Melhores momentos

AULAS PASSADAS

Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema Π é uma algoritmo polinomial ALG que recebe

uma instância I de Π e um objeto C, tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante c e

$$\mathrm{ALG}(I, C) = \mathrm{SIM} \Leftrightarrow \Pi(I) = \mathrm{SIM}$$

A constante c depende apenas do problema!

Verificador polinomial para NÃO

Um verificador polinomial para a resposta NÃO a um problema Π é uma algoritmo polinomial ALG que recebe

uma instância I de Π e um objeto C, tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^c)$ para alguma constante c e

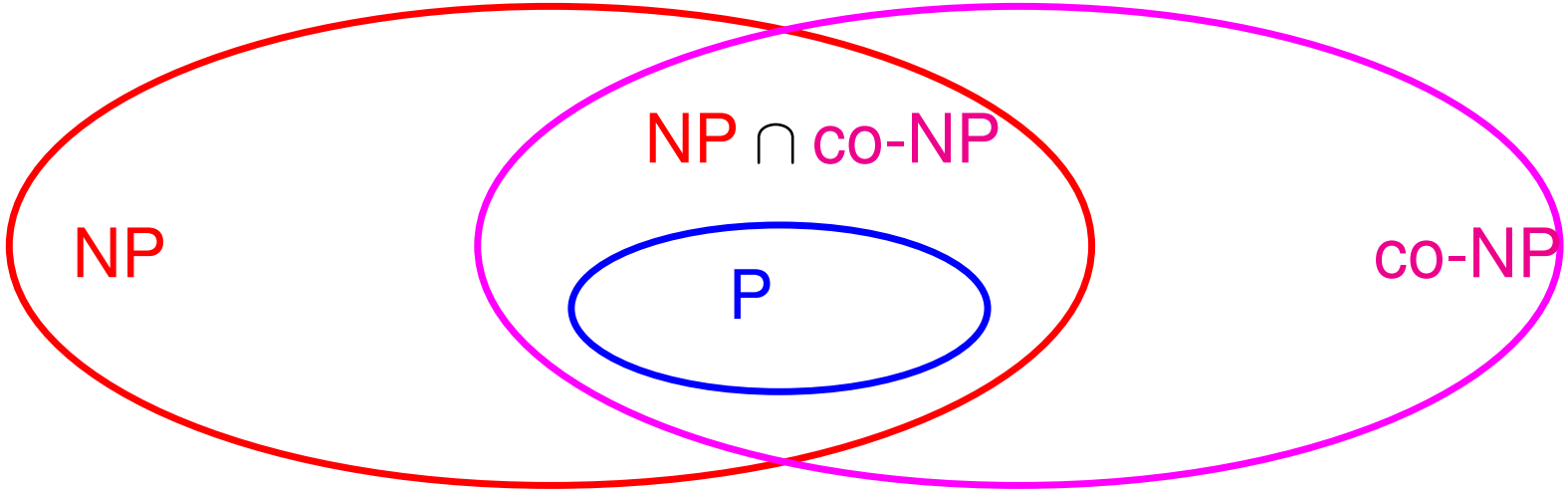
$$\mathsf{ALG}(I, C) = \mathsf{SIM} \Leftrightarrow \Pi(I) = \mathsf{NÃO}$$

A constante c depende apenas do problema!

P, NP e co-NP

Classe P	formada por problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial
Classe NP	formada por problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM
Classe co-NP	formada por problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta NÃO

P, NP e co-NP



$P \neq NP$?

$NP \cap \text{co-}NP \neq P$?

$NP \neq \text{co-}NP$?

Redução polinomial

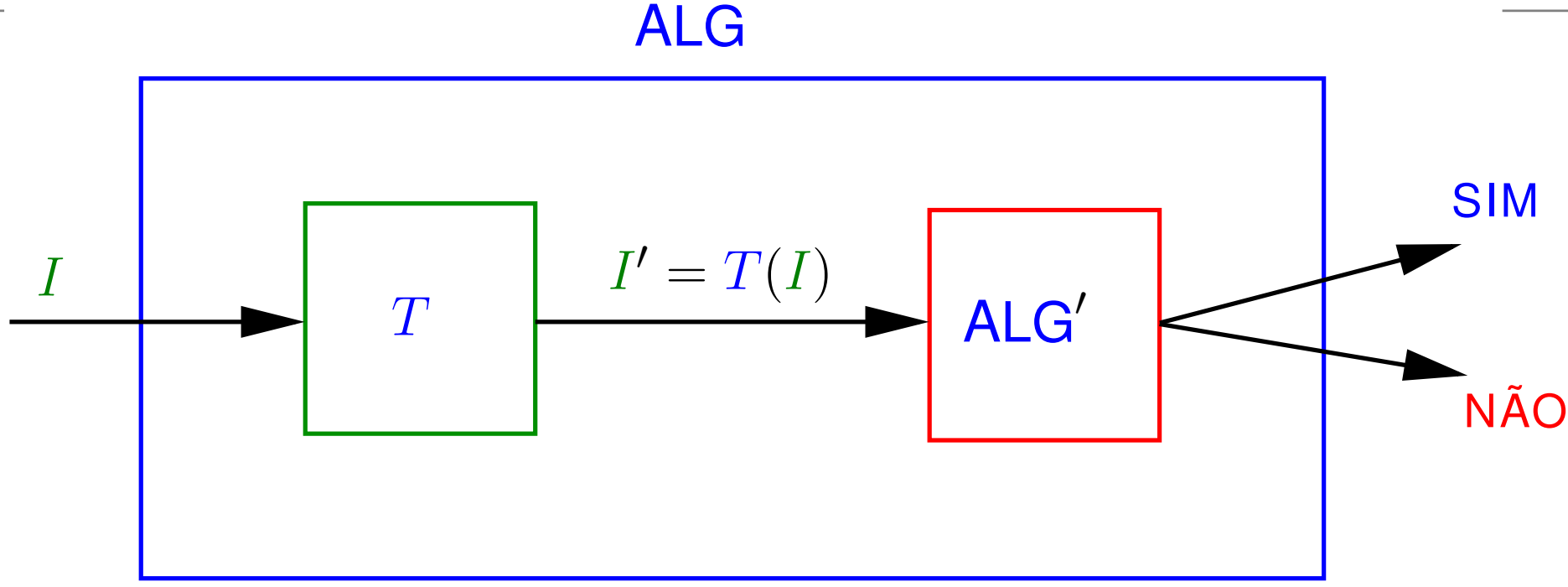
Permite comparar o "grau de complexidade" de problemas diferentes.

Redução (polinomial) de um problema Π a um problema Π' é um algoritmo ALG que resolve Π usando uma subrotina hipotética ALG$'$ que resolve Π', de tal forma que, se ALG$'$ é um algoritmo polinomial, então ALG é um algoritmo polinomial.

$\Pi \leq_P \Pi' =$ existe uma redução de Π a Π'.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π' está em P, então Π está em P.

Esquema comum de reduções



Faz apenas uma chamada ao algoritmo ALG′.

T transforma uma instância I de Π em uma instância $I' = T(I)$ de Π' tal que

$$\Pi(I) = \text{SIM} \text{ se e somente se } \Pi'(I') = \text{SIM}$$

T é uma espécie de “filtro” ou “compilador”.

Reduções

Satisfatibilidade $\leq_P$ Sistemas lineares 0-1

Ciclo hamiltoniano $\leq_P$ Caminho hamiltoniano entre u e v

Caminho hamiltoniano entre u e v $\leq_P$ Caminho hamiltoniano

Caminho hamiltoniano $\leq_P$ Satisfatibilidade

Hoje:

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique

AULA 26

Mais complexidade computacional ainda

CLR 36 ou CLRS 34

3-Satisfatibilidade

Problema: Dada um fórmula booleana ϕ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em que cada claúsula tem exatamente 3 literais, existe uma atribuição

$$t : \{x_1, \ldots, x_n\} \rightarrow \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$$

que torna ϕ verdadeira?

Exemplo:

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$$

Um literal é uma variável x ou sua negação $\neg x$.

Exemplo 4

Satisfatibilidade $\leq_P$ 3-Satisfatibilidade

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma fórmula booleana ϕ' com exatamente 3 literais por claúsula tais que

$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow \phi' \text{ é satisfatível.}$$

A transformação consiste em substituir cada claúsula de ϕ por uma coleção de claúsulas com exatamente 3 literais cada e equivalente a ϕ.

Exemplo 4 (cont.)

Seja $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ uma claúsula de ϕ.

Caso 1. $k = 1$

Troque (l_1) por

$$(l_1 \vee y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee y_2)\,(l_1 \vee y_1 \vee \neg y_2)\,(l_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

onde y_1 e y_2 são variáveis novas.

Caso 2. $k = 2$

Troque $(l_1 \vee l_2)$ por $(l_1 \vee l_2 \vee y)\,(l_1 \vee l_2 \vee \neg y)$. onde y é uma variáveis nova.

Caso 3. $k = 3$

Mantenha $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$.

Exemplo 4 (cont.)

Caso 4. $k > 3$

Troque $(l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$ por

$$(l_1 \vee l_2 \vee y_1)$$
$$(\neg y_1 \vee l_3 \vee y_2)\,(\neg y_2 \vee l_4 \vee y_3)\,(\neg y_3 \vee l_5 \vee y_4)\,\ldots$$
$$(\neg y_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

onde $y_1, y_2, \ldots, y_{k-3}$ são variáveis novas

Verifique que ϕ é satisfátivel $\Leftrightarrow$ nova fórmula é satisfatível.

O tamanho da nova fórmula é $\mathrm{O}(m)$, onde m é o número de literais que ocorrem em ϕ (contando-se as repetições).

Problemas completos em NP

Um problema Π em NP é NP-completo se cada problema em NP pode ser reduzido a Π.

Teorema de S. Cook e L.A. Levin: Satisfatibilidade é NP-completo.

Se $\Pi \leq_P \Pi'$ e Π é NP-completo, então Π' é NP-completo.

Existe um algoritmo polinomial para um problema NP-completo se e somente se P $=$ NP.

Demonstração de NP-completude

Para demonstrar que um problema Π' é NP-completo podemos utilizar o Teorema de Cook e Levin.

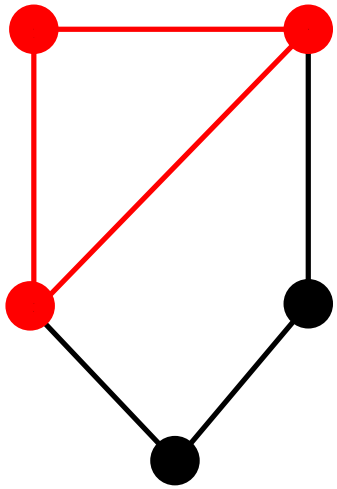
Para isto devemos:

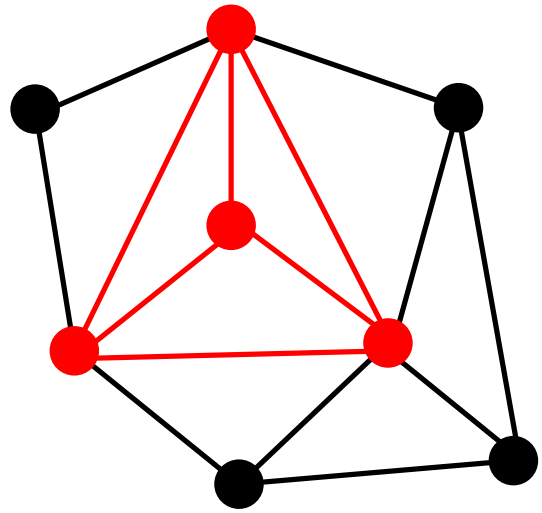
- Demonstrar que Π' está em NP.
- Escolher um problema Π sabidamente NP-completo.
- Demonstrar que $\Pi \leq_P \Pi'$.

