MAC 328 ALGORITMOS EM GRAFOS

FLUXOS EM REDES

1. Introdução

Na começo da década de 50 T.E. Harris da RAND Corporation (consultores da U.S. Air Force em Santa Monica, California) chamou a atenção para a seguinte questão:

> Consider a rail network connecting two cities by way of a number of intermediate cities, where each link of the network has a number assigned to it representing its capacity. assuming a steady state condition, find a maximal flow from one given city to the other.

Este problema pode ser formulado da seguinte maneira em teoria dos grafos. Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido[1] (ou digrafo) onde V é o conjunto de *vértices* e onde A é um subconjunto de pares ordenados de vértices (v, w), $v \neq w$, chamados de *arcos*. Considere dois vértices especiais s (a 'fonte' ou 'origems' ou *source*) e t (o 'sorvedouro' ou 'destino' ou *sink*) de D, $s \neq t$. Um s-t-fluxo em D é uma função[2] $f : V \times V \to \mathbb{R}_+$ que satisfaz a seguinte lei de conservação de fluxo (*flow conservation law* ou *Kirchhoff's current law*):

$$\sum_w f(v,w) = \sum_w f(w,v) \quad \text{para cada vértice } v \in V \setminus \{s,t\}, \tag{1}$$

onde $f(v, w) = 0$ se $(v, w) \notin A$. O *valor* $\mathrm{val}(f)$ de um s-t-fluxo f é dado por

$$\mathrm{val}(f) := \sum_w f(s,w) - \sum_w f(w,s). \tag{2}$$

O valor de f representa a quantidade de fluxo 'deixando' s. Note que essa quantidade deve ser igual ao valor do fluxo 'entrando' em t (prove isto).

Se além disso nos é dada uma função 'capacidade' $c : V \times V \to \mathbb{R}_+$ tal que $c(v, w) = 0$ se $(v, w) \notin A$ nós dizemos que f satisfaz c se

$$f(v,w) \leq c(v,w) \quad \text{para cada arco } (v,w) \in A.$$

O *Problema do Fluxo Máximo* pode ser formulado da seguinte maneira

(3)

dados: – um digrafo $D = (V, A)$;
– dois vértices distintos s e t de D;
– uma função capacidade $c : V \times V \to \mathbb{R}_+$;

encontrar: – um s-t-fluxo f satisfazendo c que maximize $\mathrm{val}(f)$.

Date: 5 de novembro de 1999.

[1] Estaremos considerando somente grafos finitos, i.e. ambos V e A são conjuntos finitos.

[2] Por conveniência definimos um s-t-fluxo como uma função sobre os pares de vertices. Alternativamente poderiamos ter definido um fluxo como uma função sobre o conjunto de arcos de D.

Chamaremos a quadrupla (D, s, t, c) de uma rede (*network*). Se f é um s-t-fluxo em D satisfazendo c diremos simplesmente que f é um fluxo na rede (D, s, t, c). A Figura 1 mostra uma rede e um fluxo satisfazendo as capacidades.

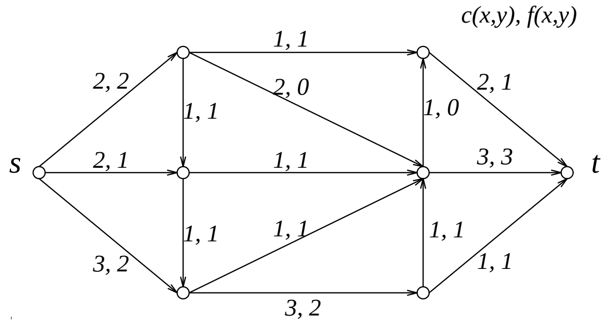


FIGURA 1. Rede $N = (D, s, t, c)$ com um fluxo maximal. O primeiro número próximo de cada arco representa a sua capacidade e o segundo representa o valor do fluxo neste arco.

No artigo "Maximal flow through a network" (publicado como RAND report de 19 novembro de 1954), Ford e Fulkerson [7] observaram que o problema acima é um problema de programação matemática e portanto pode ser resolvido pelo método simplex de Dantzig. De fato, esse problema é muito próximo dos *Transportation and Transshipment Problems* estudados em 1940 por Hitchcock, Kantorovich e Koopmans (os dois últimos receberam o Prêmio Nobel de economia pelo seus trabalhos).

2. Limites superiores para os valores de fluxos

O principal resultado em Ford e Fulkerson [7] é o famoso Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo (*the max-flow min-cut theorem*—independentemente provado por Elias, Feinstein e Shannon [6] e Kotzig [?]). Antes de discutirmos sobre esse teorema nós necessitamos do conceito de um 'corte'.

Fixemos o nosso digrafo $D = (V, A)$ e rede $N = (D, s, t, c)$. Seja U um subconjunto qualquer dos vértices de D tal que $v \in U$ e $w \in V \setminus U$. Então

$$\delta(U) := \{(v, w) \mid v \in S \text{ e } w \in V \setminus S\}$$

é um *v-w-corte* em D. Cada s-t-corte em D será dito um *corte* em N. A capacidade $\operatorname{cap}(S)$ de um corte $\delta(S)$ em N e a soma das capacidades de todos os arcos no corte, ou seja,

$$\operatorname{cap}(S) := \sum_{(v,w)\in\delta(S)} c(v, w) = \sum_{v\in S} \sum_{w\in V\setminus S} c(v, w).$$

É claro que a capacidade de cada corte em N é um limite superior para o valor de cada fluxo em N.

