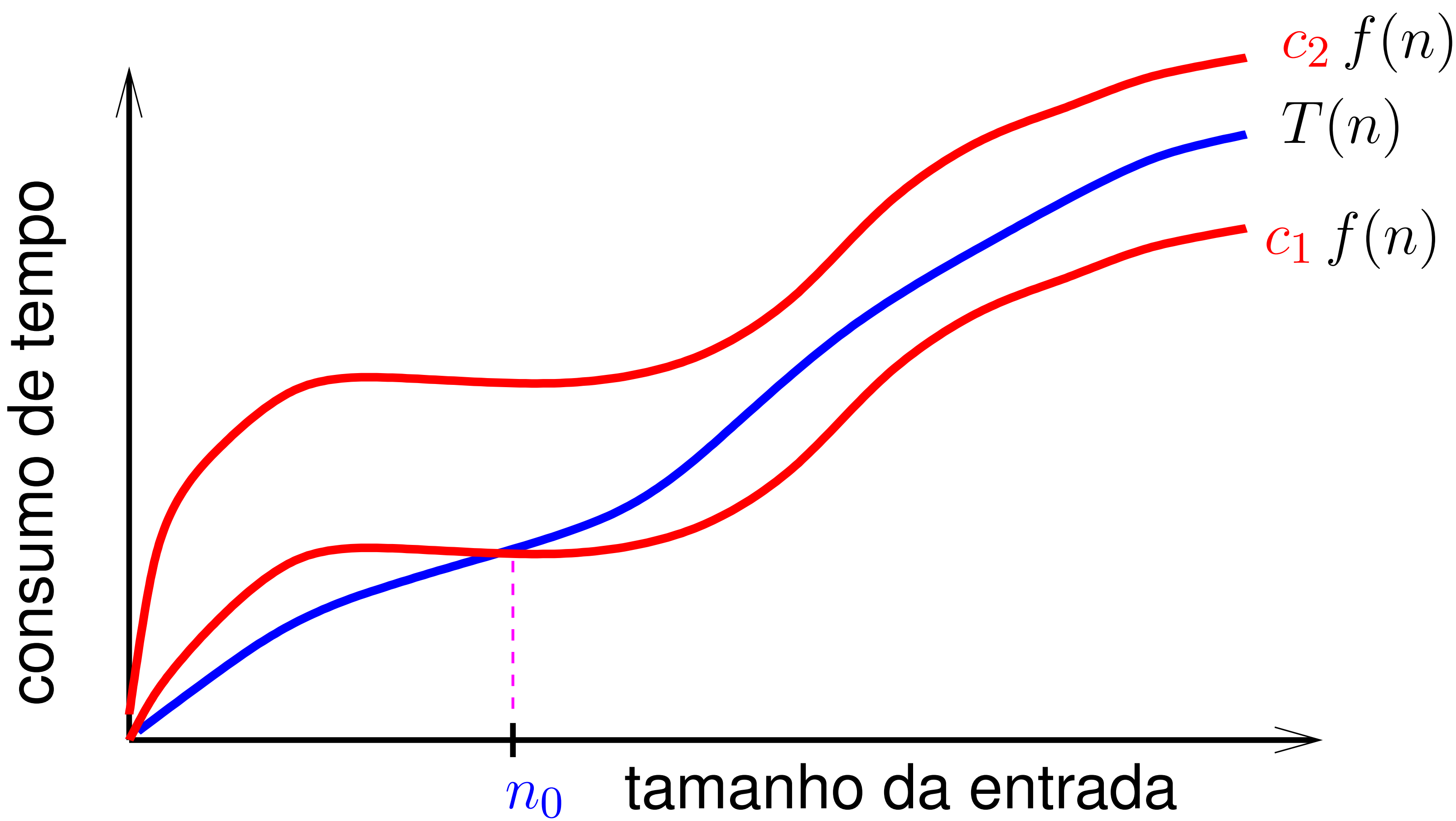
Melhores momentos

AULA PASSADA

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.
Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se