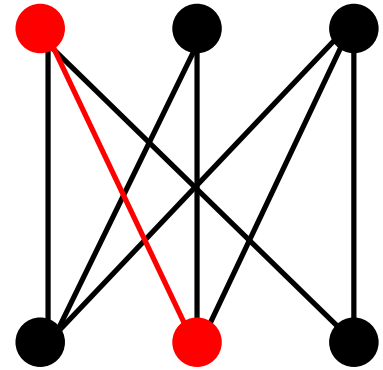
Clique

Problema: Dado um grafo G e um inteiro k, G possui um clique com $\geq k$ vértices?

Exemplos:







clique com k vértices $=$ subgrafo completo com k vértices

Clique é NP-completo

Clique está em NP e 3-Satisfatibilidade $\leq_P$ Clique.

Descreveremos um algoritmo polinomial T que recebe um fórmula booleana ϕ com k claúsulas e exatamente 3 literais por claúsula e devolve um grafo G tais que

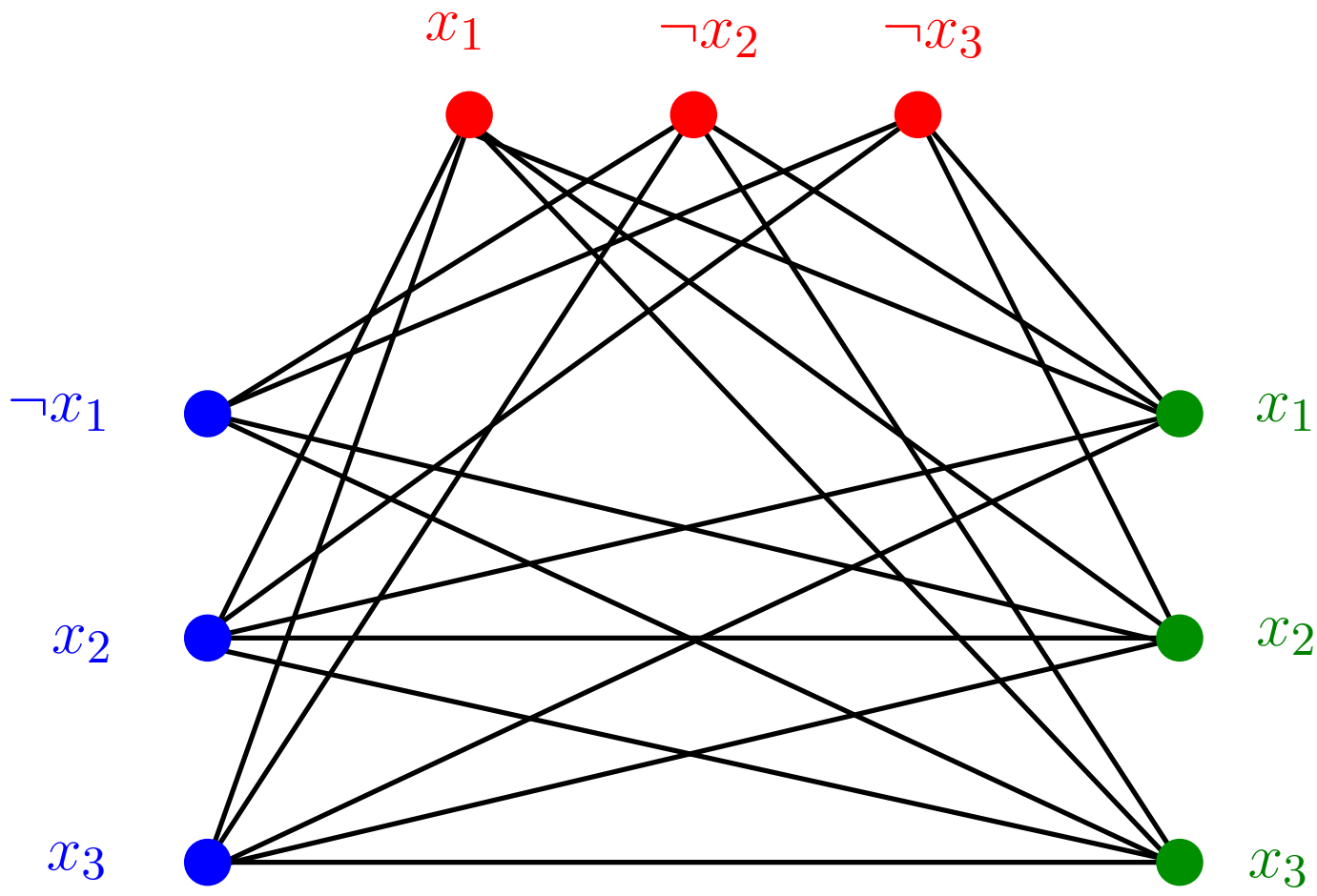
$$\phi \text{ é satisfatível} \Leftrightarrow G \text{ possui um clique} \geq k.$$

Para cada claúsula o grafo G terá três vértices, um correspondente a cada literal da cláusula. Logo, G terá $3k$ vértices. Teremos uma aresta ligando vértices u e v se

- u e v são vértices que correspondem a literais em diferentes claúsula; e
- se u corresponde a um literal x então v não corresponde ao literal $\neg x$.

Clique é NP-completo (cont.)

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



Problemas NP-difíceis

Um problema Π, não necessariamente em NP, é NP-díficil se a existência de um algoritmo polinomial para Π implica em P $=$ NP.

Todo problema NP-completo é NP-difícil.

Exemplos:

- Encontrar um ciclo hamiltoniano é NP-difícil, mas não é NP-completo, pois não é um problema de decisão e portanto não está em NP.
- Satisfabilidade é NP-completo e NP-difícil.

Mais problemas NP-difíceis

Os seguintes problema são NP-difíceis:

- mochila booleana
- caminho máximo
- caminho hamiltoniano
- escalonamento de tarefas
- subset-sum
- clique máximo
- cobertura por vértices
- sistemas 0-1

e mais um montão deles . . .

Exercícios

Exercício 25.A
Suponha que os algoritmos ALG e ALG′ transformam cadeias de caracteres em outras cadeias de caracteres. O algoritmo ALG consome $\mathrm{O}(n^2)$ unidades de tempo e o algoritmo ALG′ consome $\mathrm{O}(n^4)$ unidades de tempo, onde n é o número de caracteres da cadeia de entrada. Considere agora o algoritmo ALGALG′ que consiste na composição de ALG e ALG′, com ALG′ recebendo como entrada a saída de ALG. Qual o consumo de tempo de ALGALG′?

Exercício 25.B [CLRS 34.1-4]
O algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é polinomial? Justifique a sua resposta.

Exercício 25.C [CLRS 34.1-5]
Seja ALG um algoritmo que faz um número constante de chamadas a um algoritmo ALG′. Suponha que se o consumo de tempo de ALG′ é constante então o consumo de tempo de ALG é polinomial.

1. Mostre que se o consumo de tempo de ALG′ é polinomial então o consumo de tempo de ALG é polinomial.
2. Mostre que se o consumo de tempo de ALG′ é polinomial e ALG faz um número polinomial de chamadas a ALG′, então é possível que o consumo de tempo de ALG seja exponencial.

Mais exercícios

Exercício 25.D [CLRS 34.2-1]
Mostre que o problema de decidir se dois grafos dados são isomorfos está em NP.

Exercício 25.E [CLRS 34.2-2]
Mostre que um grafo bipartido com um número ímpar de vértices não é hamiltoniano ($=$ possui um ciclo hamiltoniano).

Exercício 25.F [CLRS 34.2-3]
Mostre que se o problema do Ciclo hamiltoniano está em P, então o problema de listar os vértices de um ciclo hamiltoniano, na ordem em que eles ocorrem no ciclo, pode ser resolvido em tempo polinomial.

Exercício 25.G [CLRS 34.2-5]
Mostre que qualquer problema em NP pode ser resolvido por um algoritmo de consumo de tempo $2^{O(n^c)}$, onde n é o tamanho da entrada e c é uma constante.

Exercício 25.H [CLRS 34.2-6]
Mostre que o problema do Caminho hamiltoniano está em NP.

Exercício 25.I [CLRS 34.2-7]
Mostre que o problema do caminho hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos orientado acíclicos.

Mais exercícios

Exercício 25.J [CLRS 34.2-8]
Uma fórmula booleana ϕ é uma tautologia se $t(\phi) = \text{VERDADE}$ para toda atribuição de $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$. Mostre que o problema de decidir se uma dada fórmula booleana é uma tautologia está em co-NP.

Exercício 25.K [CLRS 34.2-9]
Prove que P $\subseteq$ co-NP.

Exercício 25.L [CLRS 34.2-10]
Prove que se NP $\neq$ co-NP, então P $\neq$ NP.

Exercício 25.M [CLRS 34.2-11]
Se G é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então G^3 é o grafo que se obtém a partir de G ligando-se por uma aresta todos os pares de vértices que estão conectados em G por um caminho com no máximo três arestas. Mostre que G^3 é hamiltoniano.

Exercício 25.N [CLRS 34.3-2]
Mostre que se $\Pi_1 \leq_P \Pi_2$ e $\Pi_2 \leq_P \Pi_3$, então $\Pi_1 \leq_P \Pi_3$.

Mais exercícios

Exercício 25.O [CLRS 34.3-7]
Suponha que Π e Π' são problemas de decisão sobre o mesmo conjunto de instâncias e que $\Pi(I) = \text{SIM}$ se e somente se $\Pi'(I) = \text{NÃO}$. Mostre que Π é NP-completo se e somente se Π' é co-NP-completo.
(Um problema Π' é co-NP-completo se Π' está em co-NP e $\Pi \leq_P \Pi'$ para todo problema Π em co-NP.)

Exercício 25.P [CLRS 34.4-4]
Mostre que o problema de decidir se uma fórmula boolena é uma tautologia é co-NP-completo. (Dica: veja o exercício 25.O.)

Exercício 25.Q [CLRS 34.4-6]
Suponha que ALG$'$ é um algoritmo polinomial para Satisfatibilidade. Descreva um algoritmo polinomial ALG que recebe um fórmula booleana ϕ e devolve uma atribuição $t : \{\text{variáveis}\} \to \{\text{VERDADE}, \text{FALSO}\}$ tal que $t(\phi) = \text{VERDADE}$.

Exercício 25.Q [CLRS 34.5-3]
Prove que o problema Sistemas lineares 0-1 é NP-completo.

Exercício 25.R [CLRS 34.5-6]
Mostre que o problema C aminho hamiltoniano é NP-completo.

Mais um exercício

Exercício 25.S [CLRS 34.5-7]

Mostre que o problema de encontrar um ciclo de comprimento máximo é NP-completo.

