Melhores momentos

AULA PASSADA

Análise amortizada

Análise amortizada $=$ análise do consumo de tempo de uma seqüência de operações

Usada nos casos em que

o consumo de tempo no pior caso de n operações é
menor
que n vezes o consumo de tempo no pior caso de uma operação

AULA 17

Mais análise amortizada

CLR 18 ou CLRS 17

Pilhas

PUSH(S, x) empilha o elemento s na pilha S

POP(S) desempilha e devolve o elemento no topo de S

STACK-EMPTY(S) devolve VERDADE se a pilha S está vazia e FALSO em caso contrário.

MULTIPOP (S, k)

1 **enquanto** STACK-EMPTY(S) $=$ FALSO **e** $k \neq 0$ **faça**
2 POP(S)
3 $k \leftarrow k - 1$

Consumo de tempo de MULTIPOP é $\mathrm{O}(\min\{|S|, k\})$.

Seqüência de n chamadas

$$\underbrace{\text{PUSH} \quad \text{PUSH} \quad \cdots \quad \text{POP} \quad \text{PUSH} \quad \text{MULTIPOP}}_{n}$$

Consumo de tempo é $O(n^2)$

Seqüência de n chamadas

$$\underbrace{\text{PUSH} \quad \text{PUSH} \quad \cdots \quad \text{POP} \quad \text{PUSH} \quad \text{MULTIPOP}}_{n}$$

Consumo de tempo é $\mathrm{O}(n^2)$

EXAGERO!

Método agregado

Cada elemento pode ser desempilhado apenas 1 vez.

Logo, número de POP's em uma pilha não vazia $\leq$ número de PUSH's.

Custo total:

$= \text{custo PUSH's} \ + \ \text{custo POP's} \ + \ \text{custo MULTIPOP's}$

$\leq n + \ \text{custo POP's pilha ñ vazia}$

$\leq 2\, n = \mathrm{O}(n)$

Custo amortizado de cada operação:

$$\frac{2n}{n} \ = \ \Theta(1)$$

Conclusões

O consumo de tempo de uma seqüência de n execuções dos algoritmos POP, PUSH e MULTIPOP é $\Theta(n)$.

O consumo de tempo amortizado de cada algoritmo é $\Theta(1)$.

Método de análise contábil

Custos reais:

PUSH	\$1
POP	\$1
MULTIPOP	\$ $\min\{|S|, k\}$

Créditos:

Pague \$2 por um PUSH

\$1 por um POP

\$1 por um MULTIPOP

Custo amortizado por chamada de POP, PUSH e MULTIPOP: $\leq$ \$2

Método de análise contabil

Como \$ armazenado nunca é negativo,

$$\begin{aligned}\text{soma custos reais} &\leq \\ &\leq \text{soma custos amortizados} \\ &\leq 2n \\ &= \mathrm{O}(n)\end{aligned}$$

Método de análise potencial

$$S_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} S_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} S_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{n^{\text{a}}\text{ op}} S_n$$

S_i = estado de S depois da i^{a} operação

Energia potencial de S_i:

$$\begin{aligned} \Phi(S_i) &= \text{número de objetos na pilha} \\ &\geq 0 \quad \text{(Importante!)} \end{aligned}$$

Custo amortizado PUSH

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é PUSH, então $c_i = 1$ e

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\ &= c_i + 1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Custo amortizado Pop (pilha não vazia)

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é POP, então $c_i = 1$ e

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\
&= c_i - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Custo amortizado POP (pilha vazia)

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é POP, então $c_i = 1$ e

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\ &= c_i - 0 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Custo amortizado MULTIPOP

c_i = custo real da i^{a} operação.