$$T(n) \text{ é } \mathrm{O}(f(n)) \text{ e } T(n) \text{ é } \Omega(f(n)).$$

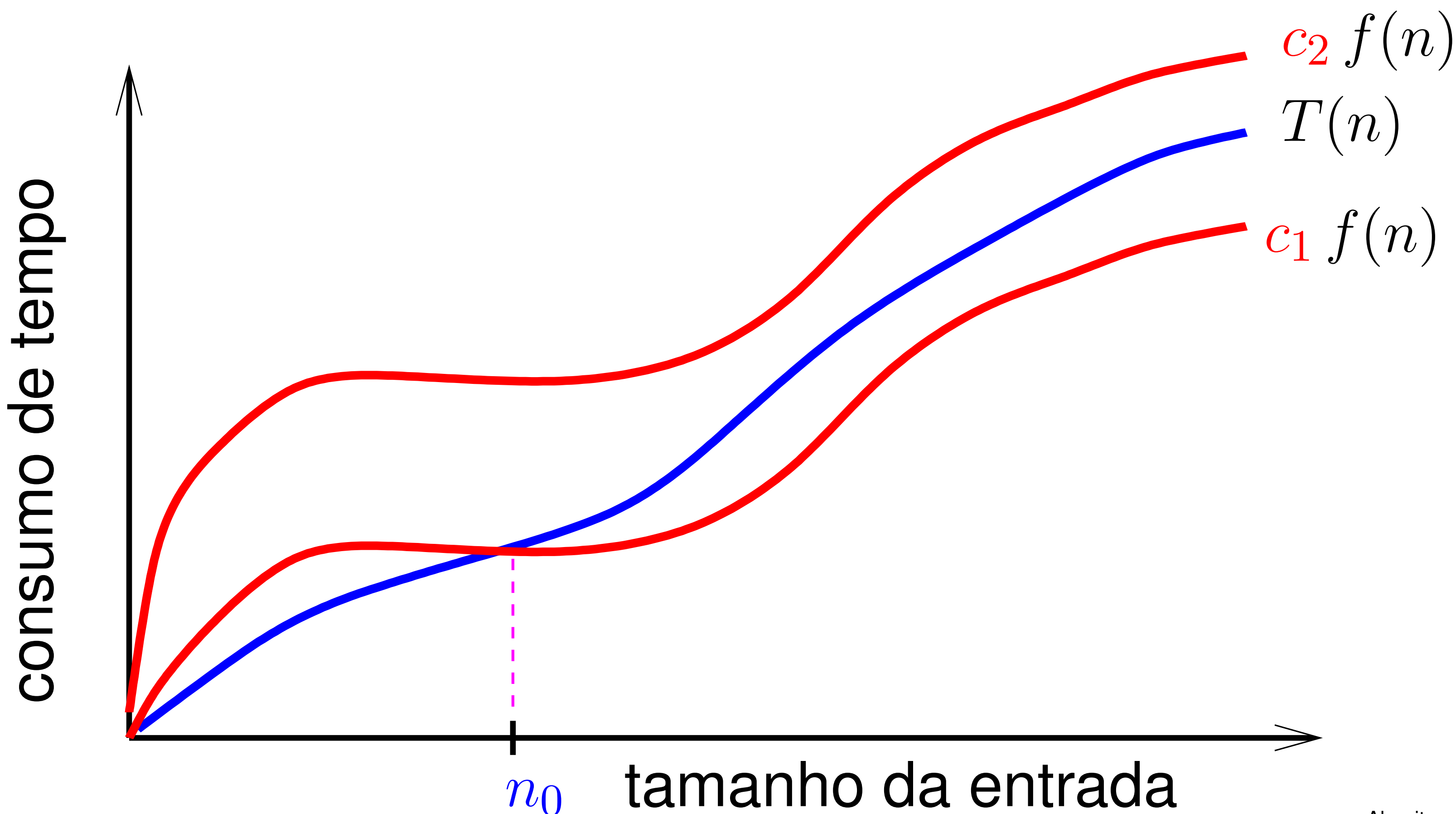


Definição

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1\, f(n) \ \leq \ T(n) \ \leq \ c_2\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Merge-Sort