Algoritmos de aproximação

CLRS 35

Transparências de Cristina Gomes Fernandes

MAC5727 Algoritmos de Aproximação

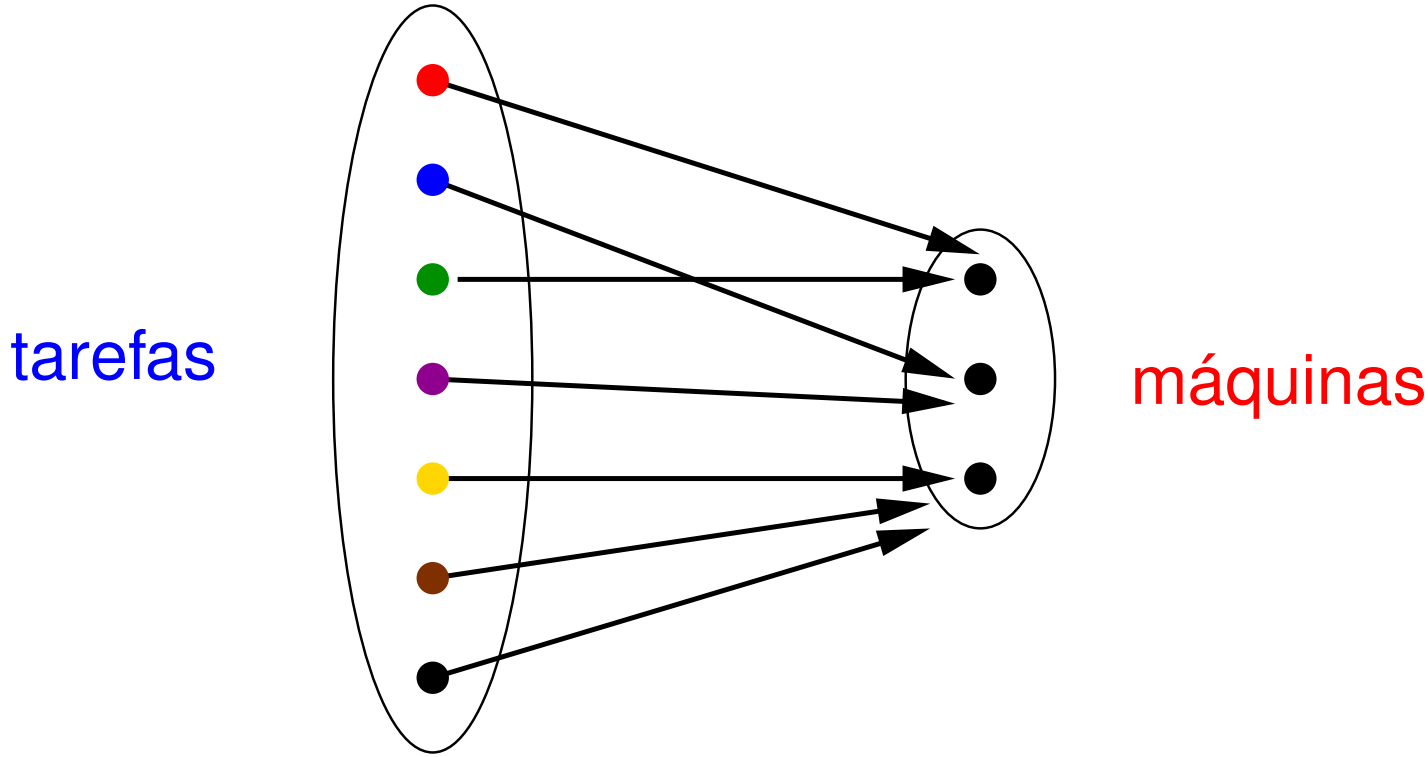
Escalonamento de máquinas idênticas

Dados: m máquinas

t tarefas

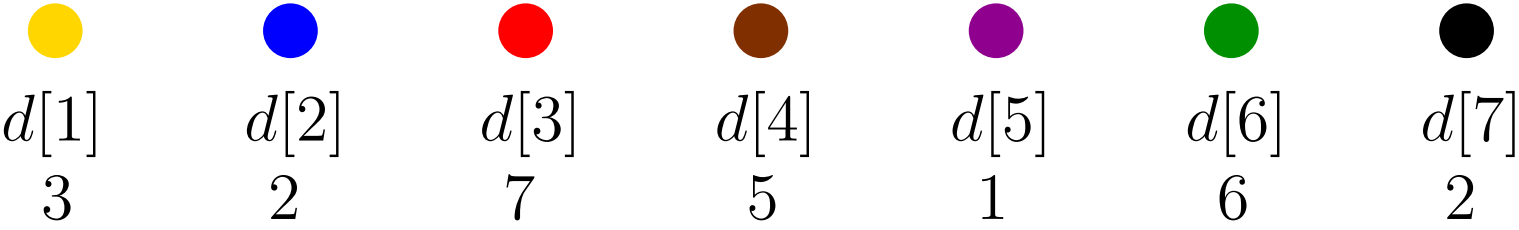
duração $d[i]$ da tarefa i $\quad (i = 1, \ldots, t)$

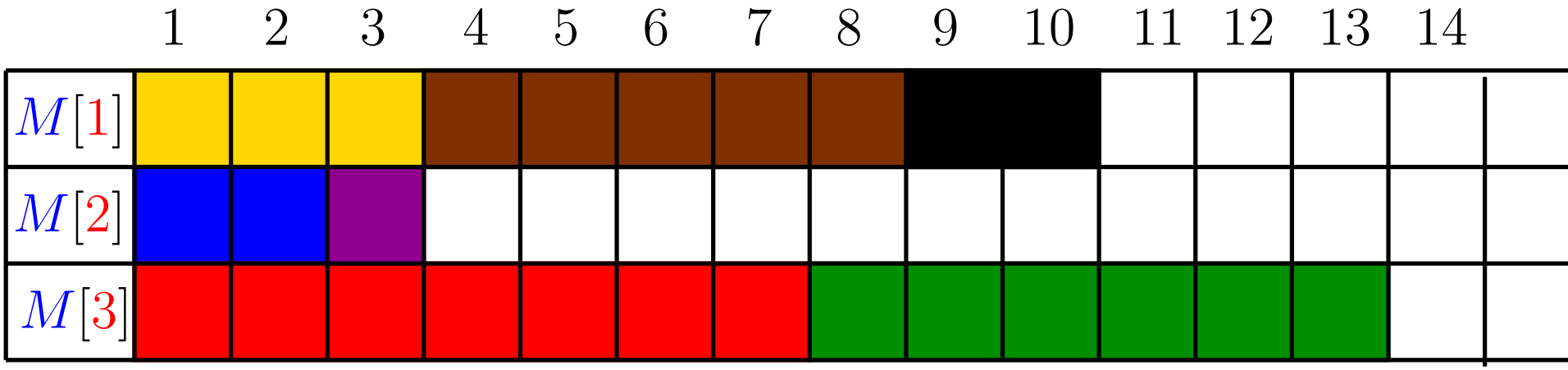
um escalonamento é uma partição $\{M[1], \ldots, M[m]\}$ de $\{1, \ldots, t\}$



