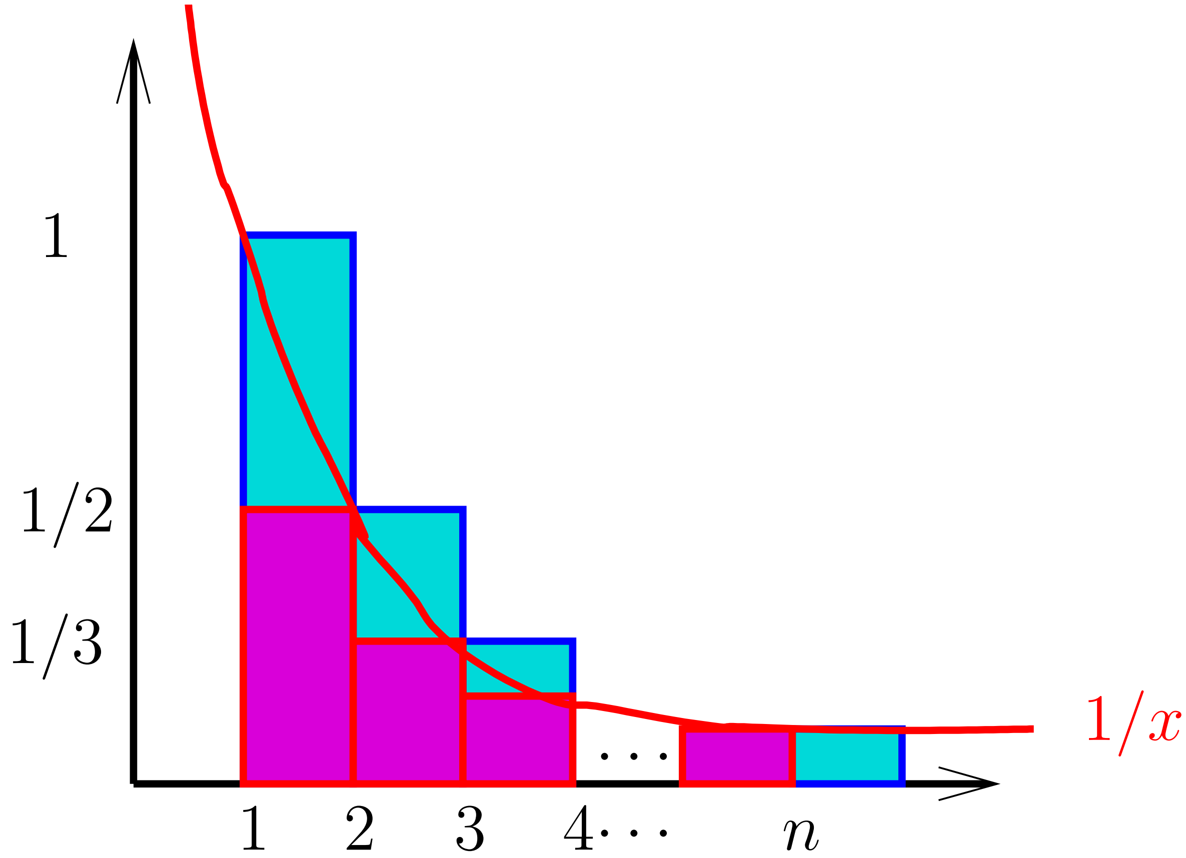
$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n] \\
&= \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n] \\
&= 1/1 + \cdots + 1/n \\
&< 1 + \ln n \\
&= \mathrm{O}(\lg n)
\end{aligned}
$$

$$2.92 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10} < 2.93 < 3.30 < 1 + \ln 10$$

$$5.18 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{100} < 5.19 < 5.60 < 1 + \ln 100$$

$$9.78 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10000} < 9.79 < 10.21 < 1 + \ln 10000$$

Série harmônica



$$\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} < H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n.$$

Experimentos

Para cada valor de $n = 252, 512, 1024, \ldots$ foram geradas 10, 100 ou 200 amostras de seqüencias de inteiros através do trecho de código

```
for (i = 0; i < n; i++){
  v[i]=(int)((double)INT_MAX*rand()/(RAND_MAX+1.0)
}
```

onde `rand()` é a função geradora de números (pseudo-)aleatórios da biblioteca do `C`.

A coluna $\mathrm{E}[\hat{X}]$ nas tabelas a seguir mostra o número médio de vezes que a linha 4 do algoritmo MAX foi executada para cada valor de n e cada amostra de seqüências.

