# Melhores momentos

AULA PASSADA

# Classe $\mathrm{O}$ da solução de uma recorrência

Não faço questão de solução exata: basta solução assintótica (em notação $\mathrm{O}$, se possível $\Theta$)

Exemplo:

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16, \ldots \end{aligned}$$

Solução exata: $G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$

Solução assintótica: $G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$ $\quad (G(n) = \Theta(n \lg n))$

Em geral, é mais fácil obter e provar solução assintótica que solução exata

# Método das substituições iterativas

Exemplo:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 6\,T(n-1) + 4n^3 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

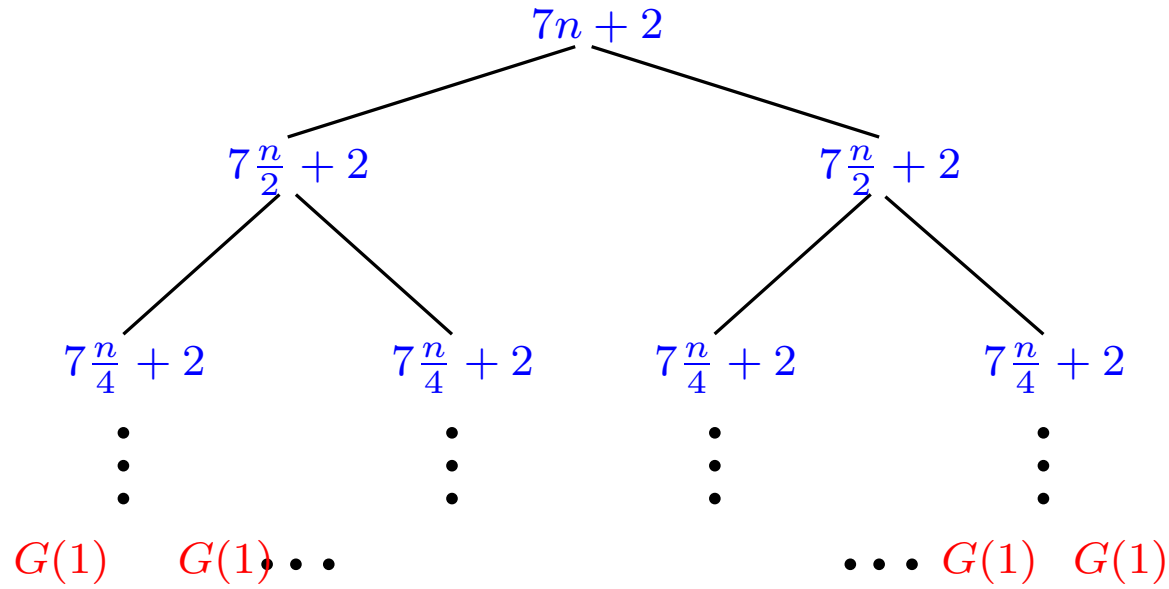
$$\begin{aligned} T(n) &= 6\,T(n-1) + n^3 \\ &= 6\,(6\,T(n-2) + (n-1)^3) + n^3 \\ &= 6\,(6\,(6\,(T(n-3) + (n-2)^3) + (n-1)^3) + n^3 \\ &= 6\,(6\,(6\,(6\,(T(n-4) + (n-3)^3) + (n-2)^3) + (n-1)^3) + n^3 \\ &= \ldots \\ &= 6^{n-1} + 6^{n-2}\,(2^3) + \cdots + 6^2\,(n-2)^3 + 6\,(n-1)^3 + n^3 \\ &= \Theta(6^n) \qquad \text{(Verificar este último '=')} \end{aligned}$$

# Método da árvore da recorrência

## Exemplo:

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots \end{aligned}$$

$$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$$




total de $1 + \lg n$ níveis

# Método do chute-e-demonstre

Exemplo:

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots \end{aligned}$$

Acho que $G(n)$ é da forma $n \lg n$ ...

| $n$ | $G(n)$ | $6n \lg n$ | $7n \lg n$ | $8n \lg n$ | $n^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 18 | 12 | 14 | 16 | 4 |
| 4 | 66 | 48 | 56 | 64 | 16 |
| 8 | 190 | 144 | 168 | 192 | 64 |
| 16 | 494 | 384 | 448 | 512 | 256 |
| 32 | 1214 | 960 | 1120 | 1280 | 1024 |
| 64 | 2878 | 2304 | 2688 | 3072 | 4096 |
| 128 | 6654 | 5376 | 6272 | 7168 | 16384 |
| 256 | 15102 | 12288 | 14336 | 16384 | 65536 |

# Dica prática (sem prova)

A solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 2T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

e na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T''(4) &= 10 \\ T''(n) &= 2T''(n/2) + n \quad \text{para } n = 2^3, 2^4, 2^5, \ldots \end{aligned}$$

# Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde $n/b$ significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$. Então, em geral,

| | | |
|---|---|---|
| se $a > b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ |
| se $a = b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$ |
| se $a < b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k)$ |

# Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é um qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

| | 1 | | | | | | | | | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 31 | $-41$ | 59 | 26 | $-53$ | 58 | 97 | $-93$ | $-23$ | 84 |

Sai:

| | 1 | | 3 | | | | 7 | | | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 31 | $-41$ | 59 | 26 | $-53$ | 58 | 97 | $-93$ | $-23$ | 84 |

$A[e\,..\,d] = A[3\,..\,7]$ é segmento de soma máxima.
$A[3\,..\,7]$ tem soma $187$.

# Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-3 é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-2 é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-DC é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-1 é $\Theta(n)$.

# Técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (SEG-MAX-2, SEG-MAX-1, programação dinâmica).
- Pré-processar os dados. O HEAPSORT pré-processa os dados armazenandos em uma entrutura de dados para realizar computações futuras mais eficientemente.
- Divisão-e-conquista. MERGE-SORT e SEG-MAX-DC utilizam uma forma conhecidade dessa técnica.
- Algoritmos incrementais/varredura. Como estender a solução de um subproblema a uma solução do problema (SEG-MAX-1).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (SegMaxu).