Exemplo 1

$m = 3 \quad t = 7$

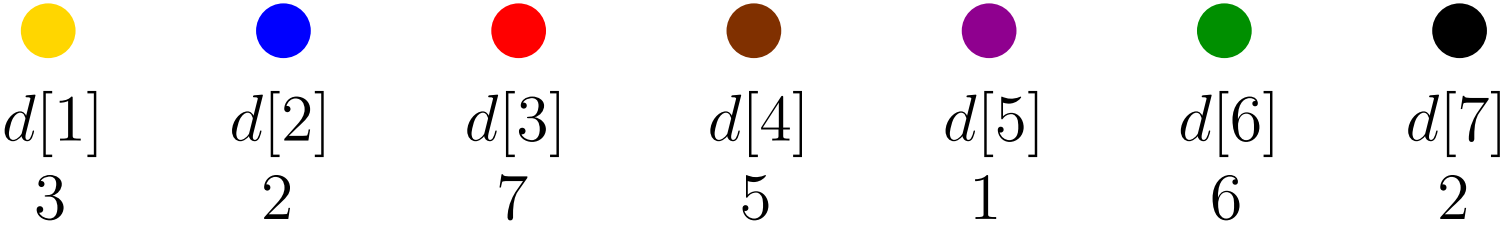


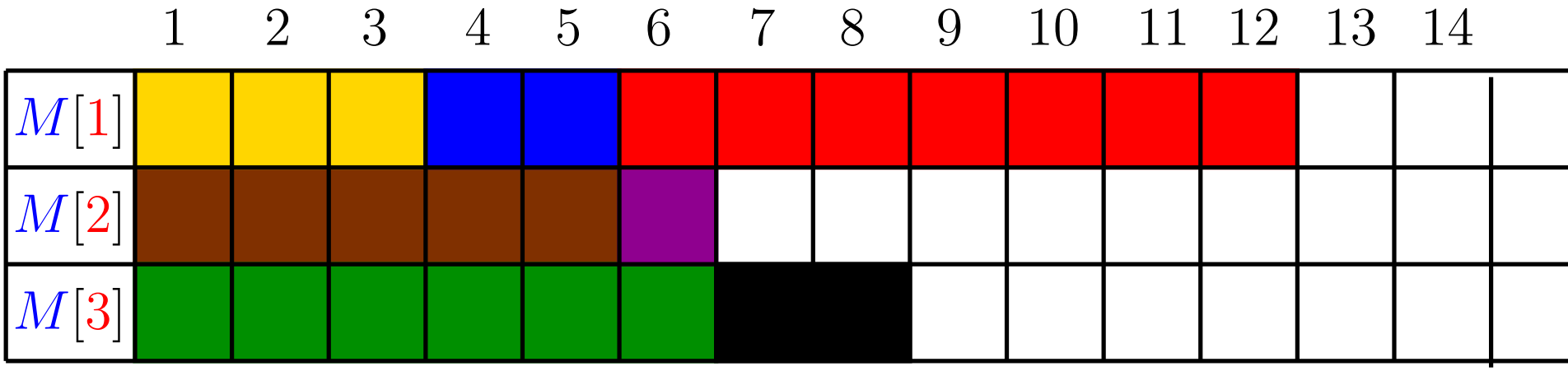


$\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão $= 13$

Exemplo 2

$m = 3 \quad t = 7$

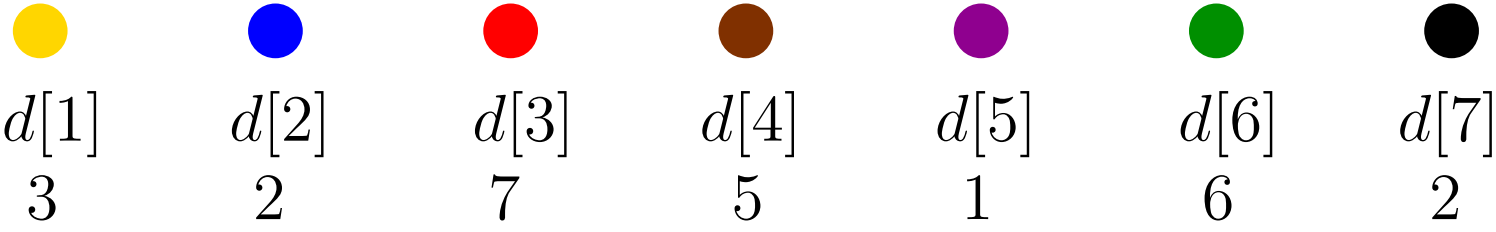


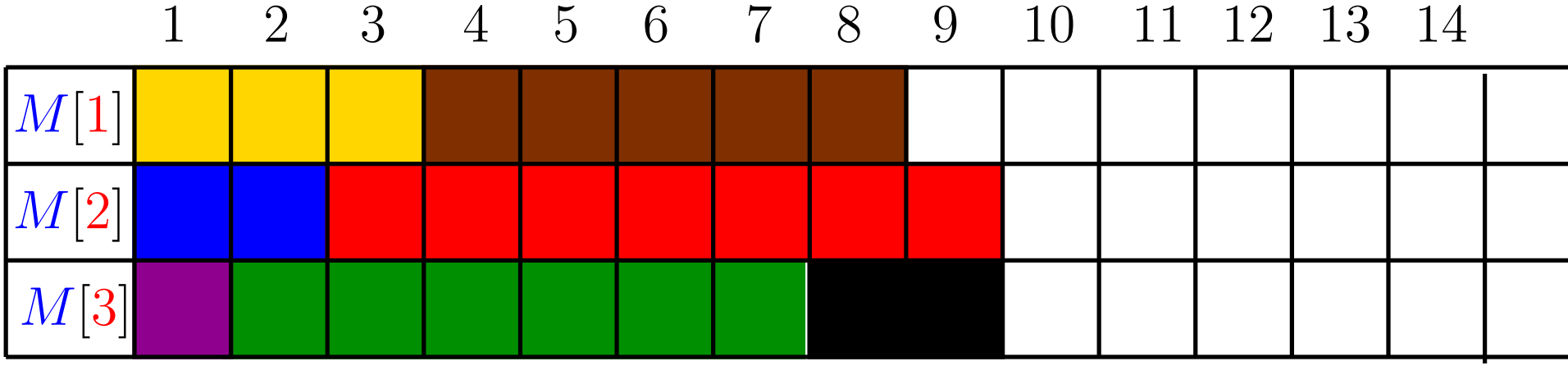


$\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão $= 12$

Problema

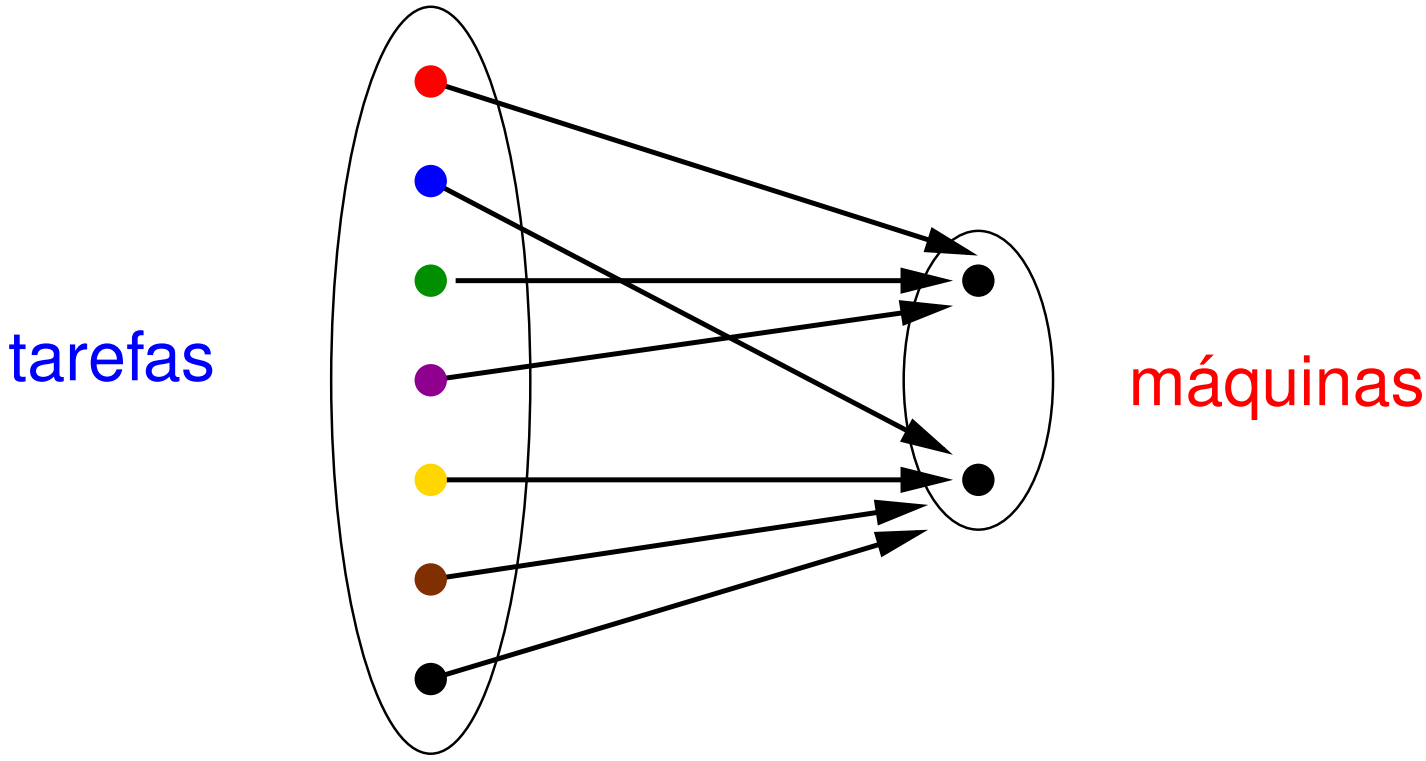
Encontrar um escalonamento com tempo de conclusão mínimo.





$\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6,7\}\} \Rightarrow$ Tempo de conclusão $= 9$

NP-difícil mesmo para $m = 2$



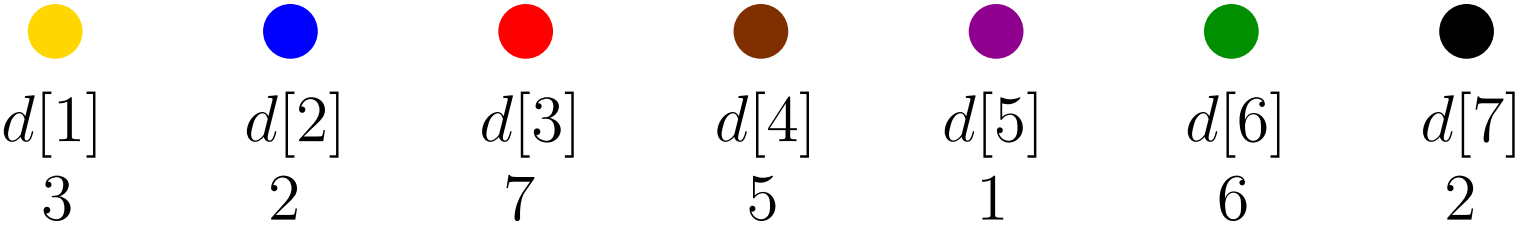
Algoritmo: testa todo $M[1] \subseteq \{1, \ldots, t\}$ e escolhe melhor

2^t subconjuntos $\Rightarrow$ exponencial

NP-difícil $\Rightarrow$ é improvável que exista algoritmo polinomial que resolva o problema (se exitir, P $=$ NP)

Algoritmo de Graham

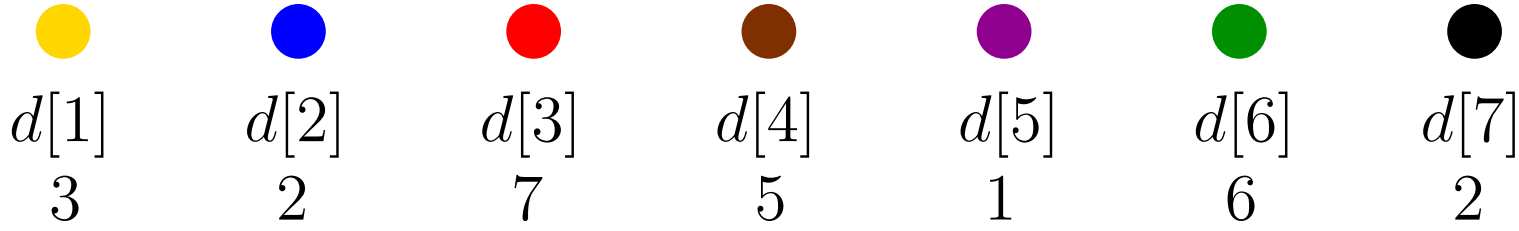
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

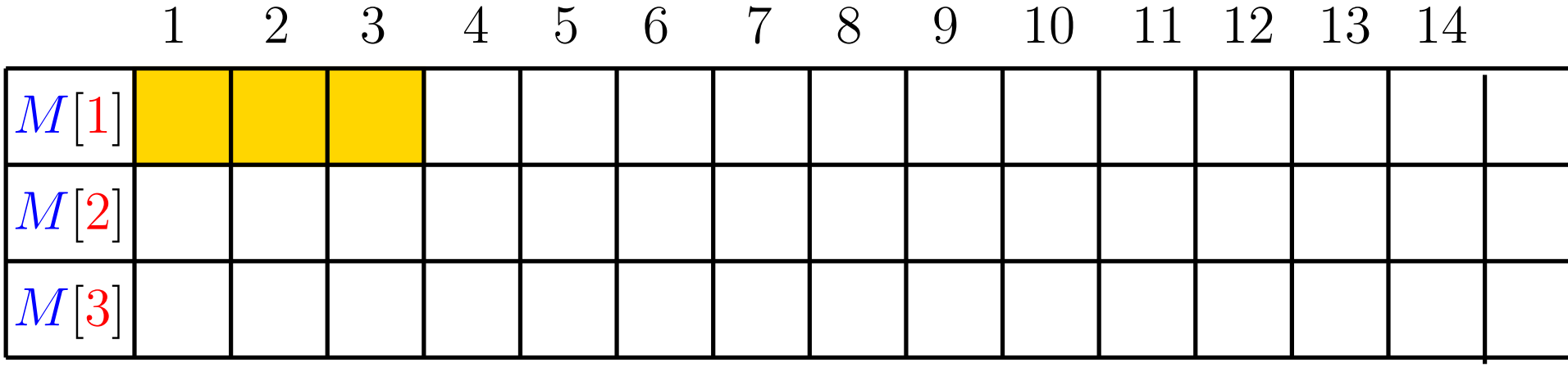


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
$M[1]$															
$M[2]$															
$M[3]$															

Algoritmo de Graham

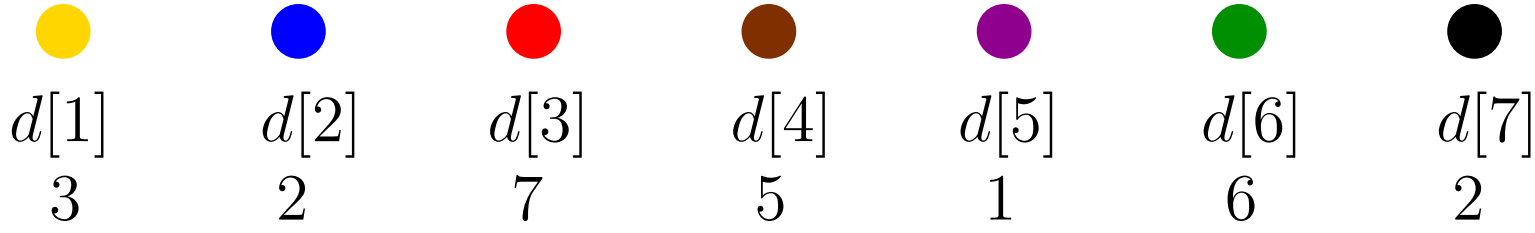
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