Proposição 1. *Seja f e $\delta(S)$ um fluxo e um corte em (D, s, t, c), respectivamente. Então $val(f) \leq cap(S)$.*

Prova.

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(f) &= \sum_v f(s,v) - \sum_v f(v,s) \\
&= \sum_v f(s,v) - \sum_v f(v,s) + \sum_{v \in S\setminus\{s\}} (\sum_w f(v,w) - \sum_w f(w,v)) \\
&= \sum_{v\in S} (\sum_w f(v,w) - \sum_w f(w,v)) \\
&= \sum_{v\in S} \sum_{w \in V\setminus S} f(v,w) \\
&\le \sum_{v\in S} \sum_{w \in V\setminus S} c(v,w) \\
&= \mathrm{cap}(S).
\end{aligned}$$

∎

Como conseqüência imediata da Proposição 1 temos que se f e $\delta(S)$ são um fluxo e um corte em N tal que $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ então f é um fluxo máximo e $\delta(S)$ é um corte mínimo em N. Note também que $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ se e somente se $f(w,v) = 0$ e $f(v,w) = c(v,w)$ para cada $v \in S$ e $w \in V \setminus S$.

3. Fluxos máximos e caminhos aumentantes

Dados um digrafo $D = (V, A)$, uma rede $N = (D, s, t, c)$ e um fluxo f em N nós denotaremos por $D_f = (V, A_f)$ o *digrafo residual* de N em relação a f, onde

$$(v,w) \in A_f \quad \text{sse} \quad \begin{cases} (v,w) \in A \text{ e } f(v,w) < c(v,w), \text{ ou} \\ (w,v) \in A \text{ e } f(w,v) > 0. \end{cases}$$

Um *f-caminho aumentante* (*augmenting path*) até um vértice v é um caminho de s a v em D_f. (Veja Figure 2.)

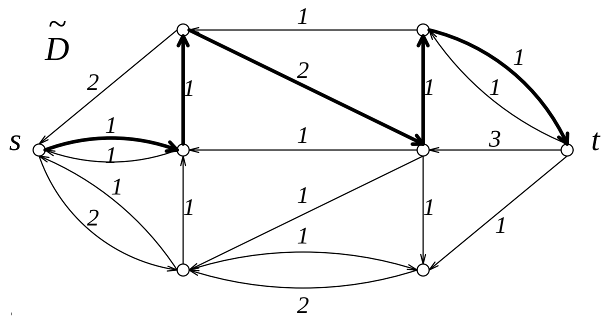


Figura 2. Digrafo residual associado a rede e fluxo mostrados na Figura 1. Os arcos mais grossos na figura mostram um f-caminho aumentante de capacidade residual 1.

Se D_f é o digrafo residual de N em relação a f então diremos que $R_f := (D_f, s, t, r)$ é a *rede residual* (de N em relação a f), onde

$$r(v,w) := c(v,w) - f(v,w) + f(w,v)$$

Chamaremos $r(v,w)$ de a *capacidade residual* do arco (v,w). Se P é um f-caminho aumentante então $res(P) := \min\{r(v,w) \mid (v,w) \text{ é um arco em } P\}$ é a capacidade residual de P.

Proposição 2. *Um fluxo f em N é máximo se e somente se não existe um f-caminho aumentante até t. Ademais, se f é um fluxo máximo então existe um s-t-corte S tal que $cap(S) = val(f)$.*

Prova. Podemos assumir sem perda de generalidade que se $(v,w) \in A$ então $(w,v) \notin A$. (Usando 'vértices fictícios' nós podemos forçar que essa condição seja satisfeita mesmo que na rede original essa condição não se verifique (como?).)
($\Rightarrow$). Seja P um f-caminho aumentante até t. Defina

$$\text{f'(v,w)} := \begin{cases} f(v,w) + res(P) & \text{se } (v,w) \in A \text{ e } (v,w) \text{ é um arco de } P; \\ f(v,w) - res(P) & \text{se } (w,v) \in A \text{ e } (v,w) \text{ é um arco de } P; \\ f(v,w) & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

Podemos agora verificar que f' é um fluxo em N tal que $\text{val}(f') = \text{val}(f) + res(P)$. (Veja Figura 3.)

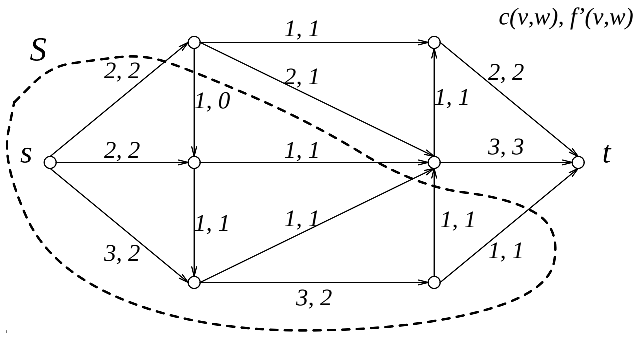


Figura 3. Rede N da Figura 1 com fluxo f' que foi obtido a partir de f e do caminho f-aumentante da Figura 3 como definido em (4). $\delta(S)$ é um corte mínimo em N.