# Resultados experimentais

| $n$ | SEG-MAX-2 | | SEG-MAX-3 | |
|---|---|---|---|---|
| | `clock` | `user time` | `clock` | `user time` |
| 1000 | 0.01 | 0.01 | 2.91 | 2.92 |
| 2000 | 0.03 | 0.03 | 23.00 | 23.04 |
| 3000 | 0.08 | 0.08 | 77.58 | 1m17.57 |
| 5000 | 0.24 | 0.24 | 360.78 | 6m0.45s |
| 10000 | 1.16 | 1.62 | 2940 | 49m27.32 |
| 20000 | 4.8 | 4.82 | ? | ? |
| 50000 | 42.8 | 42.96 | ? | ? |
| 100000 | 188.0 | 3m7.58s | ? | ? |
| 200000 | 911.74 | 15m10.34s | ? | ? |
| 400000 | ? | 64m22.880s | ? | ? |

# Resultados experimentais

| $n$ (M) | SEG-MAX-1 A | | SEG-MAX-1 B | |
|---|---|---|---|---|
| | clock | user time | clock | user time |
| 1 | 0.06 | 0.11 | 0.08 | 0.07 |
| 2 | 0.11 | 0.23 | 0.15 | 0.06 |
| 3 | 0.16 | 0.28 | 0.30 | 0.12 |
| 6 | 0.32 | 0.63 | 0.56 | 0.29 |
| 8 | 0.43 | 0.80 | 0.71 | 0.43 |
| 10 | 0.55 | 1.03 | 1.00 | 0.52 |
| 15 | 0.82 | 1.55 | 1.37 | 0.64 |
| 20 | 1.08 | 2.03 | 2.17 | 0.95 |
| 25 | 1.37 | 2.52 | 2.44 | 1.38 |
| 30 | 1.70 | 3.13 | 3.28 | 1.68 |

*a*

[a] Todos os tempos estão em segundos.

# AULA 6

# Mais análise de algoritmos recursivos

CLRS 2.1–2.2, 28.2

AU 3.3, 3.6 (muito bom)

Notas de AA de Jeff Edmonds:

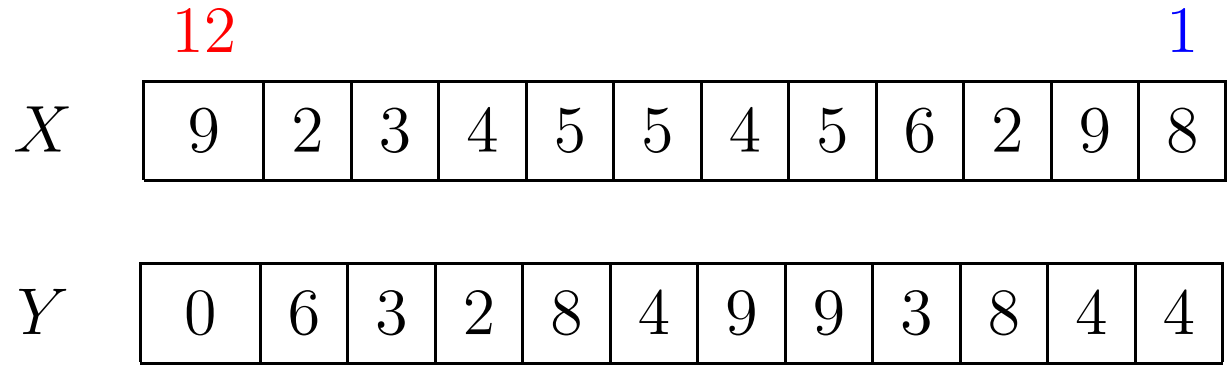
`http://www.cs.yorku.ca/~jeff/notes/3101/`

# Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$



# Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1..n]$ e $Y[1..n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

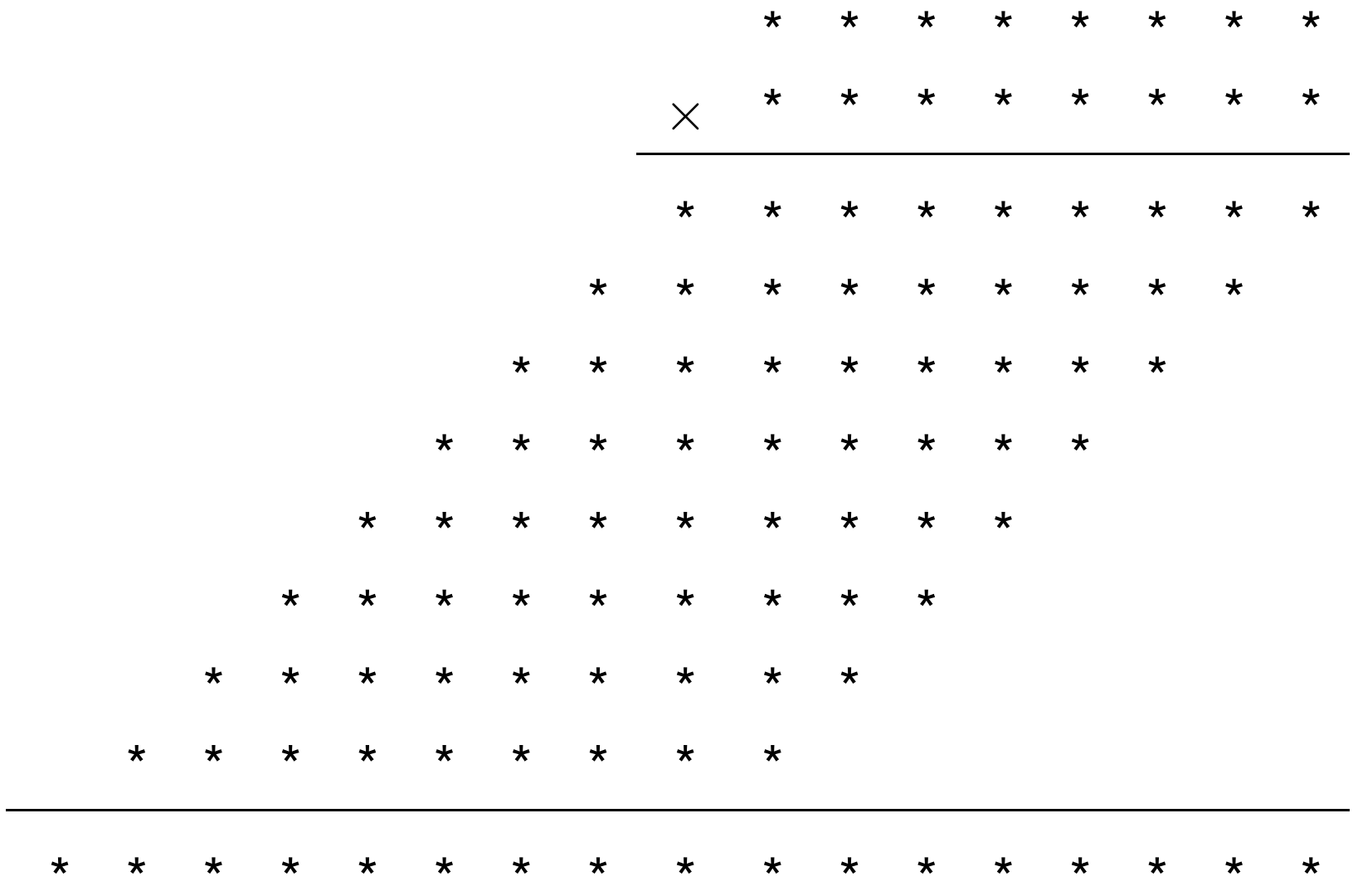
| | 12 | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 9 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 6 | 2 | 9 | 8 |
| $Y$ | 0 | 6 | 3 | 2 | 8 | 4 | 9 | 9 | 3 | 8 | 4 | 4 |