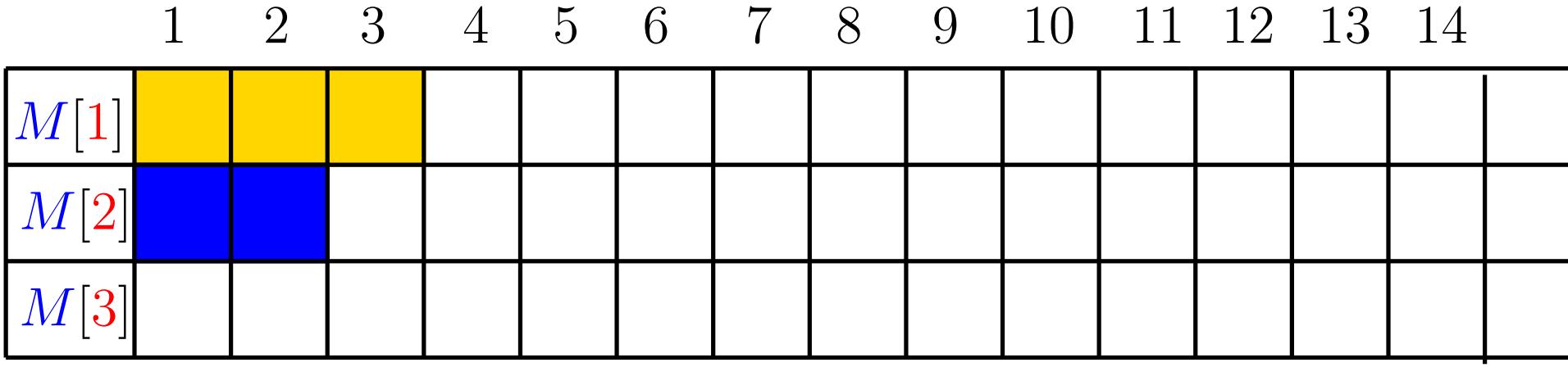




Algoritmo de Graham

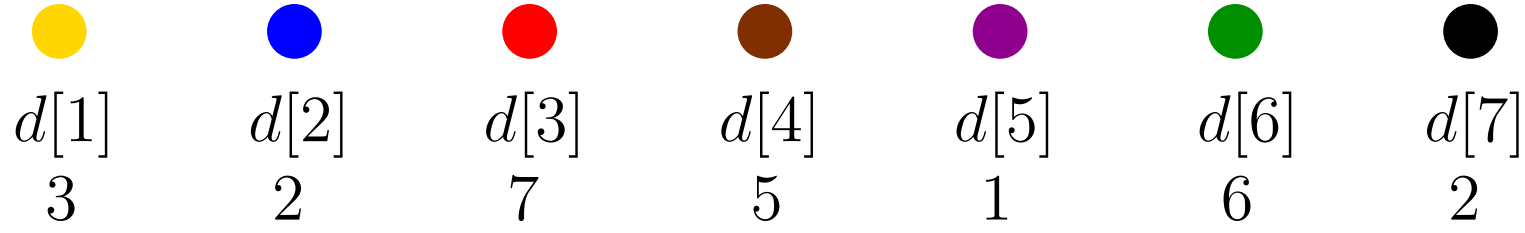
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

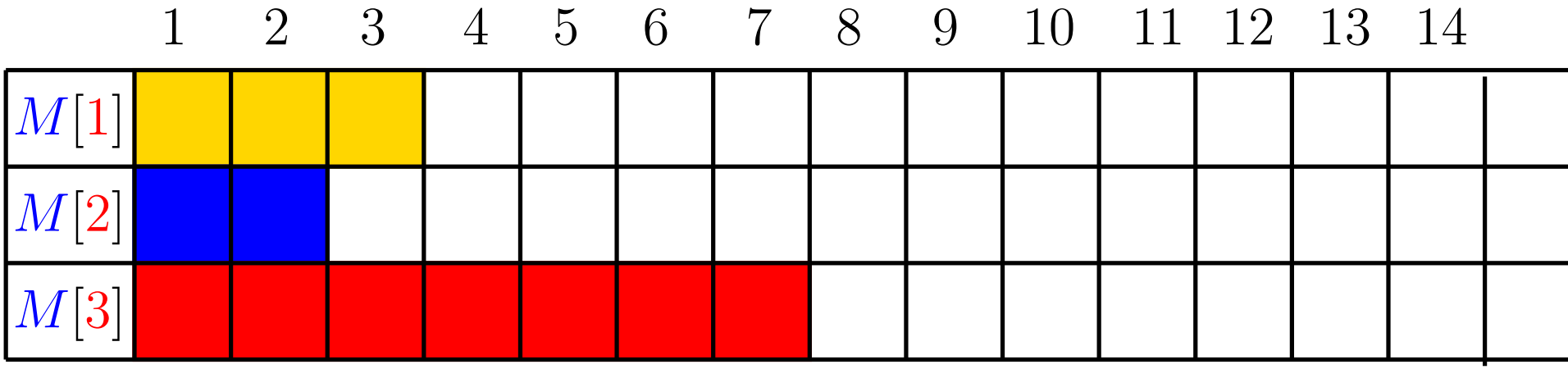




Algoritmo de Graham

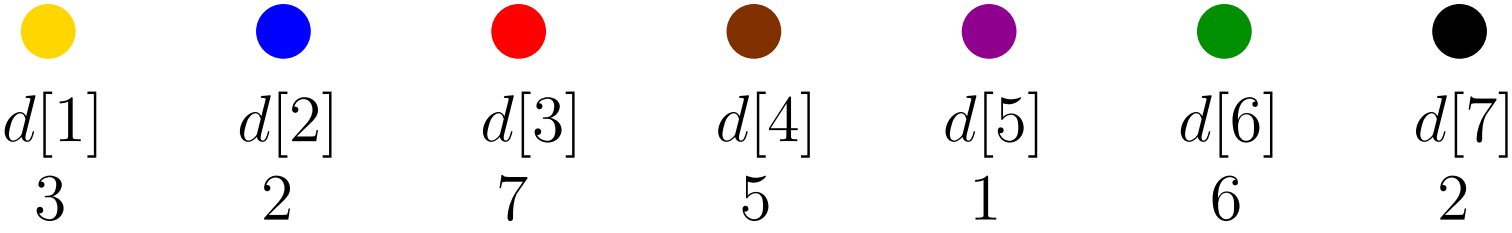
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

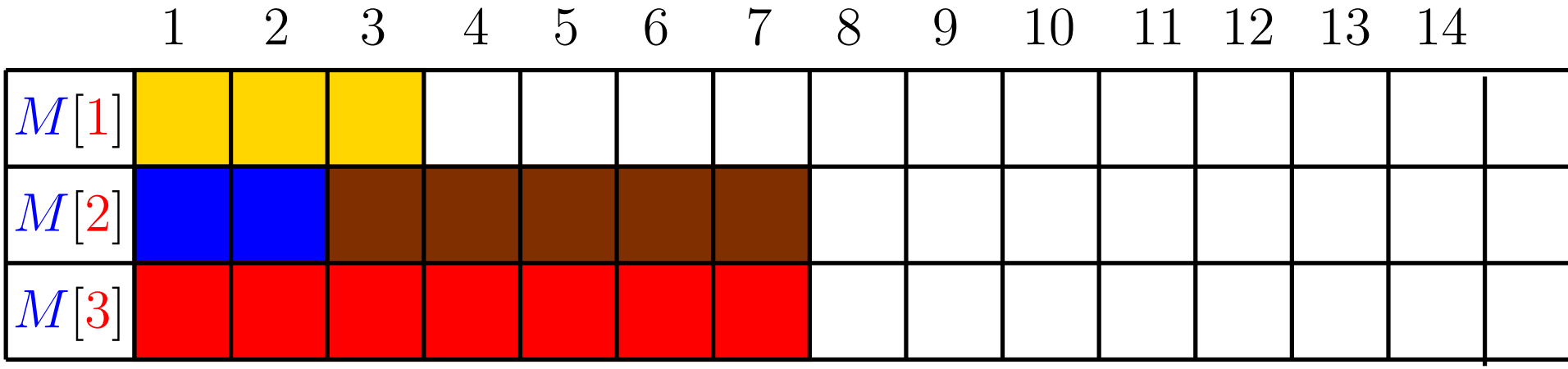




Algoritmo de Graham

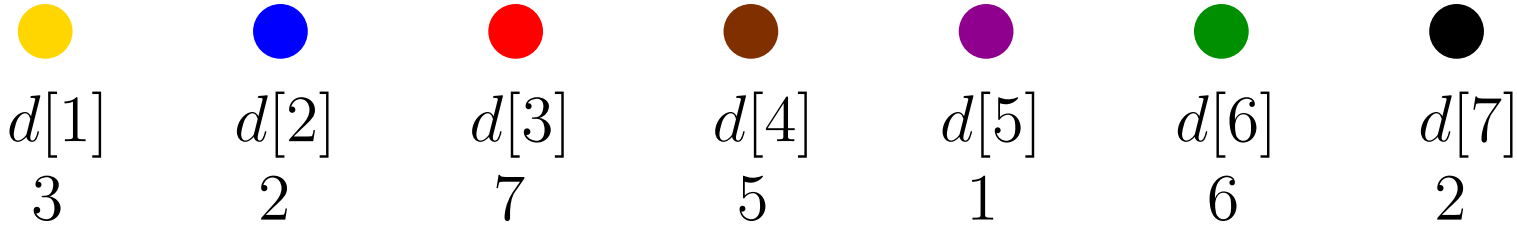
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

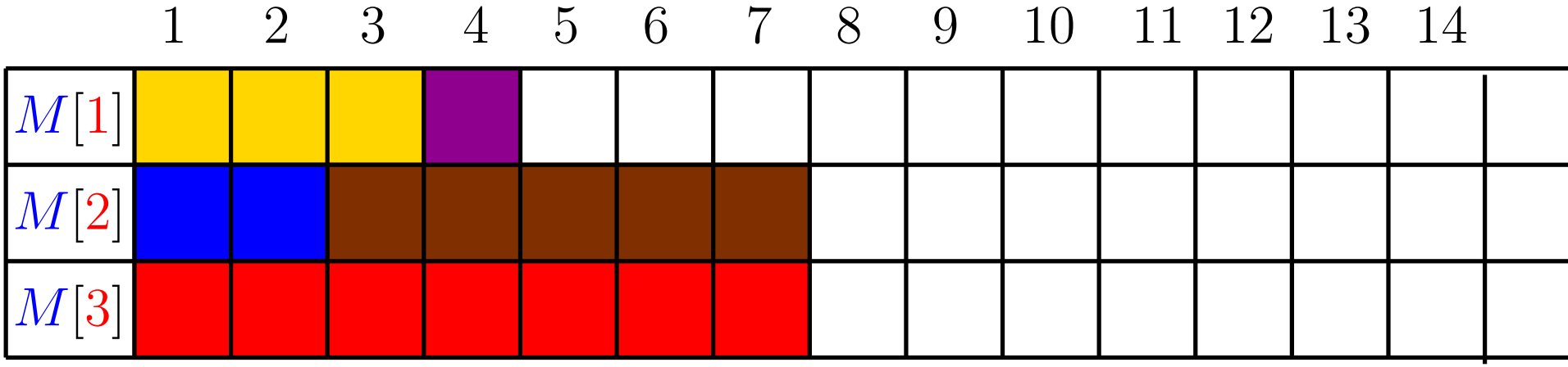




Algoritmo de Graham

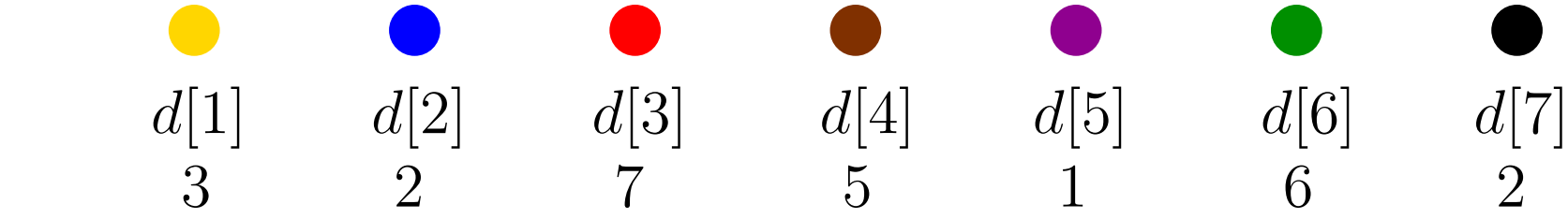
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