($\Leftarrow$). Suponhamos agora que não exista um f-caminho aumentante até t. Desta forma $S := \{v \in V \mid \text{ existe um } f\text{-caminho aumentante até } v\}$ é um s-t-corte. Ademais, da definição de S, segue imediatamente que

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \sum_{v \in S} \sum_{w \in V \setminus S} f(v,w) \\ &= \sum_{v \in S} \sum_{w \in V \setminus S} c(u,v) \\ &= \text{cap}(S) \end{aligned}$$

e $f(v,w) = 0$ para $v \in V \setminus S$ e $v \in S$. Logo, pela Proposição 1, temos que f é um fluxo máximo e $\delta(S)$ é um corte mínimo. (Veja Figura 3.) ∎

Proposição 3. *Seja f um fluxo em N e f^* um fluxo máximo em N. Se R é a rede residual de N em relação a f então o valor do fluxo máximo em R é $val(f^*) - val(f)$.*

Prova. Da mesma maneira que fizemos na prova da proposição anterior, assumiremos sem perda de generalidade que $(v,w) \in A \to (w,v) \notin A$. Seja f' um fluxo em R_f. Seja $h : V \times V \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$h(v,w) := \begin{cases} f(v,w) + f'(v,w) - f(w,v) & \text{se } (v,w) \in A \\ 0 & \text{se } (v,w) \notin A. \end{cases}$$

Pode-se verificar (verifique!) que h é um fluxo em N de valor $\text{val}(f)+\text{val}(f')$. Logo

$$\text{val}(f') \le \text{val}(f^*) - \text{val}(f). \tag{5}$$

Similarmente, a partir de f^* e f nos definimos $f' : V \times V \to \mathbb{R}_+$ da seguinte maneira:

$$f'(v,w) := \begin{cases} f^*(v,w) - f(v,w) & \text{se } (v,w) \in A \text{ e } f^*(v,w) \ge f(v,w); \\ f(w,v) - f^*(w,v) & \text{se } (w,v) \in A \text{ e } f(w,v) > f^*(w,v); \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não é difícil verificar que f' é um fluxo na rede residual R_f de N em relação a f de valor $\text{val}(f^*) - \text{val}(f)$. Logo, de (5) segue que f' é um fluxo máximo em R_f. ∎

4. Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo

O resultado central desta parte da disciplina é o seguinte teorema devido a Ford e Fulkerson [7], Elias, Feinstein e Shannon [6] e Kotzig [?]. (Nesta penúltima referência os autores afirmam que o resultado era conhecido na área de *communication theory*.)

Teorema 1. (Max-Flow Min-Cut Theorem) *Se $N = (D,s,t,c)$ é uma rede então*

$$\max\{val(f) \mid f \text{ é um fluxo em } N\} = \min\{cap(S) \mid \delta(S) \text{ é um corte em } N\}.$$

Prova. f fluxo máximo $\Leftrightarrow$ não existe um f-caminho aumentante $\Leftrightarrow$ existe um corte $\delta(S)$ tal que $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$. Ambas equivalências seguem da Proposição 2. ∎

Em um artigo de 1º de janeiro de 1955, Dantzig e Fulkerson [1955] mostraram que o Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo também pode ser deduzido a partir do teorema de dualidade de programação linear e em um artigo de 1º de abril de 1955 Fulkerson e Dantzig [1955] propuseram um método computacional simples para o problema do fluxo máximo baseado no método simplex.

5. Fluxos do ponto de vista algorítmico

5.1. **Método dos caminhos aumentantes (Ford e Fulkerson** [7]**).** Recebe um rede $N = (D,s,t,c)$ e devolve um fluxo em N de valor máximo. Cada iteração começa com um fluxo em N. A primeira iteração começa com o fluxo zero em todos os arcos (*zero flow*). Cada iteração consiste em repetir o seguinte passo até obter um fluxo f sem um f-caminho aumentante:

> PASSO AUMENTANTE (AUGMENTING STEP): Encontre um caminho aumentante P para o fluxo corrente. Aumente o valor do fluxo fornecendo $\text{res}(P)$ unidades de fluxo através do caminho P.

Dado um fluxo máximo um corte mínimo pode ser encontrado em tempo $O(m)$ fazendo-se busca em largura na rede R_f.

Suponha que a capacidade dos arcos é inteira. Então o método dos caminhos aumentantes aumenta o valor do fluxo de pelo menos 1 em cada iteração. Logo o método encontra um fluxo máximo depois de no máximo $\min\{\text{cap}(S) \mid \delta(S) \text{ corte em } N\}$ passos aumentantes. Além disso o fluxo máximo f^* encontrado pelo algoritmo será inteiro. Dizemos que um fluxo f é inteiro se $f(v,w) \in \mathbb{Z}$ para todo $(v,w) \in A$.

Teorema 2. (Integrality theorem) *Se $c \in \mathbb{Z}_+^A$ então existe um fluxo máximo inteiro.* ∎

O teorema da integralidade também é conseqüência do Método Simplex de Dantzig [2].

Infelizmente se as capacidades forem inteiros muito grandes o método dos caminhos aumentantes pode fazer muitos passos aumentantes. O número de passos aumentantes do método depende de

$$C := \max\{c(v,w) | (v,w) \in A\}.$$

Portanto para capacidades inteiras o método é um algoritmo pseudo-polinomial. (Para ser polinomial o número de passos aumentantes necessita ser um polinomio em m, n e $\log C$.)