Experimentos (10)

n	$E[\hat{X}]$	$1 + \ln n$
256	7.20	6.55
512	6.90	7.24
1024	7.30	7.93
2048	7.10	8.62
4096	10.20	9.32
8192	9.00	10.01
16384	10.80	10.70
32768	11.00	11.40
65536	12.50	12.09
131072	12.60	12.78
262144	13.20	13.48
524288	13.20	14.17
1048576	12.80	14.86
2097152	13.90	15.56
4194304	14.90	16.25
8388608	17.90	16.94

Experimentos (100)

n	$E[\hat{X}]$	$1 + \ln n$
256	5.92	6.55
512	6.98	7.24
1024	7.55	7.93
2048	8.39	8.62
4096	8.97	9.32
8192	9.26	10.01
16384	10.44	10.70
32768	11.32	11.40
65536	11.66	12.09
131072	12.38	12.78
262144	13.17	13.48
524288	13.56	14.17
1048576	14.54	14.86
2097152	15.10	15.56
4194304	15.61	16.25
8388608	16.56	16.94

Experimentos (200)

n	$E[\hat{X}]$	$1 + \ln n$
256	6.12	6.55
512	6.86	7.24
1024	7.38	7.93
2048	7.96	8.62
4096	8.87	9.32
8192	9.41	10.01
16384	10.28	10.70
32768	10.92	11.40
65536	11.31	12.09
131072	12.37	12.78
262144	12.92	13.48
524288	13.98	14.17
1048576	14.19	14.86
2097152	15.62	15.56
4194304	15.74	16.25
8388608	17.06	16.94

Resumo de probabilidade

(S, Pr) espaço de probabilidade, $S =$ conjunto finito (eventos elementares)

$\mathrm{Pr}\{\} =$ (distribuição de probabilidades) função de S em $[0, 1]$ tal que

p1. $\mathrm{Pr}\{s\} \geq 0$;

p2. $\mathrm{Pr}\{S\} = 1$; e

p3. $A, B \subseteq S, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Pr}\{A \cup B\} = \mathrm{Pr}\{A\} + \mathrm{Pr}\{B\}$.

Um evento é um subconjunto de S.

Uma variável aleatória é uma função númerica definida sobre os eventos elementares.

"$X = k$" é uma abreviação de $\{s \in S : X(s) = k\}$

$E[X] = \sum_{k \in X(S)} k \cdot \mathrm{Pr}\{X = k\} = \sum_{s \in S} X(s) \cdot \mathrm{Pr}\{s\}$

Algoritmos aleatorizados ou probabilísticos

CLRS 5.2, 5.3, C.2, C.3

Algoritmos aleatorizados ou probabilísticos

Um algoritmo é probabilístico ou aleatorizado se o seu comportamento não é determinado apenas pela entrada, mas também depende dos valores produzidos por um gerador de números aleatórios.

RANDOM(a, b): devolve um inteiro i, $a \leq i \leq b$.

Algoritmos aleatorizados ou probabilísticos

Um algoritmo é probabilístico ou aleatorizado se o seu comportamento não é determinado apenas pela entrada, mas também depende dos valores produzidos por um gerador de números aleatórios.

RANDOM(a, b): devolve um inteiro i, $a \leq i \leq b$.

Todos os inteiros devolvido por RANDOM são independentes dos inteiros previamente devolvidos com probabilidade uniforme, em outras palavras:

$$\Pr\{\text{RANDOM}(a, b) = i\} = ???.$$

Algoritmos aleatorizados ou probabilísticos

Um algoritmo é probabilístico ou aleatorizado se o seu comportamento não é determinado apenas pela entrada, mas também depende dos valores produzidos por um gerador de números aleatórios.

RANDOM(a, b): devolve um inteiro i, $a \leq i \leq b$.

Todos os inteiros devolvido por RANDOM são independentes dos inteiros previamente devolvidos com probabilidade uniforme, em outras palavras:

$$\Pr\{\text{RANDOM}(a, b) = i\} = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Existem implementações aproximadas de RANDOM. Veja

D.E. Knuth, *Seminumerical algorithms*, volume 2, *The Art of Computer Programming*.

Permutação aleatória uniforme

Problema: Obter uma permutação aleatória uniforme de um dado vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros positivos distintos.

Permutação *in-place*

Devolve uma permutação aleatória uniforme de $A[1 \mathinner{.\,.} n]$.

PERMUTE-IN-PLACE(A, n)
1 para $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ faça
2 $\quad j \leftarrow$ RANDOM(i, n)
3 $\quad A[i] \leftrightarrow A[j]$

Não é óbvio que isso produz permutação aleatória uniforme de $A[1 \mathinner{.\,.} n]$.

Consumo de tempo: $\Theta(n)$, supondo que RANDOM é $\Theta(1)$.

Uniformidade

Considere uma permutação $B[1\,.\,.\,n]$ de $A[1\,.\,.\,n]$.