Rearranja $A[p \mathinner{..} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
            INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	55	33	66	44	99	11	77	22	88

Merge-Sort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 **MERGE-SORT** (A, p, q)

---

4 MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & p & & & & q & & & & r \\
\cline{2-10}
A & 33 & 44 & 55 & 66 & 99 & 11 & 77 & 22 & 88 \\
\cline{2-10}
\end{array}$$

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$

            INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	33	44	55	66	99	11	22	77	88

Merge-Sort

Rearranja $A[p \mathinner{..} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q+1, r)$
            INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3 MERGE-SORT (A, p, q)
4 MERGE-SORT $(A, q+1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

Consumo de tempo?

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

Merge-Sort

```
MERGE-SORT (A, p, r)
1    se p < r
2        então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3            MERGE-SORT (A, p, q)
4            MERGE-SORT (A, q + 1, r)
5            INTERCALA (A, p, q, r)
```

linha	consumo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n+2)$$

Merge-Sort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Demonstração: ...

Veremos, mas antes estudaremos Recorrências.

Recorrências

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Define função T sobre inteiros positivos:

n	1	2	3	4	5	6
$T(n)$	1	9	20	34	51	71

$T(n)$
1 **se** $n = 1$
2 **então devolva** 1
3 **senão devolva** $T(n-1) + 3n + 2$

Método da substituição

Chute:
Eu acho que $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$.

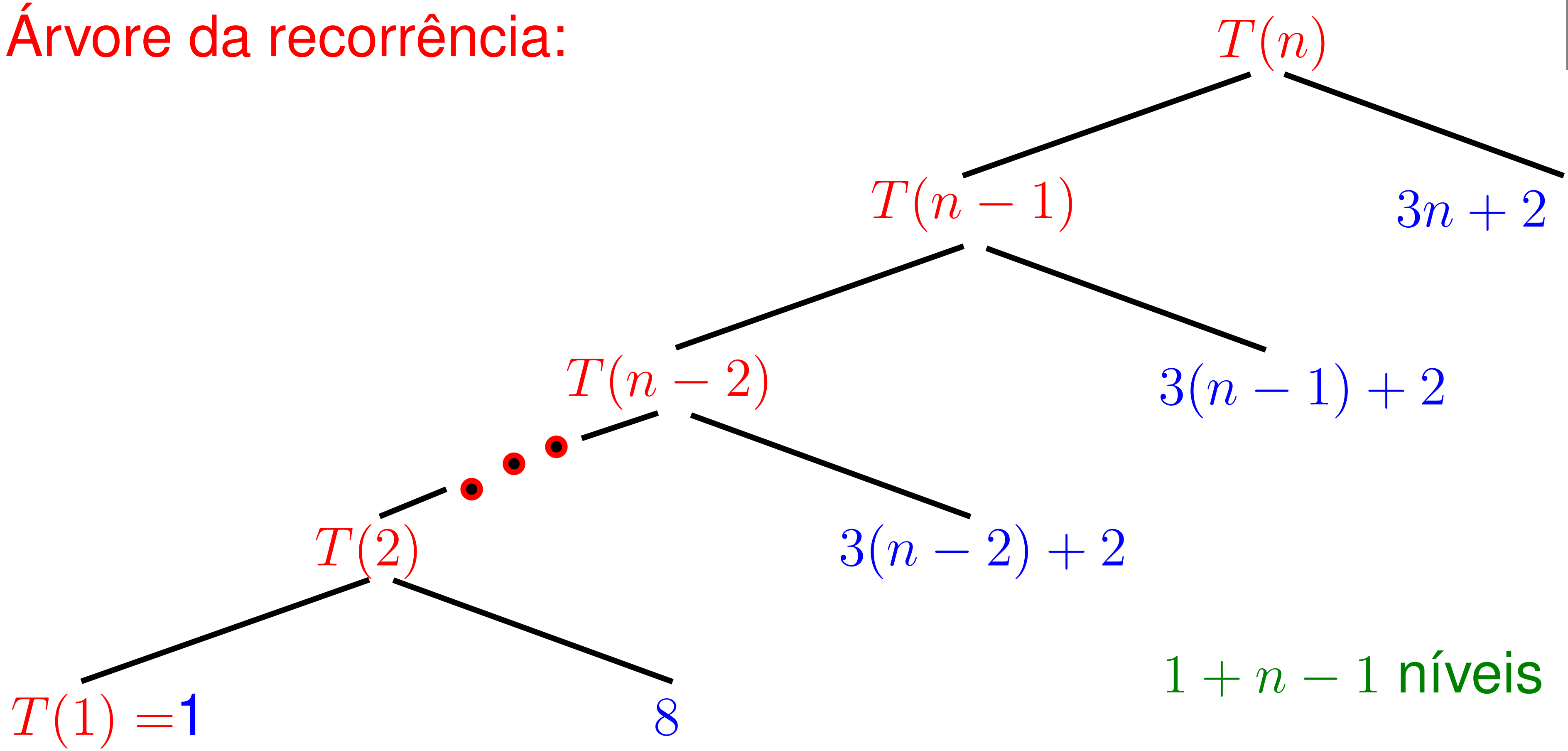
Verificação por indução:
Se $n = 1$ então $T(n) = 1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 4$.
Tome $n \geq 2$ e suponha que a fórmula está certa para $n - 1$:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \\ &\stackrel{\text{hi}}{=} \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{7}{2}(n-1) - 4 + 3n + 2 \\ &= \frac{3}{2}n^2 - 3n + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}n - \frac{7}{2} - 4 + 3n + 2 \\ &= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4\,. \end{aligned}$$