Custo amortizado da i^{a} operação:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1})$$

Se a i^{a} operação é MULTIPOP e k_i é o número de elementos desempilhados, então $c_i \leq 1 + k_i$ e

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i-1}) \\ &= c_i - k_i \\ &\leq 1 + k_i - k_i \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Custo amortizado

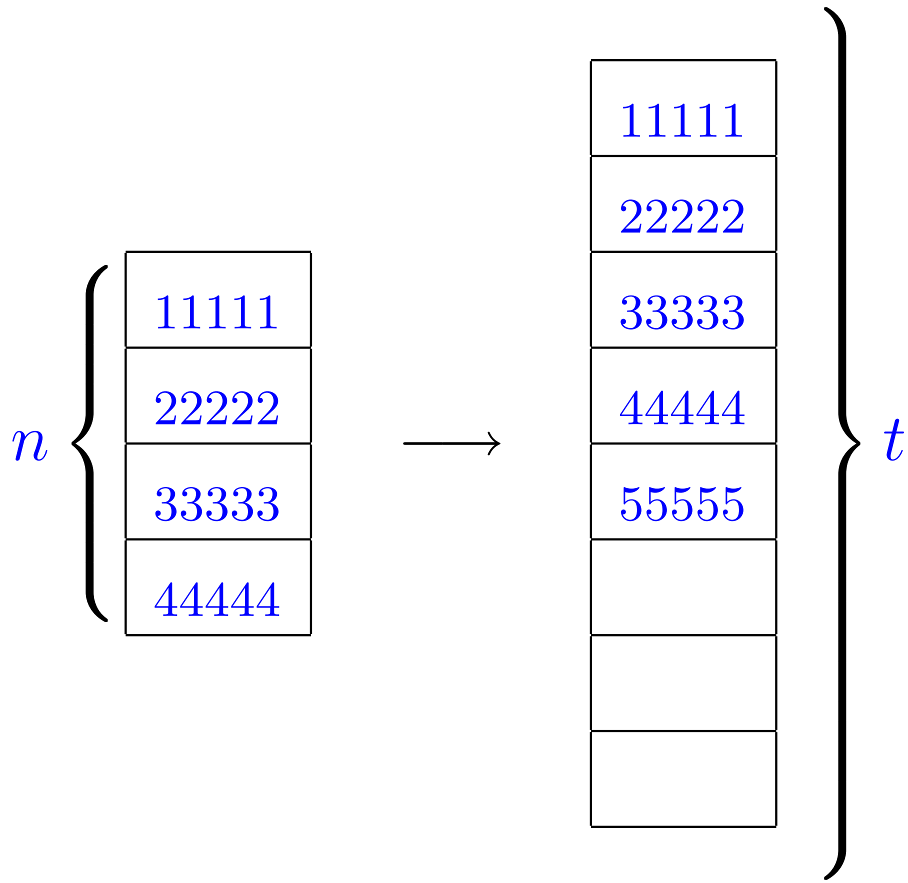
Soma dos custos amortizados limita a soma dos custos reais pois $\Phi \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_i &= \sum (\hat{c}_i - \Phi(S_i) + \Phi(S_{i-1})) \\
&= \sum \hat{c}_i \; - \; \Phi(S_n) + \Phi(S_0) \\
&= \sum \hat{c}_i \; - \; \Phi(S_n) + 0 \\
&= \sum \hat{c}_i \; - \; \Phi(S_n) \\
&\leq \sum \hat{c}_i \, , \qquad \text{(pois } \Phi(S_n) \geq 0\text{)} \\
&\leq \sum 2 \\
&= 2\, n
\end{aligned}
$$

Mais análise amortizada

CLR 18 ou CLRS 17

Tabelas dinâmicas



$n[T]$= número de itens $t[T]$= tamanho de T

Inicialmente $n[T] = t[T] = 0$

Inserção

Insere um elemento x na tabela T

TABLE-INSERT (T, x)

1 **se** $t[T] = 0$
2 **então** aloque $tabela[T]$ com 1 posição
3 $t[T] \leftarrow 1$
4 **se** $n[T] = t[T]$
5 **então** aloque $nova\text{-}tabela$ com $2\,t[T]$ posições
6 insira itens da $tabela[T]$ na $nova\text{-}tabela$
7 $t[nova\text{-}tabela] \leftarrow 2\,t[T]$
8 libere $tabela[T]$
9 $tabela[T] \leftarrow nova\text{-}tabela$
10 insira x na $tabela[T]$
11 $n[T] \leftarrow n[T] + 1$

Custo $=$ número de inserções elementares (linhas 6 e 10)