Sai:

| 23 | | | | | | | | | | $X \cdot Y$ | | | | | | | | | | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 4 | 4 | 0 | 8 | 7 | 2 | 8 | 6 | 7 | 0 | 2 | 7 | 1 | 4 | 1 | 0 | 2 | 9 | 5 | 1 | 2 |

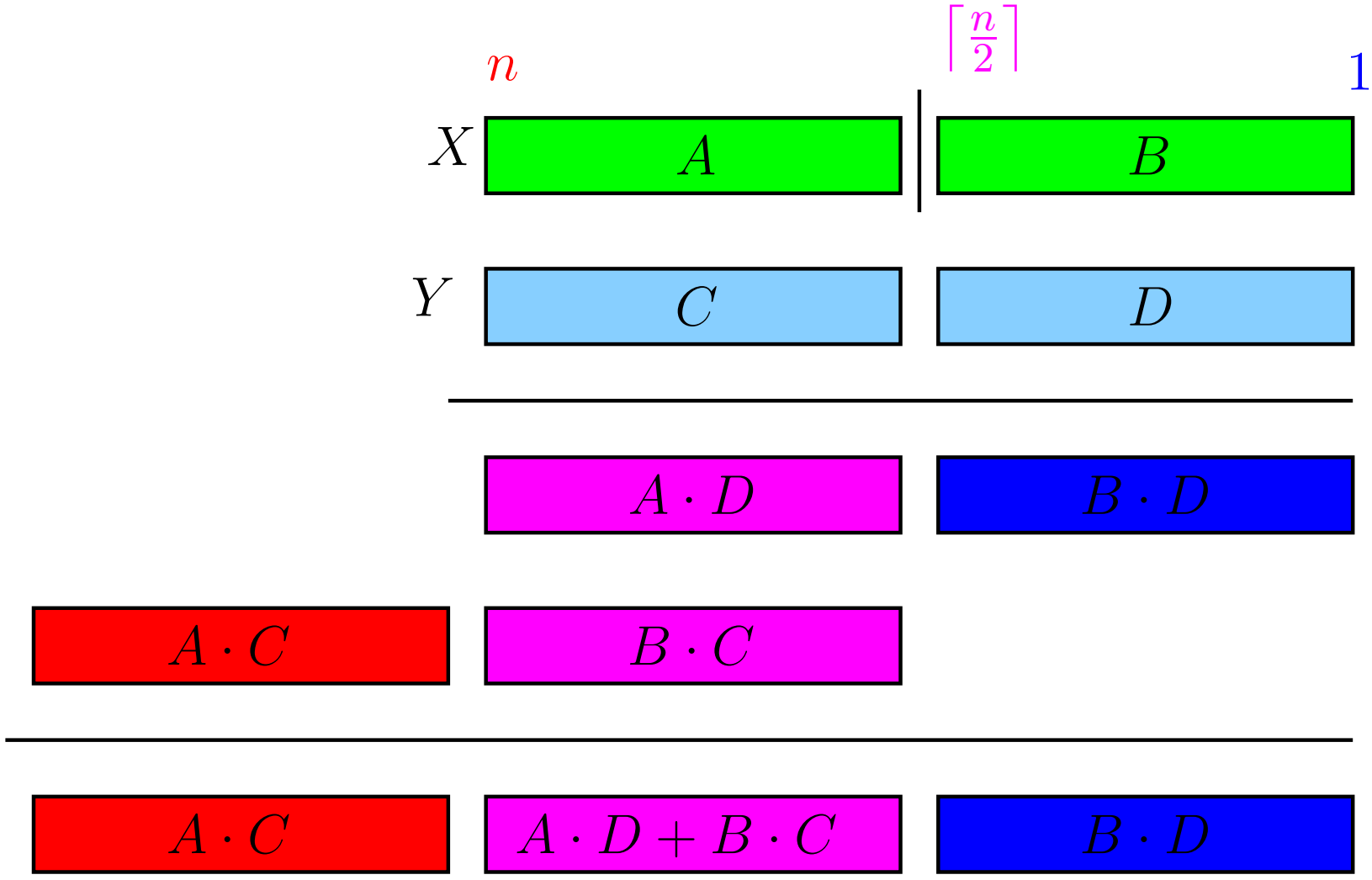
Aplicações em esquemas criptográficos.

# Algoritmo do ensino fundamental



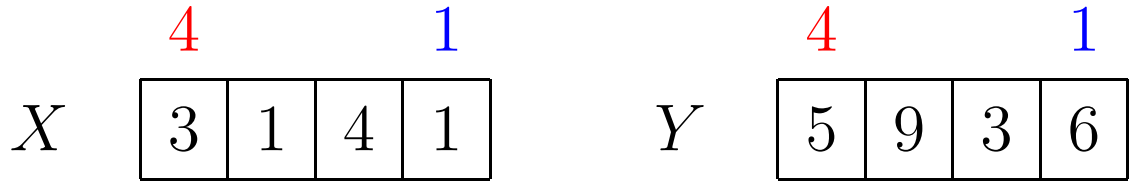
O algoritmo do ensimo fundamental é $\Theta(n^2)$.

# Divisão e conquista

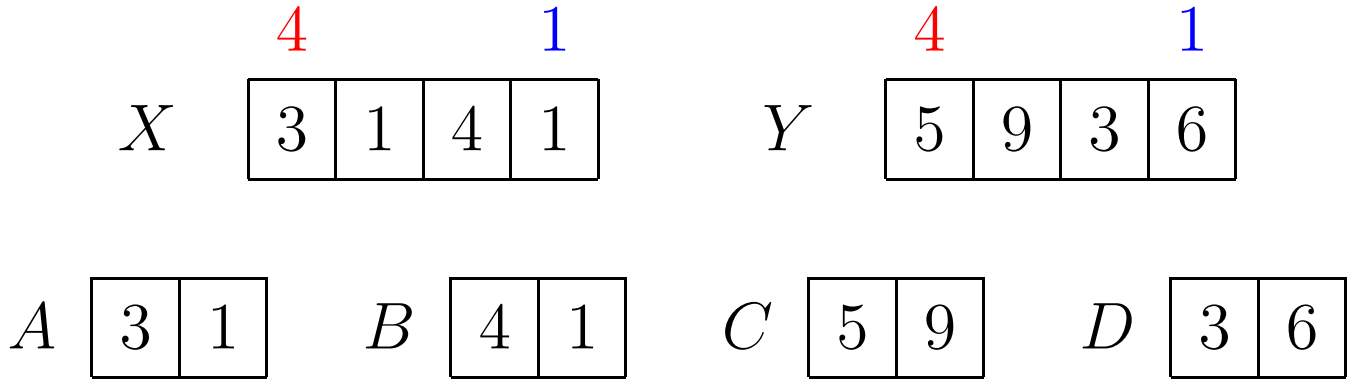



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^{2\lceil n/2 \rceil} + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