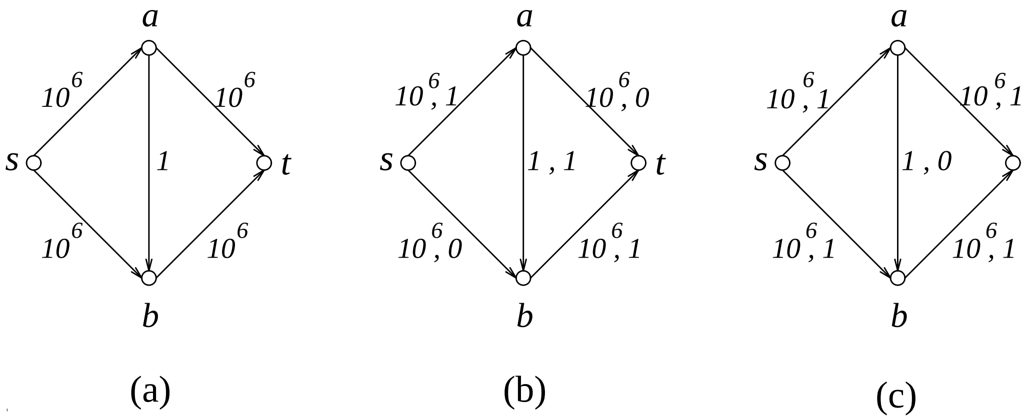


FIGURA 4. Um exemplo maldoso para o método dos caminhos aumentantes. (a) rede dada. (b) fluxo após aumentarmos através do caminhos (s,a,b,t). (c) fluxo após aumentarmos através do caminho (s,b,a,t). Depois de 2×10^6 passos aumentantes, através dos caminhos (s,a,b,t) e (s,b,a,t) alternadamente, o fluxo será máximo.

Se as capacidades dos arcos forem irracionais o método pode não parar. Pior que isso, pode ocorrer que a seqüência de fluxos $f_0, f_1, f_2, \ldots$ obtida pelo método seja tal que a seqüência $\text{val}(f_0), \text{val}(f_1), \text{val}(f_2), \ldots$ convirga para um valor bem diferente do valor do fluxo máximo! Notemos que essa seqüência certamente converge já que ela é estritamente crescente e limita; a capacidade do corte mínimo é um limitante superior. Um exemplo maldoso de onde isso ocorre pode ser encontrado em Papadimitriou e Steiglitz [10] páginas 124–128; veja também o exercício 10.

Apesar da situação um tanto quanto desanimadora a próxima proposição nos da esperanças de que possa existir uma maneira mais 'esperta' de escolhermos os caminhos f-aumentantes.

Proposição 4. *Seja f^* um fluxo máximo em N. Começando com o fluxo zero existe uma seqüência de fluxos $f_0, f_1, \ldots, f_k$, $k \leq m$, tal que*

(i) $val(f_0) < val(f_1) < \ldots < val(f_k) = val(f^*)$; e

(ii) o aumento de cada fluxo é através de um caminho no grafo original.

Prova. Seja D^* o digrafo induzido pelos arcos (v,w) de D tal que $f^*(v,w) > 0$. Inicialize i com zero e seja f_0 o fluxo nulo em N. Repita o seguinte passo até que t não seja mais atingível a partir de t no grafo D^* corrente.

> Pathfinding step. Encontre um caminho P_i de s a t em N^*. Seja $\Delta_i := \min\{f^*(v,w) \mid (v,w) \in P_i\}$ e
>
> $$f_i(v,w) := \begin{cases} f_{i-1}(v,w) + \Delta_i & \text{se } (v,w) \text{ é um arco de } P_i; \\ f_{i-1}(v,w) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
>
> Para cada arco (v,w) em R decremente de Δ_i o valor de $f^*(v,w)$ e remova de D^* todo arco (v,w) tal que $f^*(v,w) = 0$. Incremente i de 1.

Em cada passo pelo menos um arco de D^* é removido. Portanto, o passo acima é repetido no máximo $k \leq m$ vezes; depois de ter reduzido o valor do fluxo f^* para zero. É claro que cada um dos caminhos $P_0, P_1, \ldots, P_k$ é um caminho no grafo original. Os fluxos $f_0, f_1, \ldots, f_k$ obtidos através da execução do passo acima são os fluxos desejados. ∎

5.2. **Método do aumento através do caminho de maior capacidade residual (*maximum capacity augmentation method*).** Uma maneira natural de selecionarmos um caminho aumentante é sempre escolher aquele com maior capacidade residual.

Teorema 3. *Aumento de fluxo através de caminhos de maior capacidade residual produz fluxos cujo valor converge para o valor do fluxo máximo. Além disso se as capacidades são inteiras o método encontra um fluxo máximo em $O(m(\log m + \log C))$ passos aumentantes, onde $C := \max\{c(v,w) \mid (v,w) \in A\}$.*

Prova. seja f^* um fluxo máximo em N e seja $f_0, f_1, f_2, \ldots$ a seqüência de fluxos obtida pelo método do aumento através do caminho de maior capacidade residual. Suponha que $\mathrm{val}(f_0), \mathrm{val}(f_1), \mathrm{val}(f_2), \ldots$ converge para $\delta < \mathrm{val}(f^*)$. Existe $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\mathrm{val}(f_{t+1}) - \mathrm{val}(f_t) < \epsilon := (\mathrm{val}(f^*) - \delta)/m. \tag{6}$$

Pelas Proposições 3 e 4 segue que existe uma seqüência de fluxos $f_t = h_0, h_1, \ldots, h_k$, tal que $\mathrm{val}(h_k) = \mathrm{val}(f^*)$ e $k \leq m$. Logo existe um caminho P em R_{f_t} de capacidade residual pelo menos

$$(\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t))/m.$$

Portanto

$$\mathrm{val}(f_{t+1}) - \mathrm{val}(f_t) \geq (\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t))/m > (\mathrm{val}(f^*) - \delta)/m,$$

contradizendo (6).

