MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

LISTA DE EXERCÍCIOS 4

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até as 17:00 do dia 7 de abril na secretaria do Departamento de Computação (sala 256 do Bloco A).

2. Exercícios

1. ([1], exercício 1.5 p. 17) Um digrama de Venn com três circunferências intersectantes é freqüentemente usado para ilustrar as oito possiveis interseções de três conjuntos dados. As dezesseis possibilidades das intersecões de quatro conjuntos podem ser ilustradas através de circunferências intersectantes?
2. Qual é o número de soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

   tal que:
   (a) $0 \le x_i \le 10$?
   (b) $-10 \le x_i \le 20$?
   (c) $0 \le x_i$, $x_1 \le 5$, $x_3 \le 15$, $x_4 \le 21$?
3. Existem quantos arranjos de $1, 2, 3, \ldots, n$ onde somente os números ímpares devem estar desarranjados (os números pares podem aparecer na suas próprias posições)?
4. Prove a identidade

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le k < n; \\ (-1)^n n! & \text{se } k = n. \end{cases}$$

   [Sugestão: Seja $X := \{1, 2, \ldots, k\}$ e $Y := \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. O número de funções sobrejetoras de X em Y é, obviamente

$$\begin{aligned} 0 &\text{ se } k < n, \\ n! &\text{ se } k = n. \end{aligned}$$

   Por outro lado seja U o conjunto de todas as funções de X em Y e seja A_i o conjunto das funções de X em $Y - y_i$. Conte o número de funções de X em Y que são sobrejetoras.]

5. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjunto de um conjunto finito U e seja N_m o número de elementos de U que pertencem a exatamente m dos subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Mostre que

$$N_m = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} + \cdots +$$
$$+ \cdots + (-1)^{k-m}\binom{k}{m} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{m} S_n.$$

[Sugestão: a fórmula para N_m pode ser provada de maneira análoga à prova da fórmula de Inclusão e Exclusão. A propósito, não esqueça que

$$\binom{r}{k}\binom{k}{m} = \binom{r}{m}\binom{r-m}{k-m}.]$$

6. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de um espaço de probabilidades (Ω, Pr). Mostre (ou argumente) que a probabilidade de que exatamente m desses eventos ocorram é

$$\sum_{i=m}^{n} (-1)^{m+i} \binom{i}{m} \sigma_i.$$

7. Quantos inteiros positivos menores ou iguais a 420 são relativamente primos com 420?

8. (Teorema de Euler, cf. [1], p. 133 e exercício 4.32 p. 147) Sejam n e m inteiros relativamente primos (i.e. $n \perp m$). Mostre que

$$n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

[O caso particular onde m é substituído por um primo p é conhecido como Teorema de Fermat.]

Referências

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1989.