MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

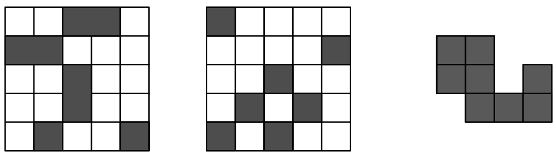
LISTA DE EXERCÍCIOS 5

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até as 17:00 do dia 14 de abril na secretaria do Departamento de Computação (sala 256 do Bloco A).

2. Exercícios

1. Sejam m, n e k inteiros positivos com $k = \mathrm{mdc}(m, n)$. Prove que $\varphi(k)\varphi(mn) = k\varphi(m)\varphi(n)$.
2. (Reciproca da Fórmula de Inversão de Möbius) Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{N}$ e suponha que
$$f(m) = \sum_{d\backslash m} \mu(d) g(m/d).$$
Mostre que
$$g(m) = \sum_{d\backslash m} f(d).$$
[Sugestão. Olhe [1] exercício 4.12.]
3. ([1], exercício 4.11) Encontre uma função $\sigma(n)$ com a propriedade de que
$$g(n) = \sum_{0\le k\le n} f(k) \iff f(n) = \sum_{0\le k\le n} \sigma(k) g(n-k).$$
4. Encontre o polinômio das torres para os seguintes tabuleiros:



5. Um par de dados são lançados 6 vezes. Suponha que nenhum dos pares ordenados $(1,1)$, $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,6)$, $(4,2)$, $(4,4)$, $(5,1)$ e $(5,5)$ ocorreu como resultado dos lançamentos. Qual é a probabilidade de que todos os 6 valores $(1,\dots,6)$ tenham ocorrido em ambos os dados?
6. Construa uma função geradora para $\langle a_0, a_1, \dots, a_k, \dots \rangle$, onde a_k é número de soluções inteiras das equações:
(a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = k$, $0 \le e_i \le 4$;
(b) $e_1 + e_2 + e_3 = k$, $0 < e_i < 4$;
(c) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$, $2 \le e_i \le 8$, e_1 par e e_2 ímpar;

(d) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$, $0 \leq e_i$;
(e) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$, $0 < e_i$, e_2, e_4 ímpar, $e_4 \leq 3$.

7. Por que $(1+x+x^2+\cdots+x^k)^4$ não é a função geradora para $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \rangle$, onde a_k é o número de maneiras de selecionarmos, com repetição, k objetos entre quatro tipos de objetos. Qual é a função geradora correta?
8. Por que $(1+x+x^2+x^3+x^4)^k$ não é a função geradora para $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \rangle$, onde a_k é o número de maneiras de distribuirmos k balas de banana entre k crianças com nenhuma criança recebendo mais do que quatro balas.

Referências

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1989.