Suponha agora que as capacidades são números inteiros. Seja f^* um fluxo máximo. Pela Proposição 3 existe um fluxo na rede residual R_{f_t} de valor $\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t)$. Pela Proposição 4 existe em R_{f_t} um caminho com capacidade residual de pelo menos $(\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t))/m$. Portanto nś temos que

$$\mathrm{val}(f_{t+1}) \geq \mathrm{val}(f_t) + (\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t))/m.$$

Se $\mathrm{val}(f_{t+1})$ não é o fluxo máximo segue que

$$1 \leq \mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_{t+1}) \leq \mathrm{val}(f^*) - (\mathrm{val}(f_t) + (\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t))/m).$$

Logo

$$1 \leq (\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_t))(1 - 1/m)^t \leq \ldots \leq (\mathrm{val}(f^*) - \mathrm{val}(f_0))(1 - 1/m)^{t+1}.$$

Como $\mathrm{val}(f_0) = 0$ e $1 + x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ nós temos que

$$\begin{aligned}
& 1 \leq \mathrm{val}(f^*)(1 - 1/m)^{t+1} \leq \mathrm{val}(f^*)e^{-(t+1)/m} \\
\Rightarrow\ & 1/(\mathrm{val}(f^*) \leq e^{-(t+1)/m} \\
\Rightarrow\ & \mathrm{val}(f^*) \geq e^{(t+1)/m} \\
\Rightarrow\ & \ln \mathrm{val}(f^*) \geq 1/m(t+1) \\
\Rightarrow\ & h + 1 \leq m \ln \mathrm{val}(f^*) \leq m \ln(mC).
\end{aligned}$$

Logo $h = O(m(\log m + \log C))$. ∎

Um caminho aumentante de capacidade residual máxima pode ser encontrado através de uma variação do algoritmo de Dijkstra [3] para o problema do caminho de comprimento mínimo (*the shortest path problem*).

É desejável um algoritmo onde o número de passos aumentantes seja uma função polinomial de n e m e não dependa de C (*strongly polynomial-time algorithm*). Outro método sugerido por Edmonds e Karp [5] é sempre escolher um caminho aumentante com o menor número de arcos possível. Esse método é mais eficiente se aumentarmos o fluxo através de caminhos de mesmo comprimento simultaneamente (cf. Dinits [4]).

5.3. **Método do aumento através de fluxos bloqueadores (*Augmenting by blocking flows*).** Um fluxo f é um fluxo bloqueador se cada caminho de s a t contém um arco *saturado* (i.e. um arco (v,w) tal que $f(v,w) = c(v,w)$). Seja R_f a rede residual de (D,s,t,c) em relação a f e *nível*(v) o número de arcos em um caminho mínimo de s a v em R_f. O *grafo nível* de R_f é o subgrafo de R_f induzido pelos vértices atingíveis a partir de s e pelos arcos (v,w) tal que

$$\textit{nível}(w) = \textit{nível}(v) + 1.$$

O grafo nível de R_f pode ser construído em tempo $O(m)$ através de busca em largura no grafo D_f.

O método de Dinits [4] consiste em começar com o fluxo (digamos) zero e repetir o seguinte passo até t não pertencer ao grafo nível para o fluxo corrente:

> Passo bloqueador (blocking step). Encontre um fluxo bloqueador f' no grafo nível da rede residual do fluxo corrente f. Troque f pelo fluxo h obtido a partir de f e f' como foi feito na prova da Proposição 3.

Teorema 4. *O método de Dinits pára depois de $n-1$ passos bloqueadores.*

Prova. Consideremos um passo bloqueador. Seja f o fluxo corrente, R o seu grafo residual e R' o grafo residual após o passo bloqueador. Seja ainda *nível* a função nível para R e $\varphi(R)$ o comprimento (= número de arcos) de um s-t-caminho mínimo na rede R. Para cada arco (v,w) de R' nós temos que:

(i) $\mathit{nível}(w) \leq \mathit{nível}(v)+1$, se (v,w) é um arco de R; e
(ii) $\mathit{nível}(w) \leq \mathit{nível}(v)-1$, se (v,w) não é um arco de R.

De fato, se (v,w) é um arco de R então (i) segue imediatamente da definição da função nível. Se (v,w) não é um arco de R, então pela nossa definição de rede residual e alteração do fluxo f feita pelo passo bloqueador temos que (w,v) é um arco de R e (w,v) pertence a um s-t-caminho mínimo em R. Portanto $\mathit{nível}(v) = \mathit{nível}(w)+1$.