Bingo!

Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:



$$T(n) = (3n+2) + (3n-1) + \cdots + 8 + 1$$
$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

AULA 4

Recorrências (continuação)

CLRS 4.1–4.2

AU 3.9, 3.11

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 1 \\
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	4	8	16
$G(n)$	1	18	66	190	494

Exemplo 3

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16
$G(n)$	1	18	66	190	494

Fórmula fechada: $G(n) =$???

Hmmmmmm

Acho que $G(n)$ é da forma $n \lg n$ ...

n	$G(n)$	$6n \lg n$	$7n \lg n$	$8n \lg n$	n^2
1	1	0	0	0	1
2	18	12	14	16	4
4	66	48	56	64	16
8	190	144	168	192	64
16	494	384	448	512	256
32	1214	960	1120	1280	1024
64	2878	2304	2688	3072	4096
128	6654	5376	6272	7168	16384
256	15102	12288	14336	16384	65536

Chute

Acho que a fórmula fechada é

$$G(n) = 7n\lg n + 3n - 2$$

para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32\ldots$

Lá vamos nós outra vez. . .

Chute

$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$ para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

Chute

$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$ para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

Prova: Se $n = 1$ então $G(n) = 1 = 7 \cdot 1 \lg 1 + 3 \cdot 1 - 2$.
Se $n \geq 2$ então

$$
\begin{aligned}
G(n) &= 2G(\tfrac{n}{2}) + 7n + 2 \\
&\stackrel{\text{hi}}{=} 2\left(7\frac{n}{2}\lg\frac{n}{2} + 3\,\frac{n}{2} - 2\right) + 7n + 2 \\
&= 7n(\lg n - 1) + 3n - 4 + 7n + 2 \\
&= 7n \lg n - 7n + 3n - 2 + 7n \\
&= 7n \lg n + 3n - 2
\end{aligned}
$$

Iiiiiéééésss!

Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência: $G(n)$

Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência: $7n + 2$

$G(\frac{n}{2})$ $G(\frac{n}{2})$

Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:

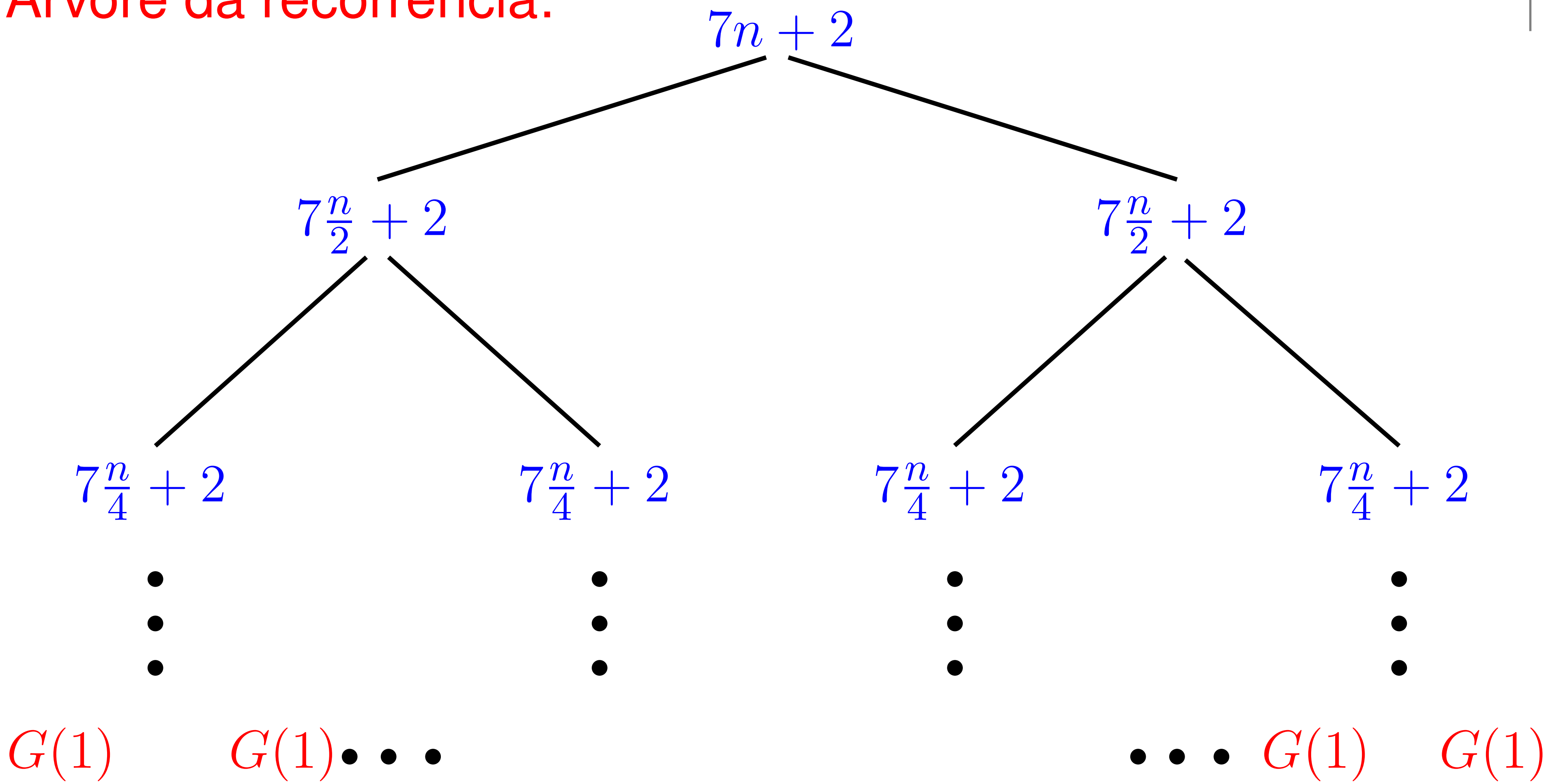
$$7n + 2$$

$$7\frac{n}{2} + 2 \qquad 7\frac{n}{2} + 2$$

$$G(\tfrac{n}{4}) \qquad G(\tfrac{n}{4}) \qquad G(\tfrac{n}{4}) \qquad G(\tfrac{n}{4})$$

Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:



total de $1 + \lg n$ níveis

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	$7n+2$	$7n+4$	$7n+8$	$\ldots$	$7n+2^k$	$2^k G(1)$