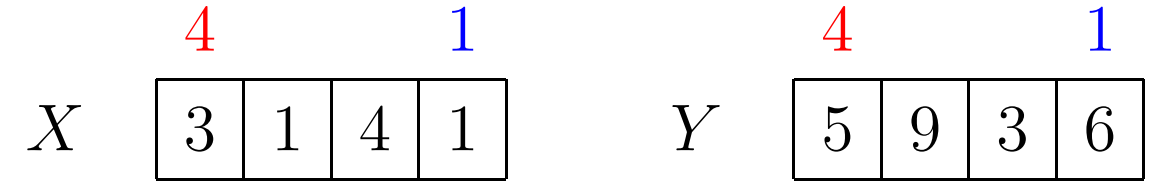
# Exemplo



# Exemplo



# Exemplo



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$A \cdot C = 1829$ $\qquad (A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$

$B \cdot D = 1476$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A \cdot C$ | | 1 | 8 | 2 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(A \cdot D + B \cdot C)$ | | | | 3 | 5 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| $B \cdot D$ | | | | | | 1 | 4 | 7 | 6 |
| $X \cdot Y =$ | 1 | 8 | 6 | 4 | 4 | 9 | 7 | 6 | |

# Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT $(X, Y, n)$

1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
3 $A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\quad$ $B \leftarrow X[1\,..\,q]$
4 $C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\quad$ $D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
5 $E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
6 $F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
7 $G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
8 $H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
9 $R \leftarrow E \times 10^{2\lceil n/2 \rceil} + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
10 **devolva** $R$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com $n$ algarismos.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 4 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 5 | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 6 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 7 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 8 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 10 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| total | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(4n+2)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

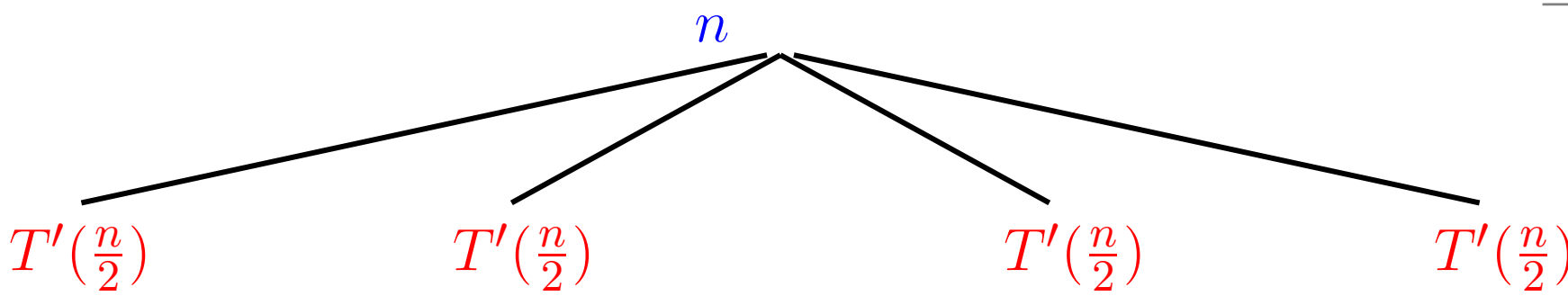
$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 4T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 6 | 28 | 120 | 496 | 2016 | 8128 | 32640 | 130816 | 523776 |

