MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até as 17:00 do dia 14 de março na secretaria do Departamento de Computação (sala 256 do Bloco A).

2. Exercícios

1. (The Birthday Paradox Problem) Qual é a probabilidade de 2 (ou mais) pessoas em um grupo de 25 pessoas fazerem aniversário no mesmo dia?
2. Se n objetos distintos são distribuídos aleatoriamente entre n caixas distintas, qual é a probabilidade de que:
   (a) Nenhuma caixa fique vazia?
   (b) Exatamente uma caixa fique vazia?
   (c) Exatamente duas caixas fiquem vazias?
3. Quantos números entre 0 e 10000 tem a soma dos dígitos:
   (a) Igual a 7?
   (b) Menor ou igual a 7?
   (c) Igual a 13?
4. Para qual inteiro positivo n as seguintes equações

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} = n \quad \text{e} \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_{64} = n$$

   tem o mesmo número de soluções inteiras positivas?
5. Considere o seguinte segmento de programa, onde i, j, k, n e *cont* são variáveis inteiras.

$cont := 0$;
for $i := 1$ **to** n **do**
  for $j := 1$ **to** i **do**
    for $k := 1$ **to** j **do**
      $cont := cont + 1$;

   Quantas vezes o comando $cont := cont + 1$ será executado? Usando esse resultado obtenha uma formula fechada para

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

   (Sugestão: use o modelo de seleção-com-repetição.)

6. (a) Usando idéias do exercício anterior mostre a seguinte igualdade

$$\binom{n+3}{4} = \sum_{i=1}^{n} \binom{i+2}{3}.$$

   (b) Usando o resultado da parte (a) obtenha uma formula fechada para

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

7. Quantas maneiras existem de distribuirmos r bolas idênticas em n caixas distintas com as primeiras m caixas contendo coletivamente pelo menos s bolas?
8. Use argumentos combinatórios para mostra que:
   (a) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$;
   (b) $(n-r)\binom{n+r-1}{r}\binom{n}{r} = n\binom{n+r-1}{2r}\binom{2r}{r}$.