Qual é a probabilidade de PERMUTE-IN-PLACE(A, n) produzir $B[1\,.\,.\,n]$?

Uniformidade

Considere uma permutação $B[1 \,..\, n]$ de $A[1 \,..\, n]$.

Qual é a probabilidade de PERMUTE-IN-PLACE(A, n) produzir $B[1 \,..\, n]$?

Relação invariante: Na linha 1 vale que

(i0) $\Pr\{B[1 \,..\, i-1] = A[1 \,..\, i-1]\} = (n-i+1)!/n!$.

Uniformidade

Considere uma permutação $B[1\,..\,n]$ de $A[1\,..\,n]$.

Qual é a probabilidade de PERMUTE-IN-PLACE(A, n) produzir $B[1\,..\,n]$?

Relação invariante: Na linha 1 vale que

(i0) $\Pr\{B[1\,..\,i-1] = A[1\,..\,i-1]\} = (n-i+1)!/n!$.

Na última iteração $i = n$ e da invariante (i0) temos que

$$\Pr\{B[1\,..\,n] = A[1\,..\,n]\} = (n-i+1)!/n! = 1/n!.$$

A invariante vale no início da primeira iteração já que

$$\Pr\{B[1\,..\,0] = A[1\,..\,0]\} = 1.$$

Uniformidade (cont.)

Considere uma iteração que não seja a última. Da invariante (i0) sabemos que

$$\Pr\{B[1\,..\,i-1] = A[1\,..\,i-1]\} = (n-i+1)!/n!$$

Se $B[1\,..\,i-1] = A[1\,..\,i-1]$, então, após a execução da linha 2 temos que

$$\Pr\{B[i] = A[j]\} = \frac{1}{n-i+1}\,.$$

Logo, após a execução da linha 3 temos que

$$\Pr\{B[1\,..\,i] = A[1\,..\,i]\} = \frac{(n-i+1)!}{n!} \times \frac{1}{n-i+1} = \frac{(n-i)!}{n!}.$$

Portanto, (i0) vale no início da próxima iteração.

Uniformidade (cont.)

Reescrevendo . . . Considere uma iteração que não seja . . .

$E := \{$após a execução da linha 2 $B[i] = A[j]\}$

$F := \{$no início da iteração $B[1\,..\,i-1] = A[1\,..\,i-1]\}$

Após a execução da linha 3, ao final da iteração, vale que

$$
\begin{aligned}
\Pr\{B[1\,..\,i] = A[1\,..\,i]\} &= \Pr\{E \cap F\} \\
&= \Pr\{F\} \times \Pr\{E \mid F\} \\
&= \frac{(n-i+1)!}{n!} \times \frac{1}{n-i+1} \\
&= \frac{(n-i)!}{n!}
\end{aligned}
$$

Portanto, (i0) vale no início da próxima iteração.

Permutação por ordenação

Devolve uma permutação aleatória uniforme de $A[1\,..\,n]$.

PERMUTE-POR-ORDENAÇÃO (A, n)
1 para $i \leftarrow 1$ até n faça
2 $\quad P[i] \leftarrow$ RANDOM$(1, n^3)$
3 ordene $A[1\,..\,n]$ com chaves $P[1\,..\,n]$

No começo da linha 3, com grande probabilidade, $P[1\,..\,n]$ não tem elementos repetidos (Exercício 5.3-5 do CLRS).

Linha 3 faz permutação $A[j_1\,..\,j_n]$ de $A[1\,..\,n]$ tal que

$$P[j_1] \leq \cdots \leq P[j_n].$$

Consumo de tempo: $\Theta(n \lg n)$ se RANDOM for $\Theta(1)$

Max aleatorizado

Devolve o elemento máximo de um vetor $A[1\,..\,n]$.

```
MAX-ALEATORIZADO(A, n)
0   PERMUTE(A, n)
1   max ← 0
2   para i ← 1 até n faça
3       se A[i] > max
4           então max ← A[i]
5   devolva max
```

Linha 0 faz uma permutação aleatória uniforme dos elementos de A.

Qual é a entrada que dá o pior caso?

Exercícios

Exercício 15.A [CLRS 5.3-3]
Que acontece se trocarmos "RANDOM(i, n)" por "RANDOM$(1, n)$" no algoritmo PERMUTE-IN-PLACE? O algoritmo continua produzindo permutação aleatória uniforme?

Exercício 15.B [CLRS C.3-2]
Um vetor $A[1\,..\,n]$ contém n números distintos aleatoriamente ordenados. Suponha que cada permutação dos n números é igualmente provável. Qual é a esperança do índice do maior elemento do vetor? Qual é a esperança do índice do menor elemento do vetor?