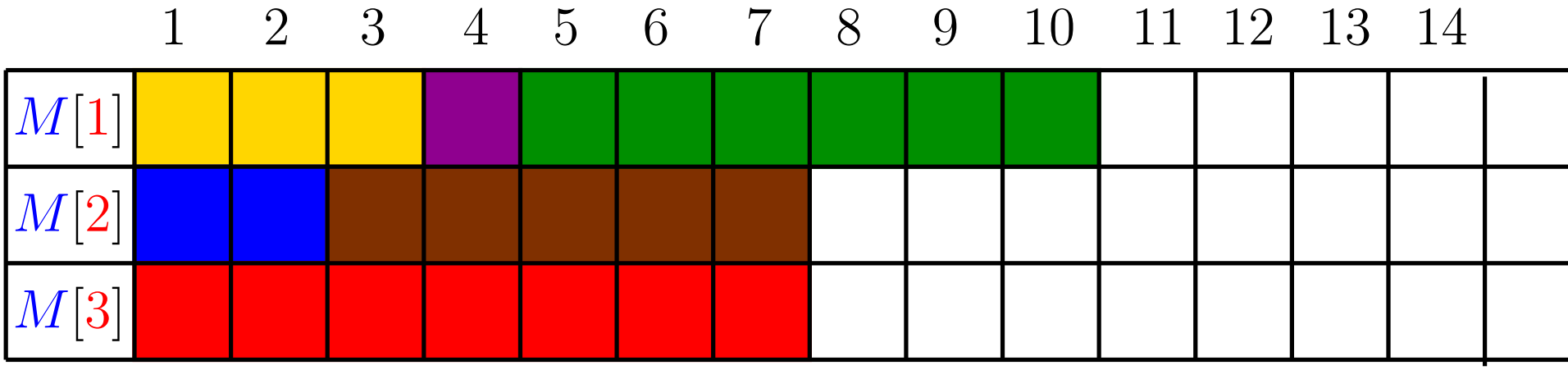




Algoritmo de Graham

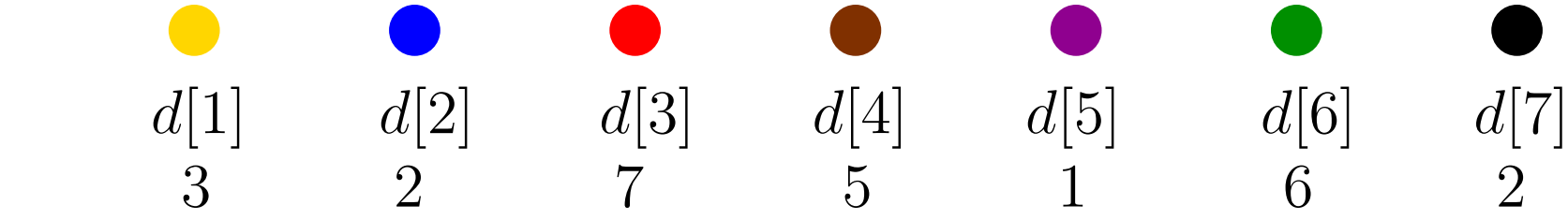
Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.

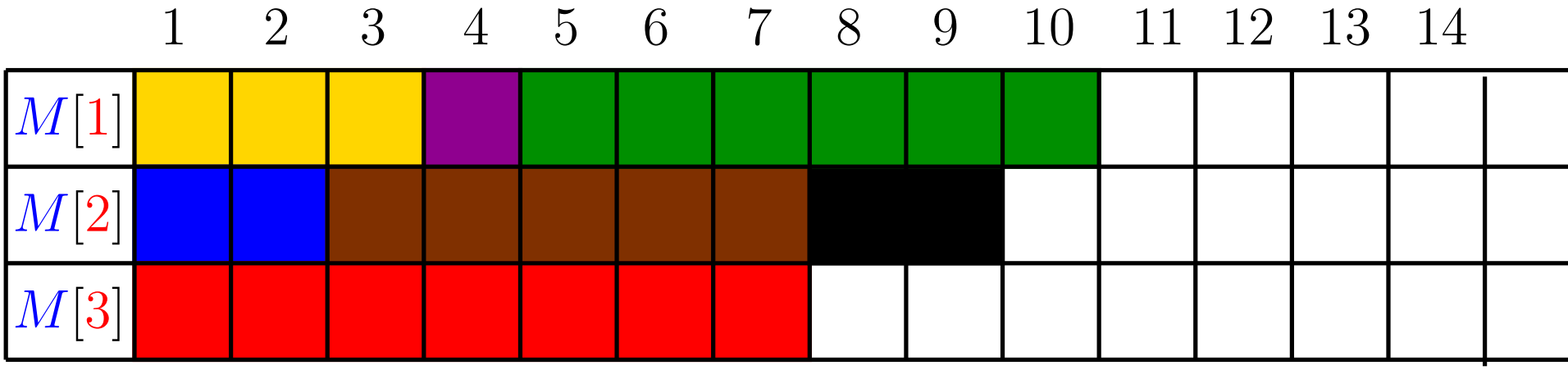




Algoritmo de Graham

Atribui, uma a uma, cada tarefa à máquina menos ocupada.





Escalonamento-Graham

Recebe números inteiros positivos m e t e um vetor $d[1\,..\,t]$ e devolve um escalomento de $\{1, \ldots, t\}$ em m máquinas.

ESCALONAMENTO-GRAHAM (m, t, d)

```
1   para j ← 1 até m faça
2       M[j] ← ∅
3       T[j] ← 0
4   para i ← 1 até t faça
5       seja k tal que T[k] é mínimo
6       M[k] ← M[k] ∪ {i}
7       T[k] ← T[k] + d[i]
8   devolva {M[1], ..., M[m]}
```

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(m)$
2	$\Theta(m)$
3	$\Theta(m)$
4	$\Theta(t)$
5	$\Theta(mt)$
6	$\Theta(t)$
7	$\Theta(t)$
8	$\Theta(t)$
total	$3\Theta(m) + \Theta(mt) + 3\Theta(t) = \Theta(mt)$

Escalonamento-Graham

Se utilizarmos uma fila com prioridades (min-heap) para representar as m máquinas onde a prioridade da máquina i é $T[i]$ teremos:

ESCALONAMENTO-GRAHAM (m, t, d)

1 **para** $j \leftarrow 1$ **até** m **faça**
2 $\quad M[j] \leftarrow \emptyset$
3 $\quad T[j] \leftarrow 0$
4 BUILD-MIN-HEAP (T, m)
5 **para** $i \leftarrow 1$ **até** t **faça**
6 $\quad k \leftarrow$ HEAP-MIN (T, m)
7 $\quad M[k] \leftarrow M[k] \cup \{i\}$
8 $\quad$ HEAP-INCREASE-KEY $(T, k, T[k] + d[i])$
9 **devolva** $\{M[1], \ldots, M[m]\}$

Consumo de tempo

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-4	$\Theta(m)$
5	$\Theta(t)$
6	$\Theta(t)$
7	$\Theta(t)$
8	$\mathrm{O}(t \lg m)$
9	$\Theta(t)$
total	$\Theta(m) + 4\Theta(t) + \mathrm{O}(t \lg m) = \mathrm{O}(m + t \lg m)$

O consumo de tempo do algoritmo ESCALONAMENTO-GRAHAM é $\mathrm{O}(m + t \lg m)$.

Delimitações para OPT

OPT = menor tempo de conclusão de um escalonamento

- Duração da tarefa mais longa:

$$\mathrm{OPT} \geq \max\{d[1], d[2], \ldots, d[t]\}$$

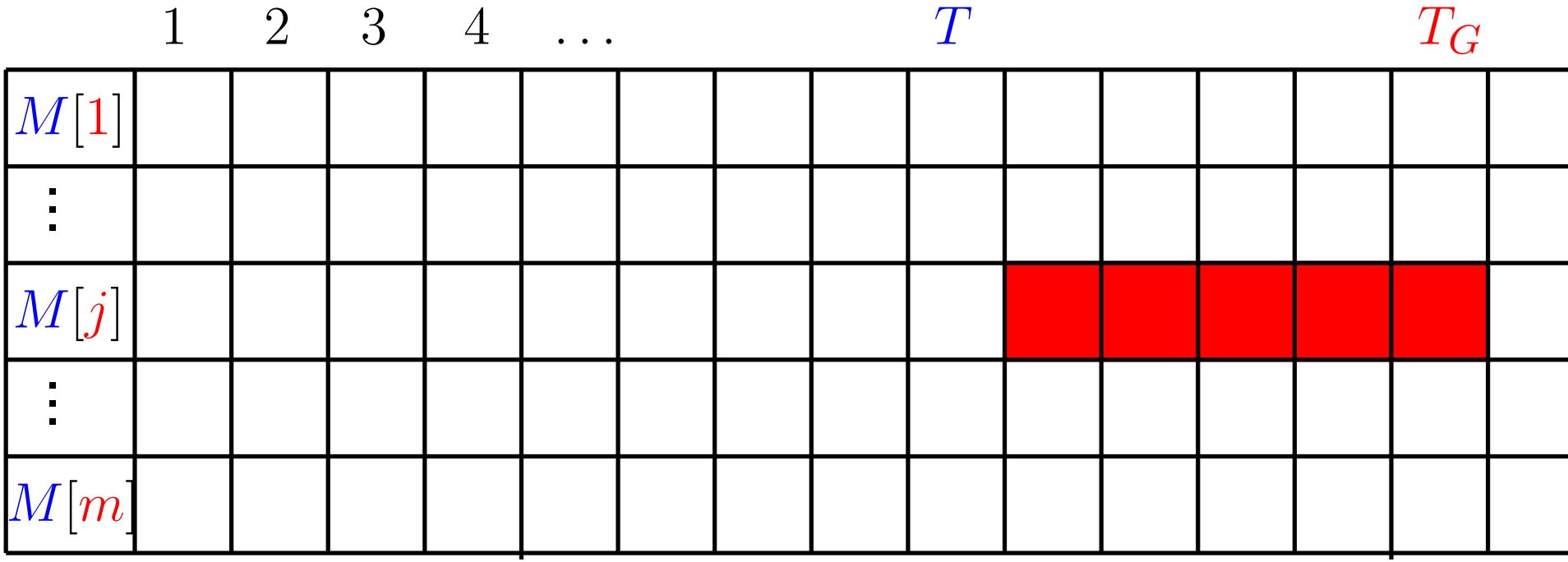
- Distribuição balanceada:

$$\mathrm{OPT} \geq \frac{d[1] + d[2] + \cdots + d[t]}{m}$$

Fator de aproximação

tarefa t é executada na máquina j a partir do instante T

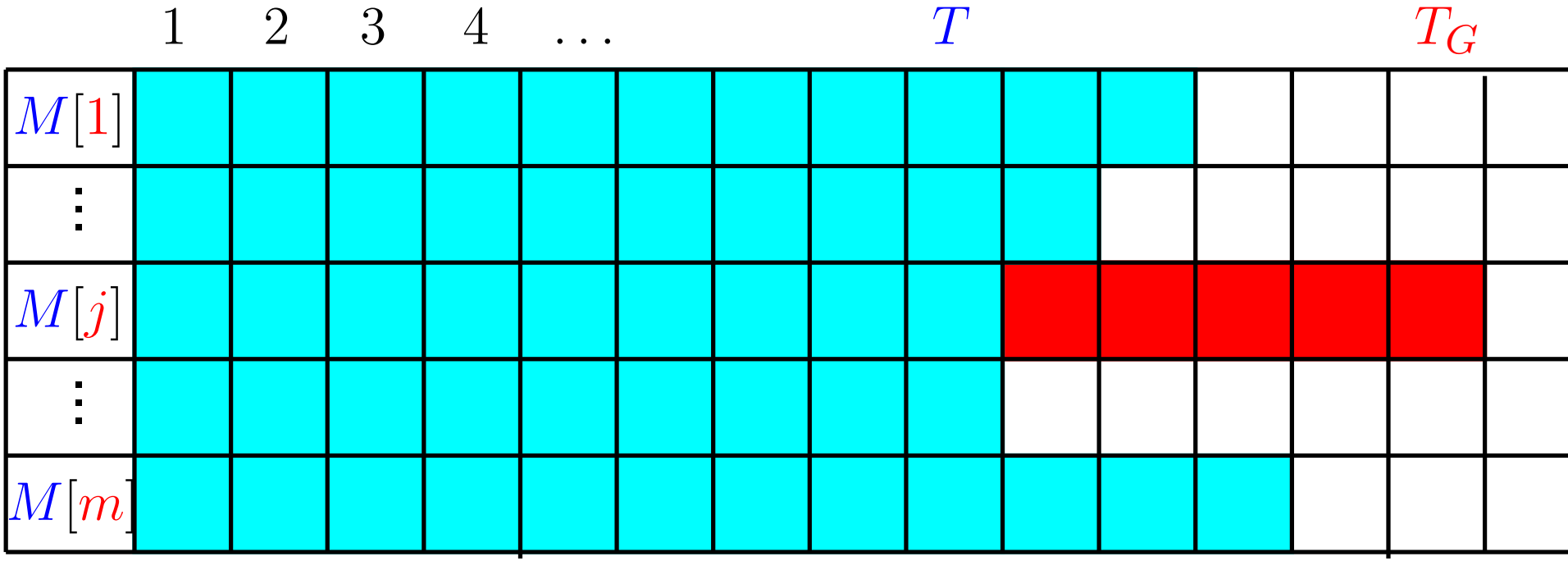
T_G = conclusão do escalonamento obtido pelo algoritmo



