MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

LISTA DE EXERCÍCIOS 9

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até às 18:00 do dia 23 de junho na secretaria do Departamento de Ciência da Computação.

2. Exercícios

1. (Desigualdade de Markov) Seja X uma variável aleatória não negativa e suponha que $E[X]$ está bem definida. Prove que

$$\Pr(X \geq c) \leq E[X]/c$$

para toda constante $c > 0$.

2. Mostre que para uma variável aleatória X que só assume valores 0 e 1 nós temos que $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[1 - X]$.
3. Sejam X e Y variáveis aleatória independentes. Prove que $f(X)$ e $g(Y)$ são variáveis aleatórias independentes para qualquer escolha de funções reais f e g.
4. Dada uma constante $t \geq 1$, determine γ tal que

$$\Pr(d(T) \geq \gamma H_n) \leq 1/n^t,$$

onde $d(T)$ é a profundidade da árvore de busca binária T construída aleatoriamente e H_n é o n-ésimo número harmônico.

5. Neste exercício provaremos que a profundidade média de um nó em uma árvore de busca binária com n nós construída aleatoriamente é $O(\log n)$. Apesar deste resultado ser mais fraco que o visto em sala de aula onde mostramos que

$$\Pr(d(k_j, T) \geq 2\gamma H_n) \leq 2/n^2$$

($d(k_j, T)$ denota a profundidade do nó com a chave k_j na árvore T, γ é uma constante (≈ 5.32) e H_n é o n-ésimo número harmônico), a técnica usada neste exercício coloca em evidência as semelhanças entre a construção de árvores de busca binária e a execução do algoritmo `Quicksort_Aleatório`. Este exercício será dividido em seis partes.

O *comprimento interno dos caminhos* $P(T)$ de uma árvore binária T é a soma, sobre todos os nós x em T, da profundidade do nó x, que denotamos por $d(x, T)$.

(a) Argumente que a profundidade média de um nó em T é

$$\frac{1}{n}\sum_{x\in T} d(x,T) = \frac{1}{n}P(T).$$

Logo, nós queremos mostrar que o valor esperado de $P(T)$ é $O(n\log n)$.

(b) Denotemos por T_E e T_D as subárvores a esquerda e direita da raiz de T, respectivamente. Argumente que se T tem n nós então

$$P(T) = P(T_E) + P(T_D) + n - 1.$$

(c) Denotemos por $P(n)$ o comprimento interno médio de uma árvore de busca binária com n nós construída aleatoriamente. Mostre que

$$P(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(P(i) + P(n-i-1) + n - 1).$$

(d) Mostre que $P(n)$ pode ser reescrito como

$$P(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} P(k) + cn,$$

para alguma constante c.

(e) Relembrando a análise do algoritmo `Quicksort_Aleatório` conclua que $P(n) = O(n\log n)$.

(f) A cada chamada recursiva do algoritmo `Quicksort`, nós escolhemos aleatoriamente um elemento pivô para particionarmos os elementos que estão sendo ordenados. Cada nó de uma árvore de busca binária particiona o conjunto dos elementos que são colocados em uma das subárvores daquele nó.
Descreva uma implementação do algoritmo `Quicksort` na qual as comparações para ordenar um conjunto com n elementos são exatamente as mesmas comparações feitas para inserirmos os elementos em uma árvore de busca binária. (A ordem em que as comparações são feitas podem diferir, mas as comparações devem ser as mesmas.)