Agora se $(s,v_1),(v_1,v_2),\ldots,(v_{k-1},t)$ são os arcos de um s-t-caminho mínimo P' em R' então, de (i) e (ii) temos que:

$$\begin{aligned}\varphi(R')=k &\geq (\mathit{nível}(t)-\mathit{nível}(v_{k-1}))+\cdots+(\mathit{nível}(v_2)-\mathit{nível}(v_1))+(\mathit{nível}(v_1)-\mathit{nível}(s))\\ &= \mathit{nível}(t)-\mathit{nível}(s)\\ &= \mathit{nível}(t)\\ &= \varphi(R).\end{aligned}$$

Se nos tivermos que $\varphi(R')=\varphi(R)$ então P' é um s-t-caminho mínimo em R. Entretanto, pelo menos uma arco (v,w) em cada s-t-caminho mínimo em R não é um arco em R', contradição. ∎

A maneira mais simples de encontrar um fluxo bloqueador e a maneira usada por Dinits: encontre em L um caminho entre s e t e aumente o fluxo nesse caminho até que um arco seja saturado.

Teorema 5. *O algoritmo de Dinits encontra um blocking flow em tempo $O(nm)$ e um fluxo máximo em tempo $O(n^2m)$.* ∎

Teorema 6. *Se os passos aumentantes são feitos através de caminhos de comprimento mínimo então o método dos caminhos aumentantes para depois de $(n-1)m$ passos aumentantes e encontra um fluxo máximo em tempo $O(nm^2)$.*

Prova. Análoga a dos teoremas anteriores. ∎

6. Notas bibliográficas

Schrijver [12] contém um breve *survey* sobre caminhos e fluxos em grafos.

Um exemplo de rede onde o método do aumento através do caminho de maior capacidade residual não para pode ser encontrado em Queyranne [11].

Karzanov [8] propôs um algoritmo que saturando o fluxo em um vértice em cada passo encontra um fluxo bloqueador em tempo $O(n^2)$ e um fluxo máximo em tempo $O(n^3)$.

Sleator e Tarjan [13] desenvolveram a estrutura de dados chamada *dynamic trees* e a usaram para melhorar a complexidade de tempo no pior caso do algoritmo de Dinits de $O(n^2 m)$ para $O(nm \log n)$.

Livros que contém algoritmos para encontrar o fluxo máximo e corte mínimo em um rede são (entre outros): Lawler [9]; Capítulos 6 e 9 de Papadimitriou e Steglitz [10]; Capítulo 8 de Tarjan [14]; e Capítulos 7, 8 e 9 de Ahuja, Magnanti e Orlin [1].

7. Exercícios

Notação: Seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido. Se U é um subconjunto de V denotaremos $V \setminus U$ por $\bar{U}$. Se h é uma função sobre os pares de vértices de D e $X, Y \subseteq V$ então

$$h(X, Y) := \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} h(x, y).$$

1. Seja f um fluxo em $N = (D, s, t, c)$ e $\delta(S)$ um corte em N. Prove que

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{v \in S} \sum_{w \in V \setminus S} (f(v, w) - f(w, v)),$$

   i.e. $\mathrm{val}(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$.
2. Prove que em toda rede existe um fluxo máximo f tal que o digrafo induzido pelo cojunto de arcos $\{(v, w) \in A \mid f(v, w) > 0\}$ é acíclico. (Note que isso implica, em particular, que existe um fluxo máximo onde o fluxo entrando na fonte ou saindo do sorvedouro é nulo.)
3. Seja f um fluxo na rede $N = (D, s, t, c)$. Prove que o valor do fluxo saindo de s é igual ao valor do fluxo entrando em t, i.e.

$$f(s, \overline{s}) - f(\overline{s}, s) = f(\overline{t}, t) - f(t, \overline{t}).$$

4. Seja $S, T \subset V$, $S \cap T = \emptyset$ e $N = (D, S, T, c)$ uma rede. (Note que a rede N tem possivelmente mais do que uma fonte e destino.) Seja $N' = (D', s, t, c')$ a rede definida por:

$$\begin{aligned} V(D') &:= V(D) \cup \{s, t\}; \\ A(D') &:= A(D) \cup \{(s, v) \mid v \in S\} \cup \{(v, t) \mid v \in T\}; \text{ e} \\ c'(v, w) &:= \begin{cases} c(v, w)) & \text{se } (v, w) \in A(D); \text{ e} \\ M = \sum_{v,w} c(v, w) & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

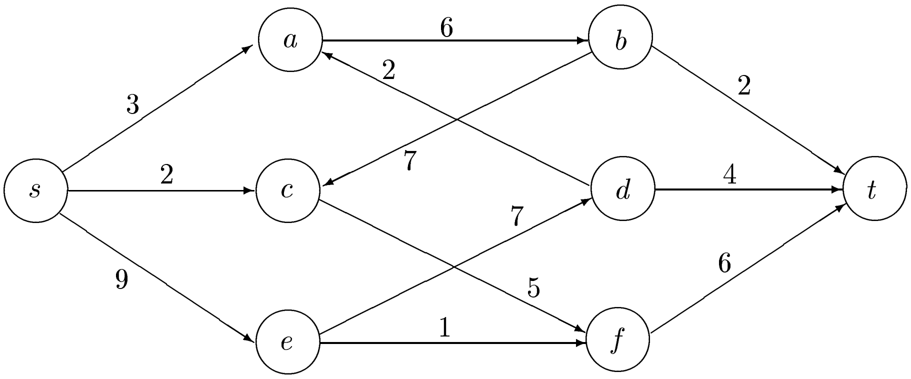
   Prove que:
   (a) dado um fluxo f em N, existe um fluxo f' em N' tal que $\mathrm{val}(f') \geq \mathrm{val}(f)$;
   (b) dado um fluxo f' em N', f' restrito aos arcos $A(D)$ é um fluxo em N com valor $\mathrm{val}(f')$.