Fator de aproximação (cont.)

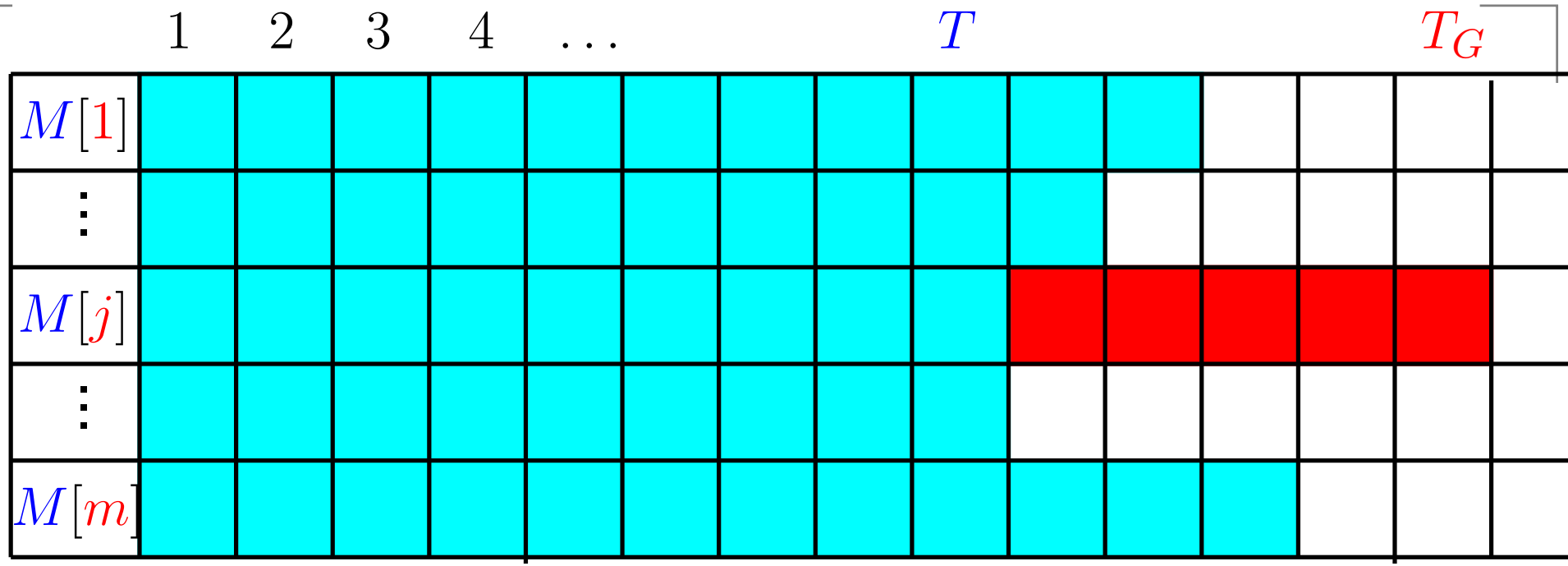
tarefa t é executada na máquina j a partir do instante T

T_G = conclusão do escalonamento obtido pelo algoritmo



$$T \cdot m \leq d[1] + \cdots + d[t] \quad \Rightarrow \quad T \leq \frac{d[1] + \cdots + d[t]}{m}$$

Fator de aproximação (cont.)



$$T_G = T + d[t]$$

$$\leq \frac{d[1] + \cdots + d[t]}{m} + d[t]$$

$$\leq \frac{d[1] + \cdots + d[t]}{m} + \max\{d[1], \ldots, d[t]\}$$

$$\leq \mathrm{OPT} + \mathrm{OPT} = 2\,\mathrm{OPT}$$

Algoritmos de aproximação

Algoritmo ALG é de aproximação se existe $\alpha > 0$ tal que

$$\text{valor de ALG}(I) \leq \alpha \cdot \text{OPT}\,(I)$$

para toda instância I do problema.

α é o fator de aproximação

Objetivo: α tão perto de 1 quanto possível

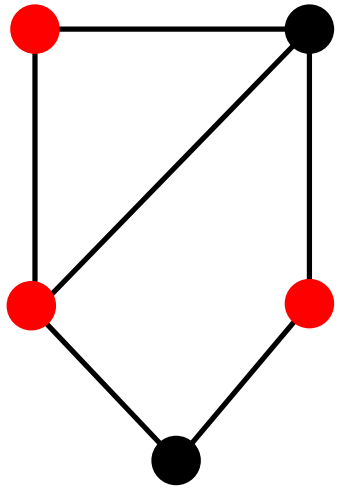
Conclusão

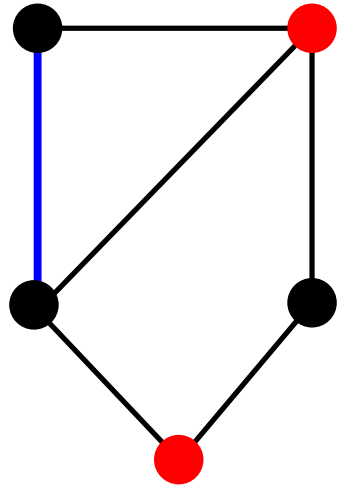
O algoritmo ESCALONAMENTO-GRAHAM é uma 2-aproximação polinomial.

Cobertura por vértices

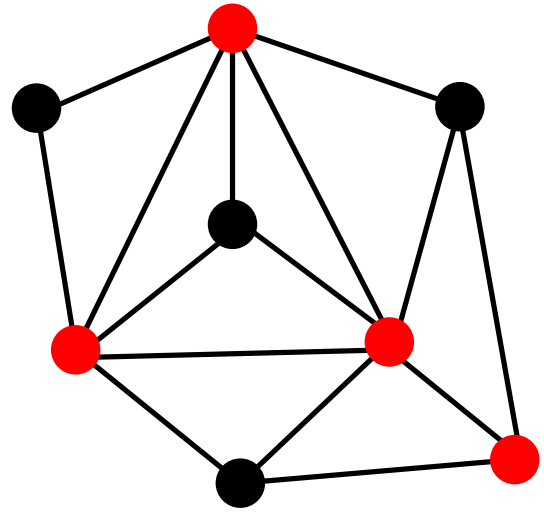
Um conjunto de vértices C é uma cobertura por vértices de G se cada aresta tem pelo menos uma ponta em C

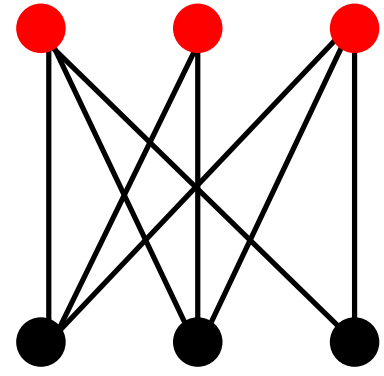
Exemplos:





não é





Cobertura por vértices

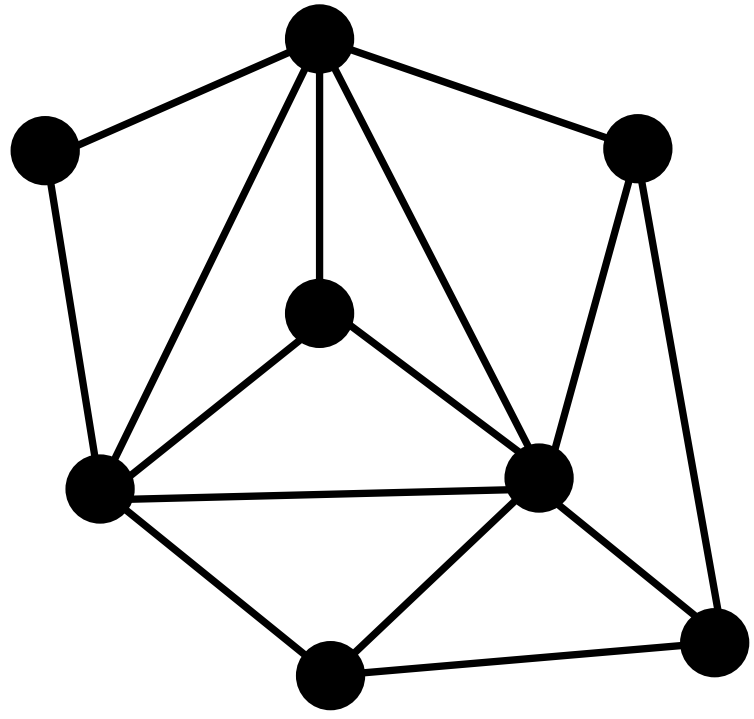
Problema: Dado um grafo G, encontrar um cobertura mínima.

Problema é NP-difícil.