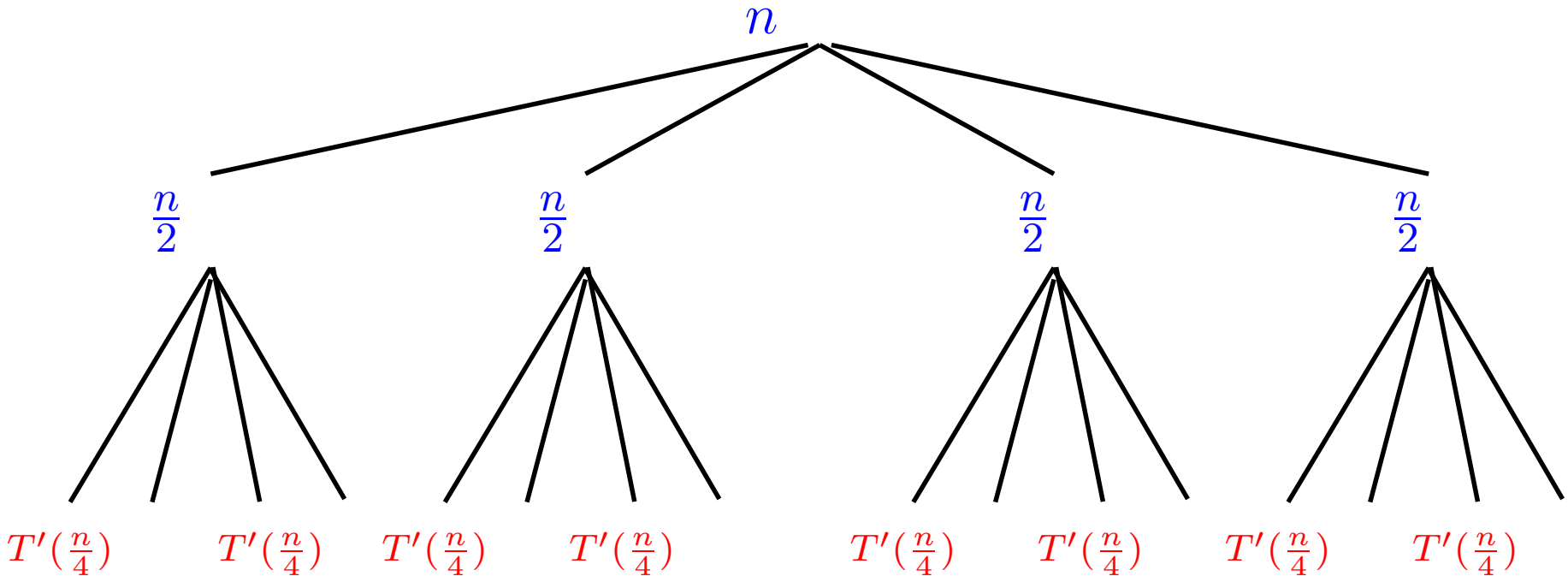
# Árvore da recorrência

$T'(n)$

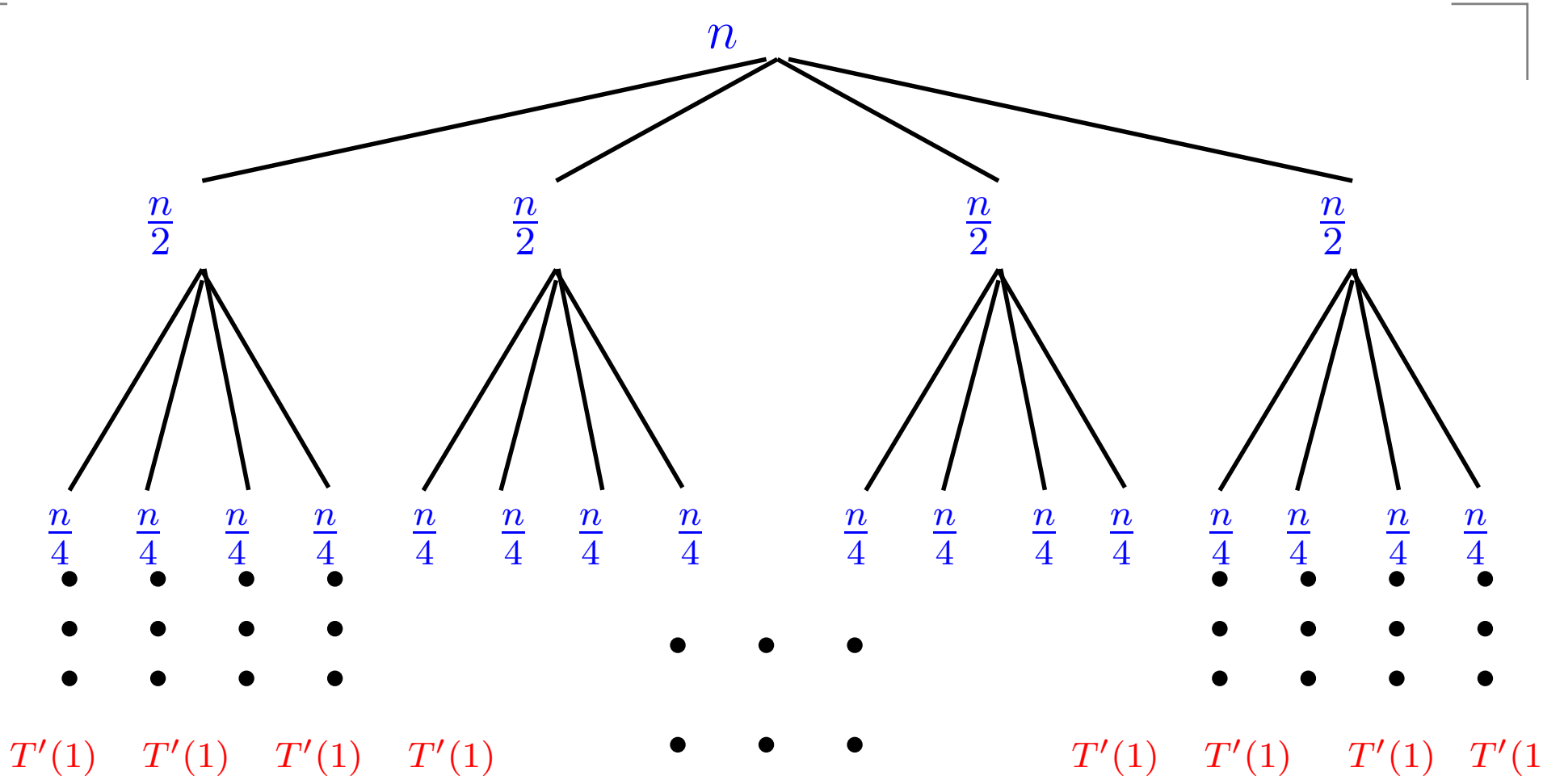
# Árvore da recorrência



# Árvore da recorrência



# Árvore da recorrência




total de $1 + \lg n$ níveis

# Contas

| nível | 0 | 1 | 2 | ... | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| soma | $n$ | $2n$ | $4n$ | ... | $2^{k-1}n$ | $2^k n$ |

$n = 2^k$ $\qquad$ $k = \lg n$

# Contas

| nível | $0$ | $1$ | $2$ | $\ldots$ | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| soma | $n$ | $2n$ | $4n$ | $\ldots$ | $2^{k-1}n$ | $2^k n$ |

$n = 2^k$ $\qquad$ $k = \lg n$

$$\begin{aligned} T'(n) &= n + 2n + \cdots + 2^{k-1}n + 2^k n \\ &= n\,(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k) \\ &= n\,(2^{k+1} - 1) \\ &= n\,(2n - 1) \qquad (k = \lg n) \\ &= 2n^2 - n = \Theta(n^2) \end{aligned}$$

ÊPA, não melhorou . . .

# Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde $n/b$ significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$. Então, em geral,

| | | |
|---|---|---|
| se $a > b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ |
| se $a = b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$ |
| se $a < b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k)$ |

# Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada ...
Será?!?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

# Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

# $X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

# $X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | | $a$ | $b$ |
| $Y$ | | $c$ | $d$ |
| | | $ad$ | $bd$ |
| | $ac$ | $bc$ | |
| $X \cdot Y$ | $ac$ | $ad + bc$ | $bd$ |

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$
$ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$

$g = (a + b)(c + d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$

$$X \cdot Y \text{ (por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = 4 \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$

$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$

$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = ?$

$ac = 4 \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$

$X = 1 \quad Y = 3 \quad X \cdot Y = 3$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = \; ? \quad bd = \; ? \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \quad X \cdot Y = 483$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \quad (a+b)(c+d) = 15$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \; ?$$
$$ac = 483 \quad bd = \; ? \qquad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = \ ?$

$ac = 483 \quad bd = \ ? \quad (a+b)(c+d) = \ ?$

$X = 33 \quad Y = 12 \quad X \cdot Y = \ ?$

$ac = \ ? \quad bd = \ ? \quad (a+b)(c+d) = \ ?$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = ? \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \quad X \cdot Y = 396$$
$$ac = 3 \quad bd = 6 \quad (a+b)(c+d) = 27$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \quad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ ? \quad bd = \ ? \quad (a+b)(c+d) = \ ?$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \quad X \cdot Y = 1890$$
$$ac = 15 \quad bd = 20 \quad (a+b)(c+d) = 72$$

# Exemplo

$$\begin{array}{llllll} X = & 2133 & Y = & 2312 & X \cdot Y = & ? \\ ac = & 483 & bd = & 396 & (a+b)(c+d) = & 1890 \end{array}$$

# Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \quad X \cdot Y = 4931496$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \quad (a+b)(c+d) = 1890$$

# Algoritmo Karatsuba

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA $(X, Y, n)$

1 **se** $n \leq 3$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
3 $A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\quad$ $B \leftarrow X[1\,..\,q]$
4 $C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\quad$ $D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
5 $E \leftarrow$ KARATSUBA$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
6 $F \leftarrow$ KARATSUBA$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
7 $G \leftarrow$ KARATSUBA$(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
8 $H \leftarrow G - F - E$
9 $R \leftarrow E \times 10^{2\lceil n/2 \rceil} + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
10 **devolva** $R$

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com $n$ algarismos.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 4 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 5 | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ |
| 6 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil)$ |
| 7 | $=$ | $T(\lceil n/2 \rceil + 1)$ |
| 8 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| 10 | $=$ | $\Theta(n)$ |
| total | $=$ | $T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(5n + 2)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugerem que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