5. Seja f um fluxo em uma rede $N = (D, s, t, c)$. Seja P um caminho f-aumentante até t. Seja $f' : V \times V \to \mathbb{R}_+$ tal que:

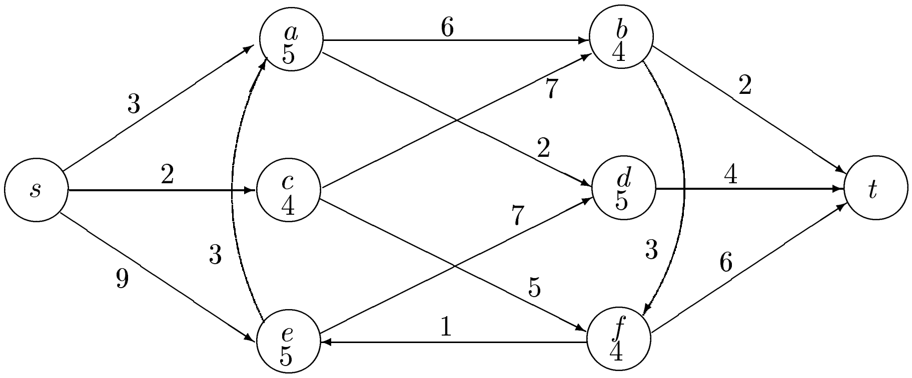
$$f'(v,w) := \begin{cases} f(v,w) + res(P) & \text{se } (v,w) \in A \text{ e } (v,w) \text{ é um arco de } P; \\ f(v,w) - res(P) & \text{se } (v,w) \notin A \text{ e } (v,w) \text{ é um arco de } P; \\ f(v,w) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que f' é um fluxo em N tal que $\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + res(P)$. (Note que pela definição da rede residual de N com relação ao fluxo f temos que $res(P) > 0$.)

6. Encontre um fluxo máximo e um corte mínimo na rede abaixo:

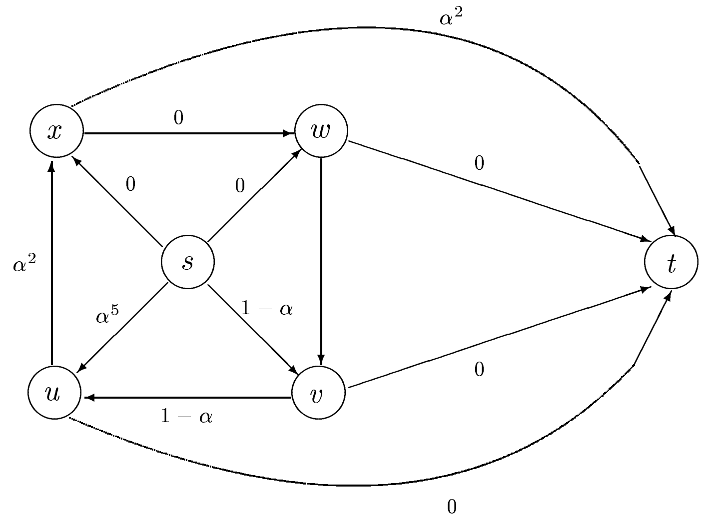


7. Na rede abaixo, além das capacidades das arestas, cada vértice diferente de s e t tem também uma capacidade máxima de fluxo. Encontre um fluxo máximo para essa rede. Argumente para mostrar que o fluxo encontrado é realmente máximo. [Dica: Uma maneira de resolver esse problema é substituir cada vértice v por dois vértices v^- e v^+ com um arco (v^-, v^+) de capacidade (v^-, v^+) de capacidade $c(v^-, v^+)$ igual à capacidade do vértice v. Todos os arcos que previamente entravam v agora entram v^- e todos os arcos que saiam de v agora saem de v^+.]

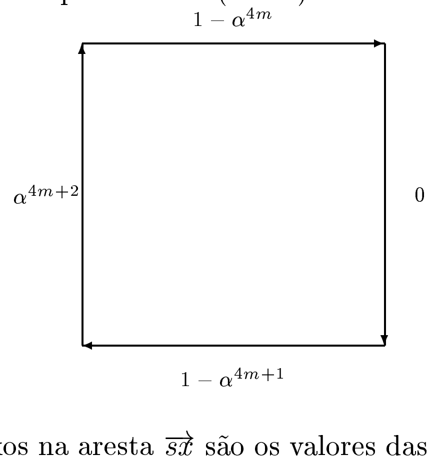


8. Use o teorema do fluxo máximo e corte mínimo para provar a versão do teorema de Menger para grafos orientados e caminhos disjuntos nos vértices. [Dica: use a idéia do problema anterior e atribua capacidade unitária para vértices e capacidade "grande" para arcos do digrafo.]

