MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

LISTA DE EXERCÍCIOS 6

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até o dia 24 de abril no horário da prova.

2. Exercícios

1. Suponha que uma moeda é jogada 25 vezes e que ocorrem (exatamente) 8 caras. Qual é a probabilidade de que ocorram 6 (ou mais) coroas consecutivas?
2. Use funções geradoras para mostrar que
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$
3. Use expansões binomiais para calcular:
   (a) $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{r+k}$
   (b) $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n}{r-k}$
   (c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$
4. Por que não podemos tomar $x = -1$ na fórmula
$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+n-1}{n}x^n$$
para 'provar' que
$$\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}?$$
5. Seja X uma variável aleatória que assume somente valores não negativos e inteiros. Uma *função geradora probabilística* (*probability generating function*) para X é uma função
$$G_X(x) = \sum_{k \geq 0} \Pr(X = k)x^k.$$
(Ou seja, o coeficiente de x^k em $G_X(x)$ é igual a probabilidade de que X seja igual a k.)
   (a) Seja X o número de caras que ocorrem quando lançamos uma moeda honesta n vezes. Mostre que $G_X(x) = (1/2)^n(1+x)^n$.

(b) Seja X o número de caras que ocorrem quando lançamos uma moeda n vezes com probabilidade p de obtermos cara (e probabilidade $q = 1 - p$ de obtermos coroa). Mostre que $G_X(x) = (q + px)^n$.
(c) Seja X o número de vezes que uma moeda honesta é lançada até que ocorra a quinta cara. Encontre $G_X(x)$.
(d) Repita o item (c) para 'até que a m-ésima cara ocorra' e a probabilidade de ocorrer cara é p.

[Sugestão. Veja [1], Seção 8.3.]

6. Escreva uma função geradora para o número de maneiras de escrevermos um inteiro positivo k como a soma de inteiros positivos onde cada inteiro aparece no máximo três vezes.
7. Denotemos por $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ o número de partições de n objetos em k subconjuntos não-vazios. Mostre que
$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}.$$
[Sugestão. Veja [1], Seção 6.1.]

Referências

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1989.