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

Contas

nível	0	1	2	...	$k-1$	k
soma	$7n+2$	$7n+4$	$7n+8$	...	$7n+2^k$	$2^k G(1)$

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

$$
\begin{aligned}
G(n) &= 7n + 2^1 + 7n + 2^2 + \cdots + 7n + 2^k + 2^k G(1) \\
&= 7n\,k + (2 + 4 + \cdots + 2^k) + 2^k \\
&= 7n\,k + 2 \cdot 2^k - 2 + n \\
&= 7n \lg n + 2n - 2 + n \quad (k = \lg n) \\
&= 7n \lg n + 3n - 2
\end{aligned}
$$

Iiiiééééssss

Série geométrica

Para $x \neq 1$, quanto vale $1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k$?
(CLRS (A.5), p.1060)

Solução: Seja $S_k := 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k$.
Temos que $xS_k = x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + x^{k+1}$.
Logo,

$$xS_k - S_k = x^{k+1} - 1$$

e

$$S_k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Conclusão:

$$\boxed{1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}.}$$

Exemplo 3 (continuação)

É mais fácil mostrar que $G(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Vou provar que $G(n) \leq 9n \lg n$ para $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^i, \ldots$

Exemplo 3 (continuação)

É mais fácil mostrar que $G(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Vou provar que $G(n) \leq 9n \lg n$ para $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^i, \ldots$

Prova: Se $n = 2$, $G(n) = 18 = 9 \cdot 2 \cdot \lg 2$.

Se $n \geq 4$,

$$
\begin{aligned}
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 2 \cdot 9(n/2) \lg(n/2) + 7n + 2 \\
&= 9n\,(\lg n - 1) + 7n + 2 \\
&= 9n \lg n - 2n + 2 \\
&< 9n \lg n \quad \text{(pois } n > 1\text{)}
\end{aligned}
$$

Da linha 1 para a linha 2, a hipótese de indução vale pois $2 \leq n/2 < n$.

Exercícios

Exercício 8.A

Seja T a função definida pela recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1) + 2n - 2 \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Verifique que a recorrência é honesta, ou seja, de fato define uma função. A partir da árvore da recorrência, adivinhe uma boa delimitação assintótica para $T(n)$; dê a resposta em notação O. Prove a delimitação pelo método da substituição.

Exercício 8.B

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-2) + 2n + 1 \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Desenhe a árvore da recorrência. Dê a resposta em notação O.

Mais exercícios

Exercício 8.C
Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(2) &= 2 \\ T(n) &= T(n-2) + 2n + 1 \qquad \text{para } n = 3, 4, 5, 6, \ldots \end{aligned}$$

Exercício 8.D
Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + 1 \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Exercício 8.E
Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Mais exercícios ainda

Exercício 8.F
Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Exercício 8.G
Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Exercício 8.H
Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lceil n/2 \rceil) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Exemplo 4

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

$T(n) = \mathrm{O}(???)$

Exemplo 4

Vou mostrar que $T(n) \leq 2\,n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$2\,n$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Exemplo 4

Vou mostrar que $T(n) \leq 2\,n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$2\,n$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Prova:
Se $n = 1$, então $T(n) = 1 < 2 \times 1 = 2\,n$.
Se $n \geq 2$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$$

$$\overset{\text{hi}}{\leq} 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

$$= 2\,n + 1 \ldots$$ Hmmm, não deu...

Exemplo 4

Vou mostrar que $T(n) = 2\,n + 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$2\,n - 1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Exemplo 4

Vou mostrar que $T(n) = 2\,n + 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$2\,n - 1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Prova:
Se $n = 1$, então $T(n) = 1 < 2\,1 = 2\,n$.
Se $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\overset{\text{hi}}{=} 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 + 1 \\
&= 2\,n - 1 \qquad \text{Agora deu.}
\end{aligned}
$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259

Exemplo 5

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259

$T(n) = \mathrm{O}(\text{???})$

Exemplo 5

Vou mostrar que $T(n) \leq 20\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259
$20\, n \lfloor \lg n \rfloor$	0	40	60	160	200	240	280	480	540	600

Exemplo 5

Vou mostrar que $T(n) \leq 20\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259
$20\, n \lfloor \lg n \rfloor$	0	40	60	160	200	240	280	480	540	600

Prova:
Se $n = 2, 3$, então $T(n) \leq 20\, n \lfloor \lg n \rfloor \leq 20\, n \lg n$, como mostra a tabela.