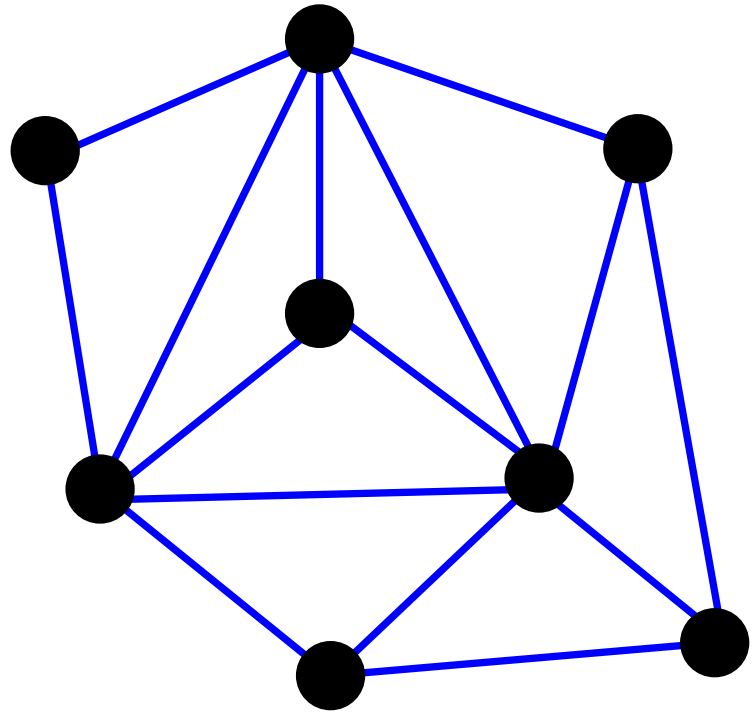
APPROX-VERTEX-COVER (G)

1 $C \leftarrow \emptyset$
2 $E \leftarrow \{$arestas de $G\}$
3 **enquanto** $E \neq \emptyset$ **faça**
4 seja (u, v) uma aresta qualquer em E
5 $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
6 $E \leftarrow E - \{$arestas incidentes a u ou $v\}$
7 **devolva** C

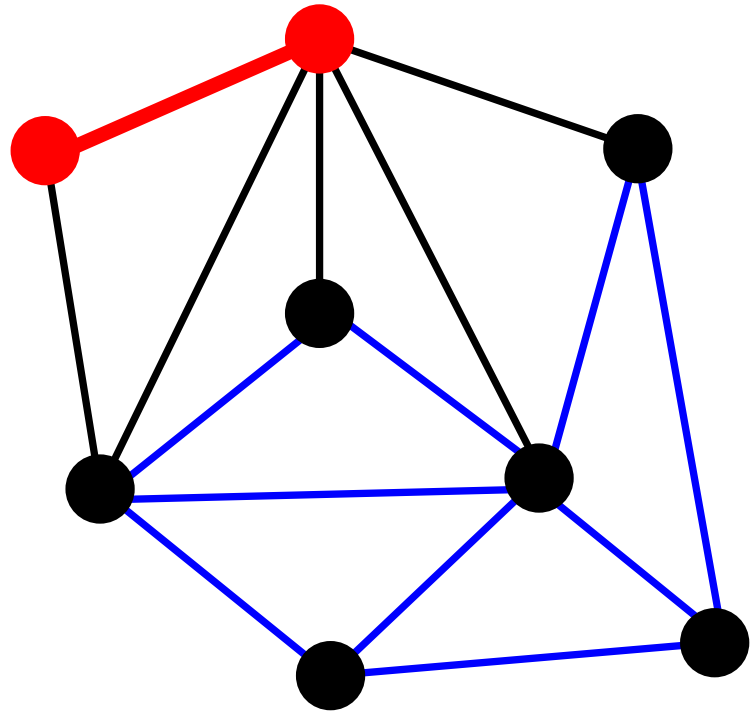
Exemplo



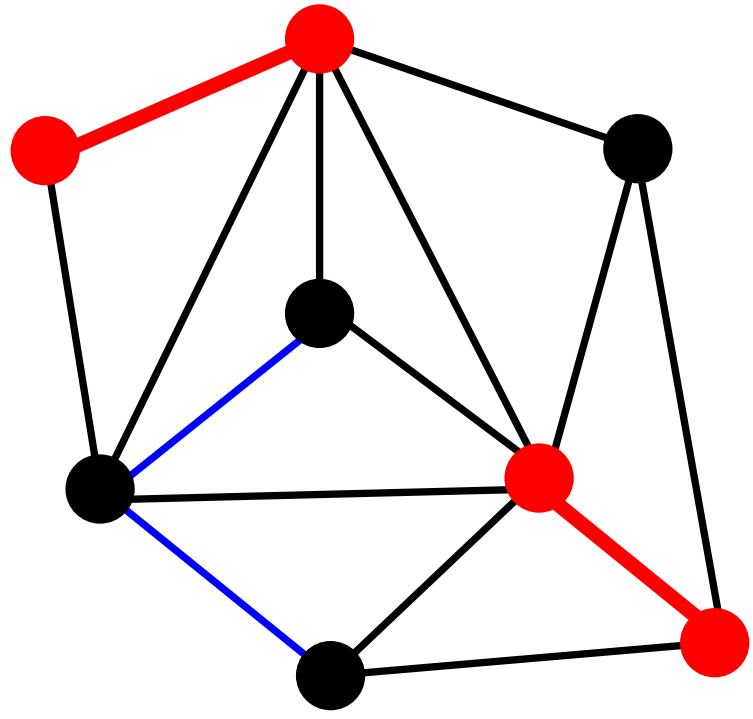
Exemplo



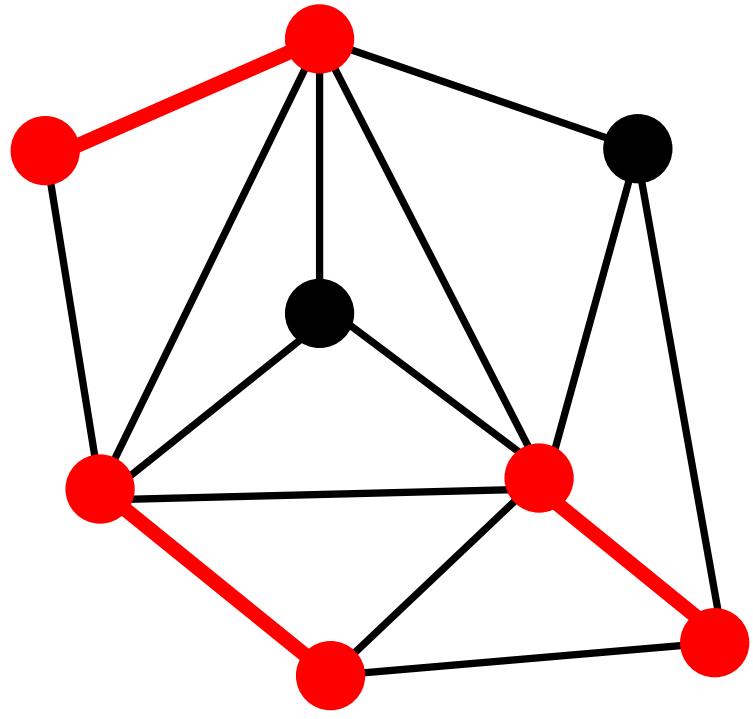
Exemplo



Exemplo



Exemplo

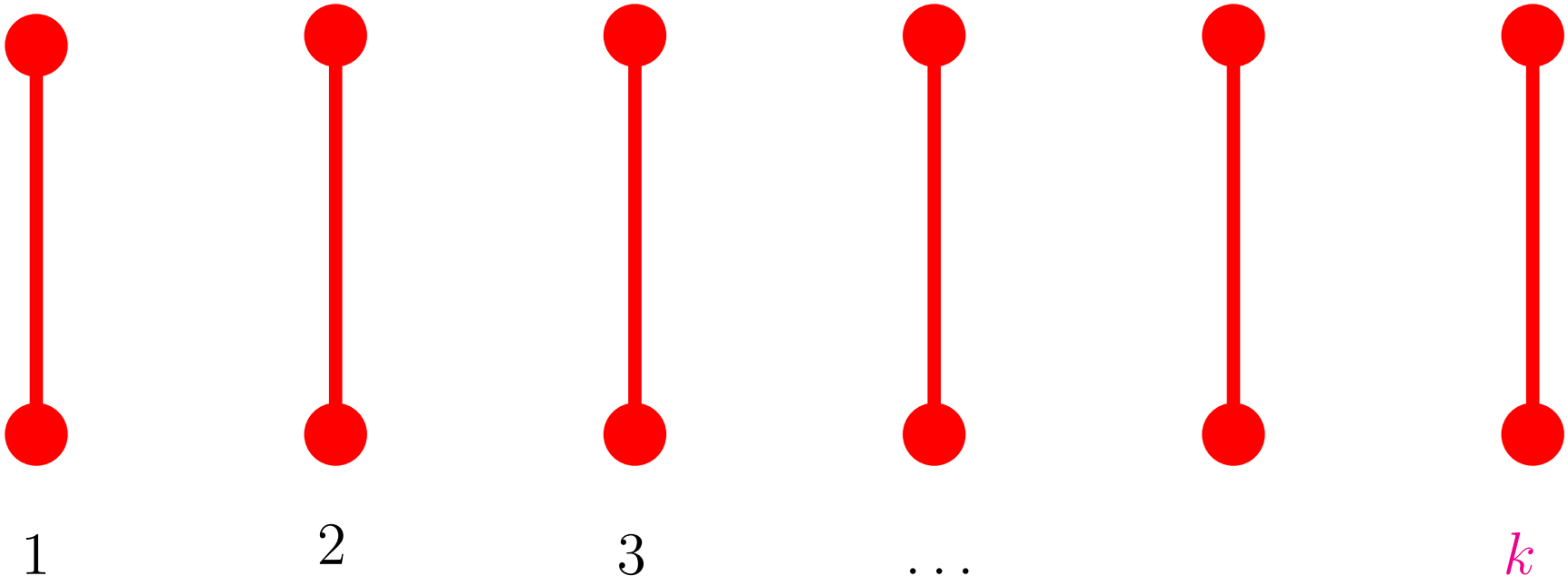


Consumo de tempo

E representado através de listas de adjacência.
$n =$ número de vértices
$m =$ número de arestas

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(n+m)$
3	$\mathrm{O}(m)$
4	$\mathrm{O}(m)$
5	$\mathrm{O}(n)$
6	$\mathrm{O}(m)$
7	$\mathrm{O}(n)$
total	$\Theta(1) + \Theta(n+m) + 3\mathrm{O}(m) + 2\mathrm{O}(n) = \Theta(n+m)$

Delimitações para OPT

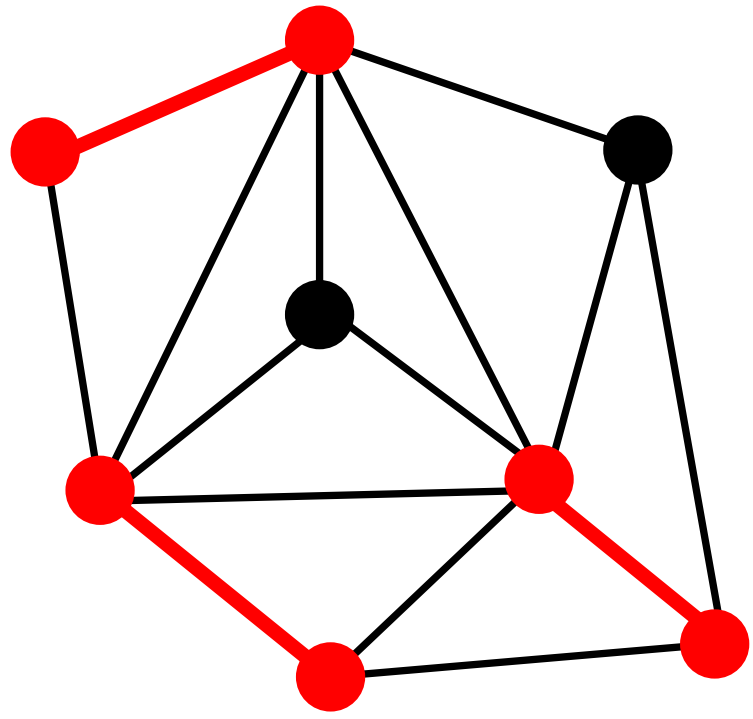


Se G possui um emparelhamento com k arestas, então

$$\mathrm{OPT} \geq k.$$

$\mathrm{OPT} =$ número mínimo de vértices de uma cobertura por vértices

Fator de aproximação



$C =$ cobertura devolvida pelo algoritmo.
G possui um emparelhamento com $|C|/2$ arestas.
Logo,

$$\frac{|C|}{2} \leq \mathrm{OPT} \quad \Rightarrow \quad |C| \leq 2\,\mathrm{OPT}.$$

Conclusão

O algoritmo APPROX-VERTEX-COVER é uma 2-aproximação polinomial.