Seqüência de m TABLE-INSERTS

$$T_0 \xrightarrow{1^{\text{a}}\text{ op}} T_1 \xrightarrow{2^{\text{a}}\text{ op}} T_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{m^{\text{a}}\text{ op}} T_m$$

T_i = estado de T depois da i^{a} operação

Custo real da i^{a} operação:

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{se há espaço} \\ n_i & \text{se tabela cheia} \end{cases}$$

onde n_i = valor de $n[T]$ depois da i^{a} operação

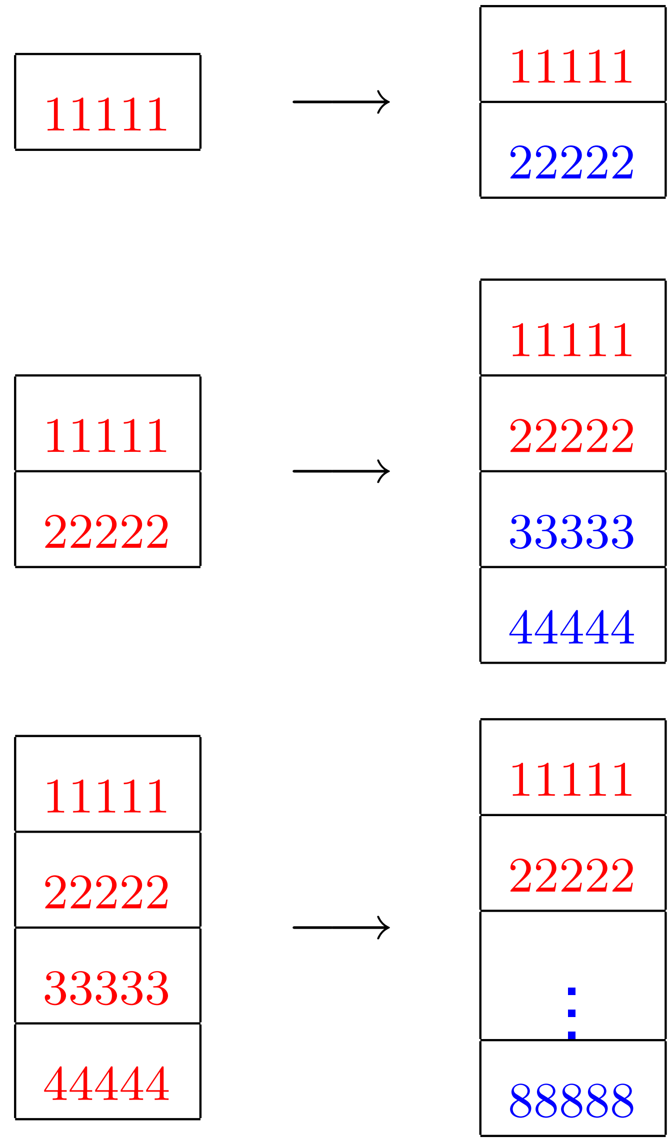
= i

Custo de uma operação = $\mathrm{O}(m)$

Custo das m operações = $\mathrm{O}(m^2)$ Exagero!

Exemplo

operação ($n[T]$)	$t[T]$	custo
1	1	1
2	2	$1+1$
3	4	$1+2$
4	4	1
5	8	$1+4$
6	8	1
7	8	1
8	8	1
9	16	$1+8$
10	16	1
16	16	1
17	32	$1+16$
33	64	$1+32$



Custo amortizado

Custo total:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \;=\; m + \sum_{i=0}^{k} 2^i \;=\; n + 2^{k+1} - 1 \;<\; n + 2m - 1 \;<\; 3m$$

onde $k = \lfloor \lg(m-1) \rfloor$

Custo amortizado:

$$\frac{3m}{m} \;=\; 3 \;=\; \Theta(1)$$

Conclusões

O custo de uma seqüência de m execuções do algoritmo TABLE-INSERT é $\Theta(m)$.

O custo amortizado do algoritmo TABLE-INSERT é $\Theta(1)$.