Note que a base da indução é $n = 2, 3$. Por quê???

Exemplo 5

Prova: (continuação) Se $n \geq 4$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 20 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 20 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&\leq 20 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 20 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \frac{n}{2} + 6n + 5 \\
&= 20 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 20 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + 6n + 5 \\
&= 20 \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - 20 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&= 20\, n \lg n - 20 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&\leq 20\, n \lg n \quad \text{(pois } n \geq 4\text{)}
\end{aligned}
$$

Iiiiééééssss!

Como achei as contantes?

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Supeito que $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Como achei as contantes?

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Supeito que $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Vamos tentar mostrar isto!

Precisamos encontrar um número real positivo c e um número inteiro positivo n_0 tais que

$$T(n) \leq c\, n \lg n$$

para todo $n \geq n_0$.

Rascunho

Suponha que existam as tais constantes c e n_0.
Vamos descobrir a “cara” delas.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + 6n + 5 \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n + 6n + 5 \\
&= c\, n \lg n + 6n + 5 \ldots \quad \text{Hmmm, não deu...}
\end{aligned}
$$

Nova tentativa

Suponha que existam c e n_0.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \frac{n}{2} + 6n + 5 \\
&= c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + 6n + 5 \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&= c\, n \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \quad \text{Agora vai!}
\end{aligned}
$$

Agora vai

Queremos saber “quando”

$$c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq 6n + 5.$$

Bem, para $c = 20$ e todo $n \geq n_0 = 4$ temos que

$$\begin{aligned} c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &\geq c\,\frac{n-1}{2} \\ &= 20\,\frac{n-1}{2} \\ &= 10n - 10 \\ &> 6n + 5 \quad \text{(pois } n \geq 4\text{)} \end{aligned}$$

Eis constantes que fazem o serviço: $c = 20$ e $n_0 = 4$

Conclusão

Rearranja $A[p\mathinner{.\,.}r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 MERGE-SORT (A, p, q)
4 MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

Conclusão:

O MERGE-SORT consome $\mathrm{O}(n \lg n)$ unidades de tempo.

Exemplo 5 (continuação)

Vou mostrar que $T(n) \geq n \lg n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259
$n\lceil \lg n \rceil$	0	2	6	8	15	18	21	24	36	40

Exemplo 5 (continuação)

Vou mostrar que $T(n) \geq n \lg n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259
$n\lceil \lg n \rceil$	0	2	6	8	15	18	21	24	36	40

Prova:
Se $n = 1$, então $T(1) = 1 > 1 \cdot \lg 1 = 0$.

Exemplo 5

Prova: (continuação) Se $n \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \\
&\overset{\text{hi}}{\geq} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \frac{n}{2} + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \frac{n-1}{2} + 6n + 5 \\
&= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (\lg n - 1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg(n-1) - 1) + 6n + 5 \\
&\geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (\lg n - 1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 2) + 6n + 5 \\
&= (\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) \lg n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 6n + 5 \\
&\geq n \lg n - 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 6n + 5 \geq n \lg n.
\end{aligned}
$$

Iiiiééééssss!

Exemplo 5

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 6n + 5 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259

Conclusão:

$\boxed{T(n) \text{ é } \Theta(n \lg n).}$

Conclusão da conclusão

$\boxed{\text{O consumo de tempo do MERGE-SORT é } \Theta(n \lg n) \text{ no pior caso.}}$

Exercício. Mostre que:

$\boxed{\text{O consumo de tempo do MERGE-SORT é } \Theta(n \lg n).}$

Hmmmm. . . Qual a diferença entra as duas afirmações?

Lembra?

Número mínimo, médio ou máximo?
Melhor caso, caso médio, pior caso?