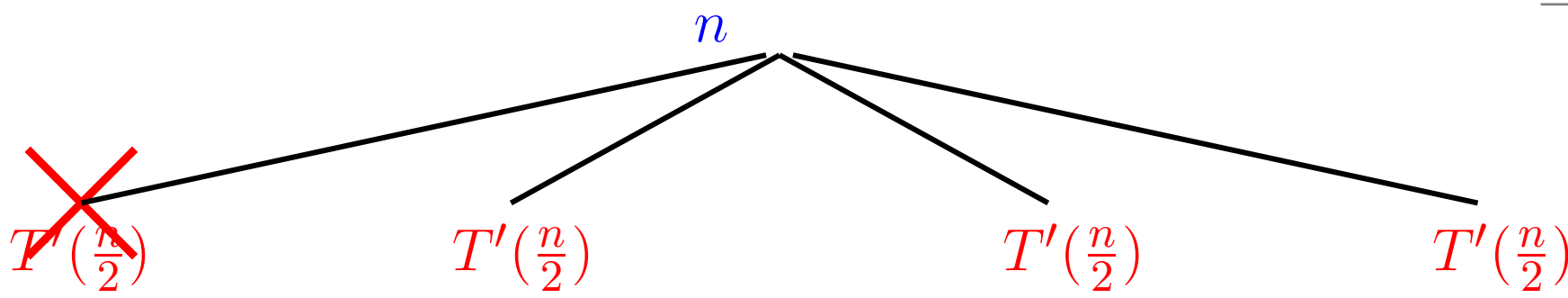
$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 3T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 5 | 19 | 65 | 211 | 665 | 2059 | 6305 | 19171 | 58025 |