9. Mostre que se $\delta(X)$ e $\delta(Y)$ são cortes mínimos numa rede N, então $\delta(X \cup Y)$ e $\delta(X \cap Y)$ são também cortes mínimos em N.
10. Na rede abaixo todas as capacidades são unitárias e os valores de um fluxo f_0 estão indicados. O valor de α corresponde à raiz positiva de $\alpha^3 + \alpha - 1 = 0$. Prove que nessa rede existe uma sequência infinita de caminhos aumentantes tais que os valores dos fluxos obtidos não convergem para o valor de um fluxo máximo.



[Sugestão: Use os caminhos aumentantes $(sxwvut)$, $(sxuvwt)$, $(svuxwt)$ e $(svwxut)$ e repita esses caminhos ciclicamente. Prove, usando indução em m, que depois de $4m$ passos do algoritmo de Ford-Fulkerson os valores de fluxo no quadrilátero $(uvwx)$ são os indicados abaixo:



Mostre que os fluxos na aresta $\overrightarrow{sx}$ são os valores das somas parciais de $\alpha + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^{10} + \cdots$ e os fluxos na aresta $\overrightarrow{sv}$ são os valores das somas parciais de $(1-\alpha) + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \cdots$. Mostre que o valor do fluxo na rede converge para $\alpha^2 + (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \cdots)$.]
11. (Hoffman's circulation theorem) A seguinte forma interessante e equivalente ao max-flow min-cut theorem foi provada por Hoffman [1960]. Uma circulação em uma rede é um fluxo sem origem e destino. Mais

precisamente, seja $D = (V, A)$ um grafo dirigido e seja $g : V \times V \to \mathbb{R}_+$. Nos dizemos que g é uma circulação em D se g satisfaz a lei de conservação do fluxo (*Kirchhoff's current law*) para cada vértice v de D, i.e.

$$\sum_w g(v,w) = \sum_w g(w,v) \quad \text{para cada vértice } v \in V,$$

e $g(v,w) = 0$ se $(v,w) \notin A$. Dadas funções $l, c : V \times V \to \mathbb{R}_+$ tal que $l(v,w) \leq c(v,w)$ para todo v e w vértices de D e $l(v,w) = c(v,w) = 0$ se $(v,w) \notin A$ nós dizemos que uma circulação g satisfaz a 'capacidade inferior' l e 'capacidade' c (ou simplesmente que g é viável) se

$$l(v,w) \leq f(v,w) \leq c(v,w) \quad \text{para cada arco } (v,w) \text{ de } D.$$

Prove que existe uma circulação satisfazendo l e c se e somente se

$$l(S, \bar{S}) \leq c(\bar{S}, S) \quad \text{para cada } S \subset V.$$

[Sugestão: note que a necessidade da condição é trivial dado que em uma circulação viável a função l força que pelo menos $l(S, \bar{S})$ fluxo vá de S para $\bar{S}$ e que a função c permite que no máximo $c(\bar{S}, S)$ fluxo vá de $\bar{S}$ para S. Para provar a suficiencia construa o digrafo auxiliar $D' = (V', A')$ onde

$$V' := V \cup \{s, t\} \quad \text{e} \quad A' := A \cup \{(s,v) \mid v \in V\} \cup \{(v,t) \mid v \in V\},$$

e defina a seguinte função capacidade c' para os arcos de D':

$$c'(v,w) := \begin{cases} l(V,w) & \text{se } v = s; \\ l(v,V) & \text{se } w = t; \\ c(v,w) - l(v,w) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então a relação

$$f(v,w) = g(v,w) - l(v,w)$$

determina uma correspondência entre a circulação viável g em D e o fluxo f em (D', s, t, c') de valor $l(V,V)$. Agora use o teorema do fluxo máximo e corte mínimo para provar o teorema da circulação de Hoffman.]

Referências

[1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network flows*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[2] G.B. Dantzig, *Application of the simplex method to a transportation problem*, Activity Analysis of Production and Allocation (Tj.C. Koopmans, ed.), Wiley, New York, 1951, pp. 359–373.

[3] E.W. Dijkstra, *A note on two problems in connexion with graphs*, Numerische Mathematik (1959), 269–271.

[4] E.A. Dinits, *Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power esrimation*, Soviet Mathematics Doklady (1970), no. 11, 1277–1280.

[5] J. Edmonds and R.M. Karp, *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, Journal of the Association for Computing Machinery **19** (1972), 248–264.

[6] P. Elias, A. Feinstein, and C.E. Shannon, *A note on the maximum flow through a network*, IRE Transactions on Information Theory **2** (1956), 117–119.

[7] L.R. Ford Jr. and D.R. Fulkerson, *Maximal flow through a network*, Canadian Journal of Mathematics **8** (1956), 399–404.

[8] A.V. Karzanov, *Determining the maximal flow in a network by the method of preflows*, Soviet Mathematics Doklady (1974), 434–437.

[9] E. Lawler, *Combinatorial optimization: Networks and matroids*, New Yor, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[10] C.H. Papadrimitriou and K. Steigliz, *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey,, 1982.

[11] M. Queyranne, *Theoretical efficiency of the algorithm "capacity" for the maximum flow problem*, Mathematics of Operations Research **5** (1980), 258–266.

[12] A. Schrijver, *Paths and flows—a historical surve*, CWI Quarterly (1993).

[13] D.D. Sleator and R.E. Tarjan, *A data structure for dynamic trees*, Journal of Computer and System Sciences **24** (1983), 362–391.

[14] R.E. Tarjan, *Data structures and network algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1983.