MAC 310 MATEMÁTICA CONCRETA

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

1. Instruções

Esta lista de exercícios deverá ser entregue até as 17:00 do dia 7 de março na secretaria do Departamento de Computação (sala 256 do Bloco A).

2. Exercícios

1. Se $S_1, \dots, S_m$ são conjuntos finitos, o *conjunto produto* $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$ é definido como sendo o conjunto de todas as m-uplas $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ com $x_i \in S_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Use o princípio da indução finita para provar que
$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = |S_1| \times |S_2| \times \dots \times |S_m|.$$
2. Mostre que se S é um conjunto de pessoas ($|S| \geq 2$) então existem duas pessoas em S com o mesmo número de amigos.
3. Mostre que num conjunto de seis pessoas existem pelo menos 3 mutuamente amigas ou 3 mutuamente estranhas. (Note que isso não é válido para um conjunto de 5 pessoas.)
4. Quantos números de 4 digitos podem ser formados com os digitos 1, 2, 3, 4, 5 (com possivel repetição) que são divisiveis por 4?
5. Considere 50 cartas numeradas de 1 a 50. Duas cartas diferentes são sorteadas aleatóriamente. Qual é a probabilidade que um número seja o dobro do outro?
6. Se uma moeda e jogada 10 vezes qual é a probabilidade de obtermos 8 ou mais caras?
7. Mostre que se m e n são relativamente primos (i.e., $m \perp n$) então $n - m$ e n também são relativamente primos. Deduza que $\varphi(n)$ é par para todo $n \geq 3$. (Lembre-se que φ é a função de Euler, i.e. $\varphi(m)$ é o número de inteiros em $\{0, \dots, m-1\}$ relativamente primos com m (cf. [1], p. 133).)
8. Mostre que se p é primo e n é um inteiro positivo, então um inteiro m, $1 \leq m \leq p^n$ não é relativamente primo com p^n se e somente se m é um multiplo de p. Deduza que $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

Referências

1. Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete matematic: A foundation for computer science*, Addison-Wesley, 1989.