MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até as 17:00 do dia 24 de março na secretaria do Departamento de Computação (sala 256 do Bloco A).

2. Exercícios

1. ([1], exercício 5.2) Seja n um inteiro positivo. Para que valores de k o valor de $\binom{n}{k}$ é máximo? Prove a sua resposta.
2. ([1], exercício 5.5) Seja p um número primo. Mostre que
$$\binom{p}{k} \mod p = 0 \quad \text{para} \quad 0 < k < p.$$
O que isso implica sobre o coeficiente binomial $\binom{p-1}{k}$?
3. Verifique as seguintes identidades (m, n e r são inteiros não negativos):
(a) $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$;
(b) $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{r+k} = \binom{m+n}{m+r}$.
4. Através da escolha de um valor apropriado para x na expansão binomial (ou em uma de suas derivadas) encontre uma fórmula fechada para:
(a) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;
(b) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$;
(c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$;
(d) $\sum_{k=1}^{n} k3^k \binom{n}{k}$;
(e) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \; k\binom{n}{k}$;
(f) $\sum_{k=0}^{n} (1/(k+1))\binom{n}{k}$;
(g) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k}$.
5. Mostre que
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \binom{n+k-1}{k}.$$
6. (a) Considere uma fila com $2n$ pessoas em um caixa de um banco. Suponha que n dessas pessoas devem receber 1 real no caixa e n dessas pessoas devem pagar um real. Mostre que o número de arranjos no qual o caixa nunca fica em débito (i.e., a cada momento o número de pessoas que já pagou 1 real e tão grande quanto o

número de pessoas que já recebeu 1 real) é igual a

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

[Sugestão: Use um argumento de simetria em um modelo do tipo "block-walking" para demonstrar que existe uma bijeção entre as seqüências onde em algum momento o caixa ficou pelo menos 1 real em débito e todas as seqüências de $2n$ pessoas em que $n+1$ pessoas devem receber 1 real.]

(b) Repita o item (a) com a seguinte restrição: Se a primeira pessoa paga 1 real, quantas seqüências de pessoas existem onde o caixa tem sempre uma quantidade positiva de dinheiro até a última pessoa que esta na fila (que recebe 1 real)?

Referências

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1989.