Método de análise agregada

- m operações consomem tempo $T(m)$
- custo médio de cada operação é $T(m)/m$
- custo amortizado de cada operação é $T(m)/m$
- defeito: no caso de mais de um tipo de operação, o custo de cada tipo não é determinado separadamente

Método de análise contábil

TABLE-INSERT (T, x)

$credito \leftarrow credito + 3$
se $t[T] = 0$
  então aloque $tabela[T]$ com 1 posição
    $t[T] \leftarrow 1$
se $n[T] = t[T]$
  então aloque $nova\text{-}tabela$ com $2\,t[T]$ posições
    insira itens da $tabela[T]$ na $nova\text{-}tabela$

$custo \leftarrow custo + n[T]$
    libere $tabela[T]$
    $tabela[T] \leftarrow nova\text{-}tabela$
    $t[T] \leftarrow 2\,t[T]$
insira x na $tabela[T]$

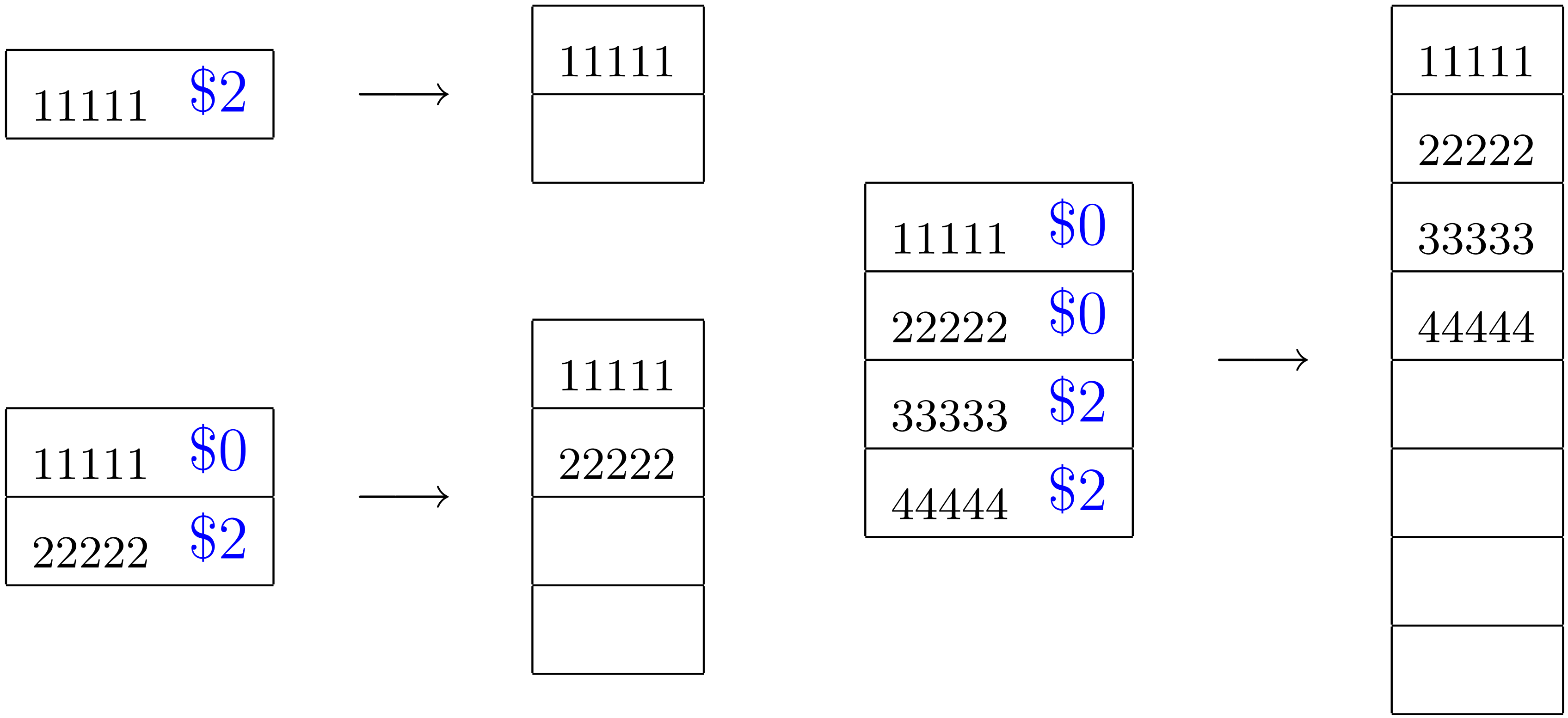
$n[T] \leftarrow n[T] + 1$
$custo \leftarrow custo + 1$