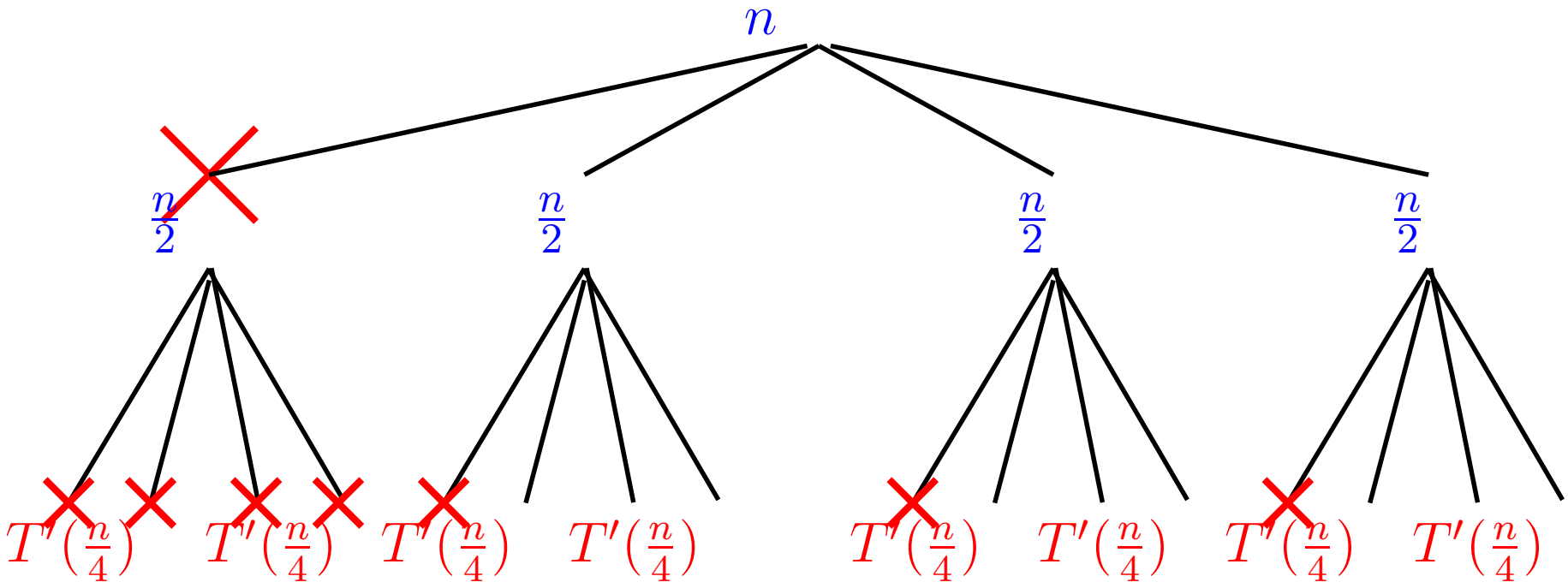
# Árvore da recorrência

$T'(n)$

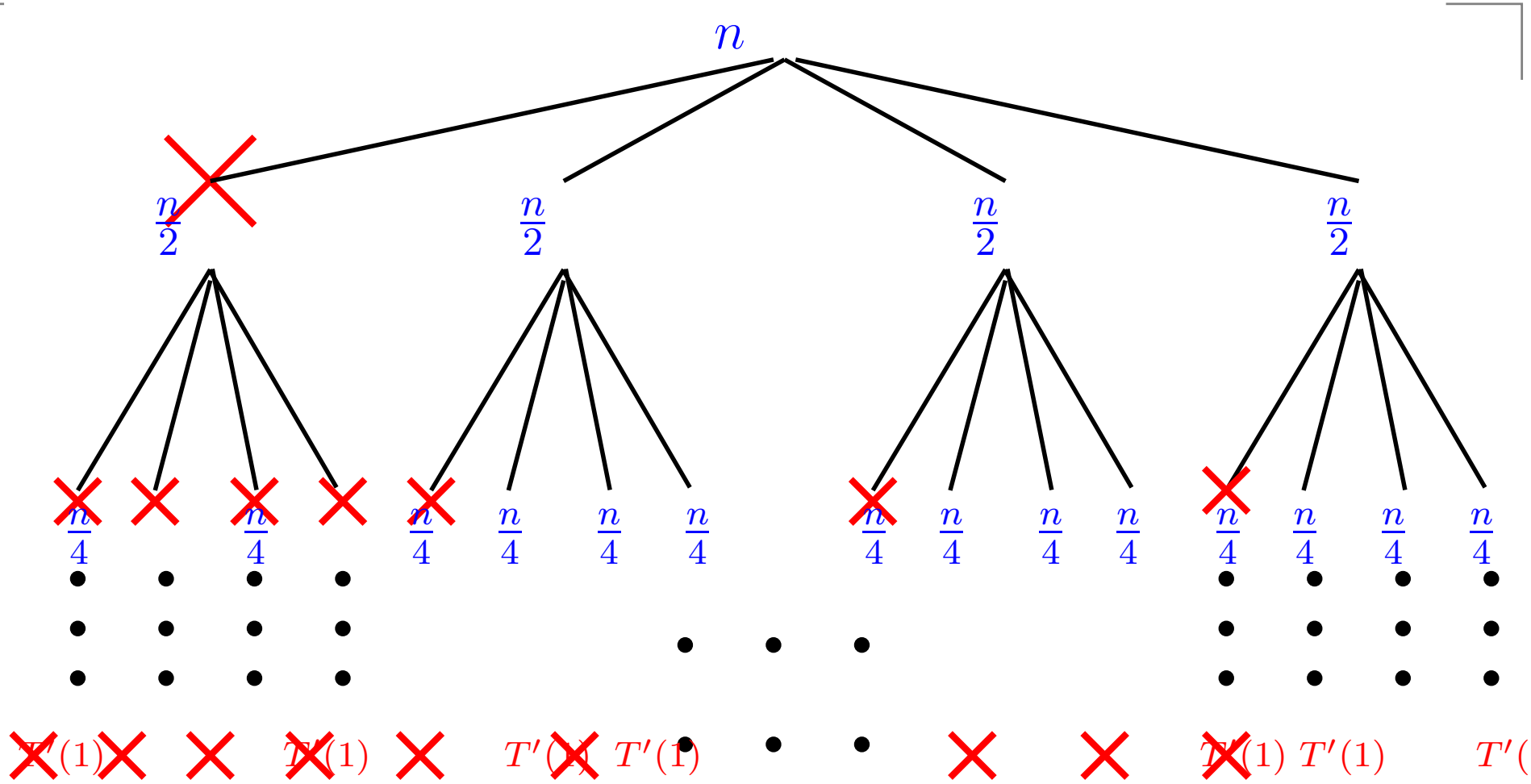
# Árvore da recorrência



# Árvore da recorrência



# Árvore da recorrência




total de $1 + \lg n$ níveis

# Contas

| nível | $0$ | $1$ | $2$ | $\ldots$ | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| soma | $n$ | $(3/2)n$ | $(3/2)^2 n$ | $\ldots$ | $(3/2)^{k-1} n$ | $(3/2)^k n$ |

$n = 2^k$ $\qquad$ $k = \lg n$

# Contas

| nível | 0 | 1 | 2 | ... | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| soma | $n$ | $(3/2)n$ | $(3/2)^2 n$ | ... | $(3/2)^{k-1} n$ | $(3/2)^k n$ |

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

$$T'(n) = n + (3/2)n + \cdots + (3/2)^{k-1} n + (3/2)^k n$$

$$= n\left(1 + (3/2) + (3/2)^2 + \cdots + (3/2)^k\right)$$

$$= n\left(3(3/2)^k - 2\right)$$

$$= n\left(3\frac{3^{\lg n}}{2^{\lg n}} - 2\right) \qquad (\text{pois}, k = \lg n)$$

$$= 3 \cdot 3^{\lg n} - 2n = 3n^{\lg 3} - 2n = \Theta(n^{\lg 3})$$

$1{,}584 < \lg 3 < 1.585$

LEGAL, estamos de volta ao jogo!

# Recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(2) &= 1 \\
R(3) &= 1 \\
R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots
\end{aligned}
$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 14 | 15 | 29 | 36 | 45 | 53 |
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |

# Recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(2) &= 1 \\
R(3) &= 1 \\
R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots
\end{aligned}
$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 14 | 15 | 29 | 36 | 45 | 53 |
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |

Vamos mostra que $R(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.
Isto implica que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.

# Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |
| $31(n-3)^{\lg 3} - 6n$ | $*$ | $*$ | $*$ | 7 | 63 | 119 | 237 | 324 | 473 | 5910 |

# Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 1 | 1 | 7 | 26 | 27 | 85 | 86 | 90 | 91 |
| $31(n-3)^{\lg 3} - 6n$ | $*$ | $*$ | $*$ | 7 | 63 | 119 | 237 | 324 | 473 | 5910 |

Prova:

Se $n = 4$, então $R(n) = 7 = 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$.

# Solução assintótica da recorrência

Prova: (continuação) Se $n \geq 5$ vale que

$$R(n) = 3R(\lceil n/2 \rceil + 1) + n$$

hi

$$\leq 3(31(\lceil n/2 \rceil + 1 - 3)^{\lg 3} - 6(\lceil n/2 \rceil + 1)) + n$$

$$\leq 3(31\left(\frac{(n+1)}{2} - 2\right)^{\lg 3} - 6\left(\frac{n}{2} + 1\right)) + n$$

$$= 3(31\left(\frac{(n-3)}{2}\right)^{\lg 3} - 3n - 6) + n$$

$$= 3(31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{2^{\lg 3}} - 3n - 6) + n$$

$$= 3 \cdot 31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{3} - 9n - 18 + n$$

$$= 31(n-3)^{\lg 3} - 6n - 2n - 18$$

$$< 31(n-3)^{\lg 3} - 6n = \mathrm{O}(n^{\lg 3})$$

# Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde $n/b$ significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$. Então, em geral,

| | | |
|---|---|---|
| se $a > b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ |
| se $a = b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$ |
| se $a < b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k)$ |

# Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Conclusão anterior+Exercício 9.B $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ $(1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585)$.

# Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de inteiros:

| | |
|---|---|
| Jardim de infância | $\Theta(n\,10^n)$ |
| Ensino fundamental | $\Theta(n^2)$ |
| Karatsuba e Ofman | $\Theta(n^{\lg 3}) = \mathrm{O}(n^{1{,}585})$ |
| Schönhage e Strassen (FFT) | $\mathrm{O}(n \lg n \lg\lg n)$ |

$1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585$

# Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

# Resultados experimentais

| $n$ | Ensino Fund. | KARATSUBA |
|---|---|---|
| 4 | 0.005662 | 0.005815 |
| 8 | 0.010141 | 0.010600 |
| 16 | 0.020406 | 0.023643 |
| 32 | 0.051744 | 0.060335 |
| 64 | 0.155788 | 0.165563 |
| 128 | 0.532198 | 0.470810 |
| 256 | 1.941748 | 1.369863 |
| 512 | 7.352941 | 4.032258 |

Tempos em $10^{-3}$ segundos.

# Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$r = ae + bg$$

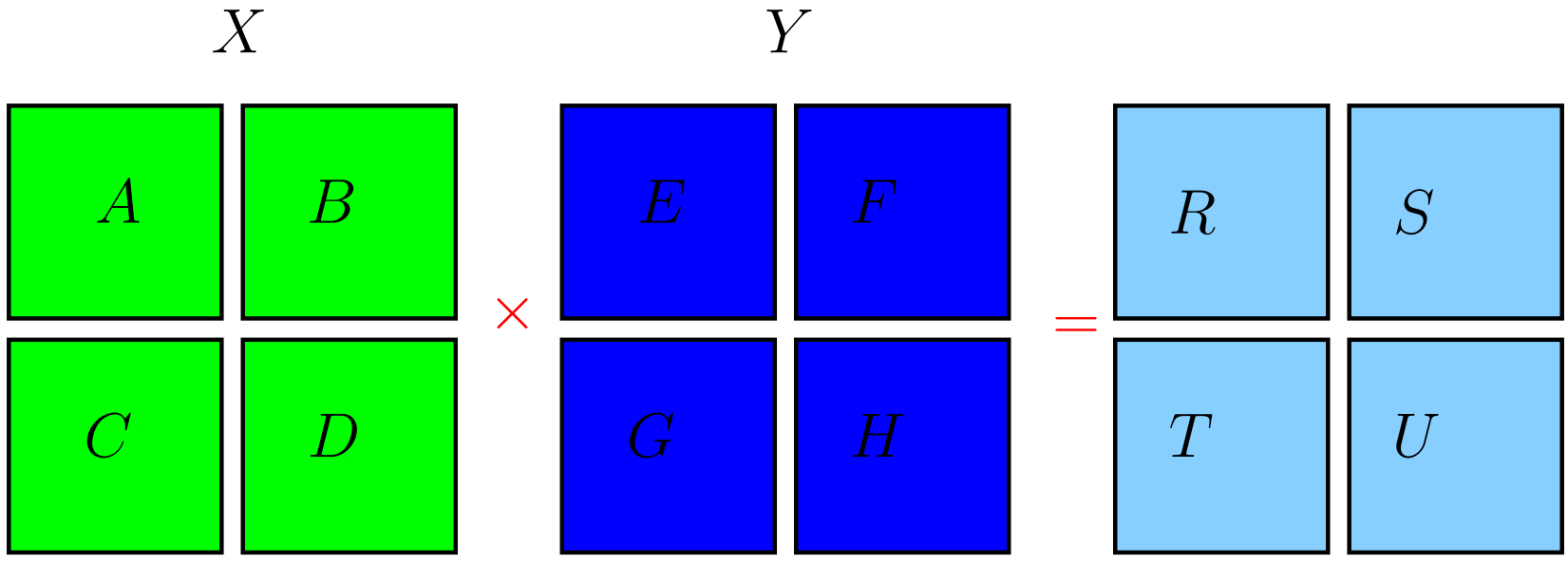
$$s = af + bh$$

$$t = ce + dg$$

$$u = cf + dh$$

Solução custa R$ 8,04

# Divisão e conquista




$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

# Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

```
MULTI-M (X, Y, n)      ▷ supõe n da forma 2^k
 1   se n = 1 devolva X · Y
 2   (A, B, C, D) ← PARTICIONE(X, n)
 3   (E, F, G, H) ← PARTICIONE(Y, n)
 4   R ← MULTI-M(A, E, n/2) + MULTI-M(B, G, n/2)
 5   S ← MULTI-M(A, F, n/2) + MULTI-M(B, H, n/2)
 6   T ← MULTI-M(C, E, n/2) + MULTI-M(D, G, n/2)
 7   U ← MULTI-M(C, F, n/2) + MULTI-M(D, H, n/2)
 8   P ← CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)
 9   devolva P
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de $n$ linhas e $n$ colunas.

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 3 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 4 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 5 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 6 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 7 | $=$ | $T(n/2) + T(n/2)$ |
| 8 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 9 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| total | $=$ | $8\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 12 | 112 | 960 | 7936 | 64512 | 520192 | 4177920 | 3348889 |

# Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 8\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 12 | 105 | 112 | 865 | 876 | 945 | 960 |
| $20\,(n-1)^3 - 2n^2$ | $-2$ | 12 | 142 | 508 | 1230 | 2428 | 4222 | 6732 |

# Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Conclusão anterior+Exercício $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é
$\Theta(n^3)$.

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

(-3)

# Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$
$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$
$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$
$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$
$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$
$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$
$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$
$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$
$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$
$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

# Algoritmo de Strassen

STRASSEN $(X, Y, n)$ ▷ supõe $n$ da forma $2^k$

1 **se** $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
2 $(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE$(X, n)$
3 $(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE$(Y, n)$
4 $P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
5 $P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
6 $P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
7 $P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
8 $P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
9 $P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
10 $P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
11 $R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
12 $S \leftarrow P_1 + P_2$
13 $T \leftarrow P_3 + P_4$
14 $U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
15 **devolva** $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT$(R, S, T, U)$

# Consumo de tempo

| linha | | todas as execuções da linha |
|---|---|---|
| 1 | $=$ | $\Theta(1)$ |
| 2-3 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 4-10 | $=$ | $7, T(n/2) + \Theta(n^2)$ |
| 11-14 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| 15 | $=$ | $\Theta(n^2)$ |
| total | $=$ | $7\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$ |

# Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe $\Theta$ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

| $n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'(n)$ | 1 | 11 | 93 | 715 | 5261 | 37851 | 269053 | 1899755 | 13363821 |

# Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 7\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

$2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(n)$ | 1 | 11 | 86 | 93 | 627 | 638 | 700 | 715 |
| $19\,(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ | $-1$ | 11 | 115 | 327 | 881 | 1657 | 2790 | 4337 |

# Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde $n/b$ significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$. Então, em geral,

| | | |
|---|---|---|
| se $a > b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ |
| se $a = b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$ |
| se $a < b^k$ | então | $T(n) = \Theta(n^k)$ |

# Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ $(2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81)$.

# Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

| | |
|---|---|
| Ensino fundamental | $\Theta(n^3)$ |
| Strassen | $\Theta(n^{\lg 7}) = \mathrm{O}(n^{2.81})$ |
| ... | ... |
| Coppersmith e Winograd | $\mathrm{O}(n^{2.38})$ |

# Exercícios

**Exercício 11.A**

O algoritmo abaixo promete rearranjar $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

ORDENA-POR-INS $(A, p, r)$

```
1   se p < r
2       então ORDENA-POR-INS (A, p, r − 1)
3             chave ← A[r]
4             i ← r − 1
5             enquanto i ≥ p e A[i] > chave faça
6                   A[i + 1] ← A[i]
7                   i ← i − 1
8             A[i + 1] ← chave
```

O algoritmo está correto? Escreva uma recorrência que expresse o consumo de tempo. Qual o consumo de tempo do algoritmo?

**Exercício 11.B**

Que acontece se trocarmos $\lfloor (p + r)/2 \rfloor$ por $\lceil (p + r)/2 \rceil$ na linha 2 do MERGE-SORT?

# Mais exercicios

**Exercício 11.C**

Quantas vezes a comparação "$A[r] \neq 0$" é executada? Defina esse número por meio de um recorrência.

```
LIMPA (A, p, r)
1    se p = r
2          então devolva r
3          senão q ← LIMPA (A, p, r − 1)
4                se A[r] ≠ 0
5                      então q ← q + 1
6                            A[q] ← A[r]
7                devolva q
```

Dê uma fórmula exata para a função definida pela recorrência. Em que classe $\Theta$ está a função definida pela recorrência?