Método de análise contábil

Invariante: soma créditos $\geq$ soma custos reais

$n[T]$	$t[T]$	custo	crédito	saldo
1	1	1	3	2
2	2	$1+1$	3	3
3	4	$1+2$	3	3
4	4	1	3	5
5	8	$1+4$	3	3
6	8	1	3	5
7	8	1	3	7
8	8	1	3	9
9	16	$1+8$	3	3
10	16	1	3	5
16	16	1	3	17
17	32	$1+16$	3	3

Método de análise contábil



Método de análise contábil

Pague	\$1 para inserir um novo elemento
guarde	\$1 para eventualmente mover o novo elemento
guarde	\$1 para mover um elemento que já está na tabela

Custo amortizado por chamada de TABLE-INSERT: $\leq$ \$3

Seqüência de m chamadas de TABLE-INSERT.

Como \$ armazenado nunca é negativo,

$$
\begin{aligned}
\text{soma custos reais} &\leq \text{soma custos amortizados} \\
&= 3m \\
&= \mathrm{O}(m)
\end{aligned}
$$

Método de análise contábil

- cada operação paga seu custo real
- cada operação recebe um certo número de créditos (chute de custo amortizado)
- balanço nunca pode ser negativo

$$\text{soma créditos} \;\geq\; \text{soma custos reais}$$

  créditos não usados são guardados para pagar operações futuras.

- custo amortizado da operação $\leq$ número médio de créditos recebidos
- custo amortizado de cada tipo de operação pode ser determinado separadamente

Método de análise potencial

Função potencial: $\Phi(T) := 2\,n[T] - t[T]$

$n[T]$	$t[T]$	custo	$\Phi(T)$	$\Delta\Phi$	custo$+\Delta\Phi$
1	1	1	1	$+1$	2
2	2	$1+1$	2	$+1$	3
3	4	$1+2$	2	0	3
4	4	1	4	$+2$	3
5	8	$1+4$	2	-2	3
6	8	1	4	$+2$	3
7	8	1	6	$+2$	3
8	8	1	8	$+2$	3
9	16	$1+8$	2	-6	3
10	16	1	4	$+2$	3
16	16	1	16	$+2$	3
17	32	$1+16$	2	-14	3

Método de análise potencial

Função potencial: $\Phi(T) := 2\,n[T] - t[T]$

Note que $0 \ \leq \ \Phi(T) \ \leq \ t[T]$

Cálculo do custo amortizado $\hat{c}_i$:

Se i^{a} operação não causa expansão então

$$\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= 1 + (2n_i - t_i) - (2n_{i-1} - t_{i-1}) \\
&= 1 + (2n_i - t_i) - (2(n_i - 1) - t_i) \\
&= 3
\end{aligned}$$

n_i, t_i, Φ_i = valores depois da i^{a} operação

Método de análise potencial

Se i^{a} operação causa expansão então

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_i &= c_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= n_i + (2n_i - t_i) - (2n_{i-1} - t_{i-1}) \\
&= n_i + (2n_i - 2n_{i-1}) - (2n_{i-1} - n_{i-1}) \\
&= n_i + 2n_i - 3n_{i-1} \\
&= n_i + 2n_i - 3(n_i - 1) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Conclusão: $\hat{c}_i = 3$ para qualquer $i \geq 2$

Método de análise potencial

O custo real das n operações é limitado pelo custo amortizado pois $\Phi \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} c_i &= \sum \hat{c}_i - \Phi_m + \Phi_0 \\
&= \sum \hat{c}_i - \Phi_m \\
&\leq \sum \hat{c}_i \\
&= 3m \\
&= \mathrm{O}(m)
\end{aligned}$$

Método de análise potencial

- método contábil visto como energia potencial
- potencial associado à estrutura de dados