# AULA 12

# $i$-ésimo menor elemento

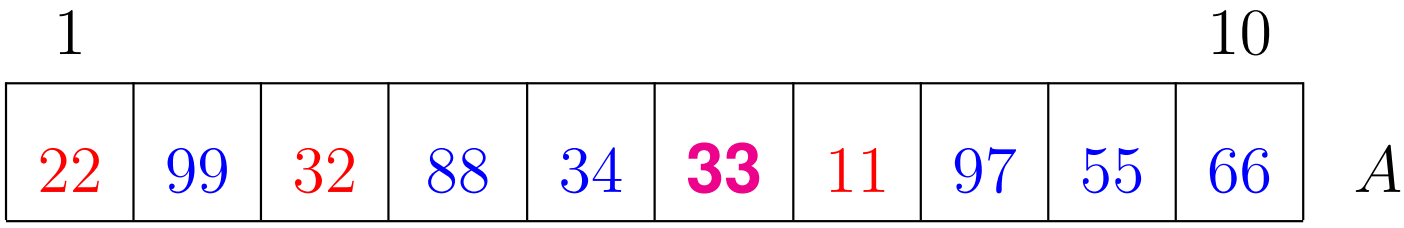
CLRS 9

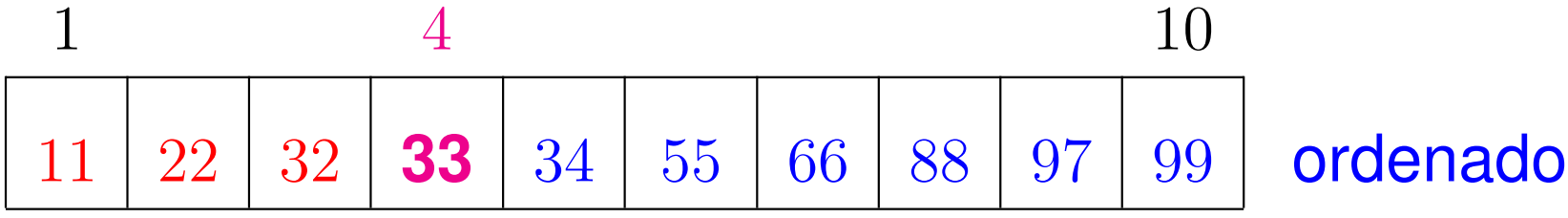
# $i$-ésimo menor

Problema: Encontrar o $i$-ésimo menor elemento de $A[1\,..\,n]$

Suponha $A[1\,..\,n]$ sem elementos repetidos.

Exemplo: $33$ é o 4o. menor elemento de:

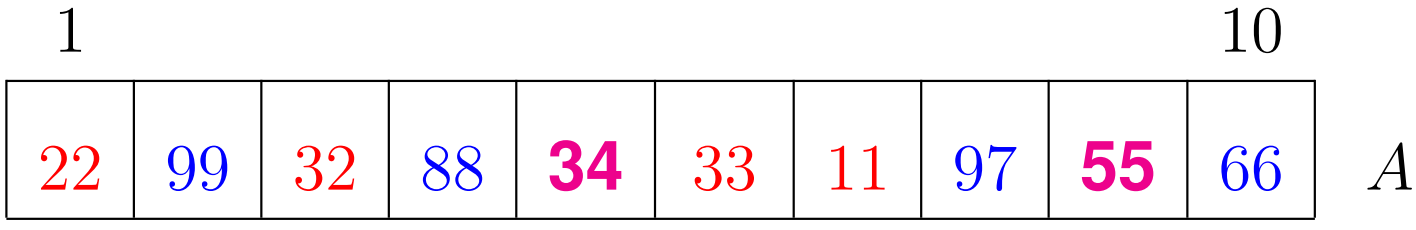


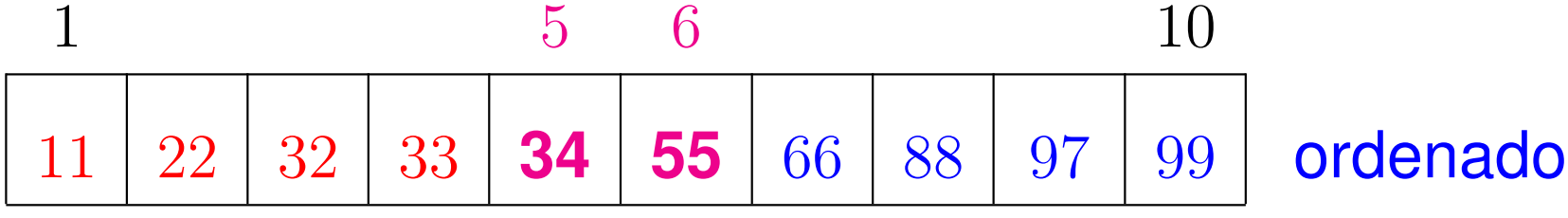



# Mediana

Mediana é o $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$-ésimo menor ou o $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$-ésimo menor elemento

Exemplo: a mediana é $34$ ou $55$:



# Menor

Recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve o valor do menor elemento.

```
MENOR (A, n)
1    menor ← A[1]
2    para k ← 2 até n faça
3         se A[k] < menor
4              então menor ← A[k]
5    devolva menor
```

O consumo de tempo do algoritmo MENOR é $\Theta(n)$.

# Segundo menor

Recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ e devolve o valor do segundo menor elemento, supondo $n \geq 2$.

SEG-MENOR $(A, n)$

```
1   menor ← min{A[1], A[2]}    segmenor ← max{A[1], A[2]}
2   para k ← 3 até n faça
3       se A[k] < menor
4           então segmenor ← menor
5                 menor ← A[k]
6       senão se A[k] < segmenor
7           então segmenor ← A[k]
8   devolva segmenor
```

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MENOR é $\Theta(n)$.

# $i$-ésimo menor

Recebe $A[1\,..\,n]$ e $i$ tal que $1 \leq i \leq n$
e devolve valor do $i$-ésimo menor elemento de $A[1\,..\,n]$

```
SELECT-ORD (A, n, i)
1   ORDENE (A, n)
2   devolva A[i]
```

O consumo de tempo do algoritmo SELECT-ORD é $\Theta(n \lg n)$.

# Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

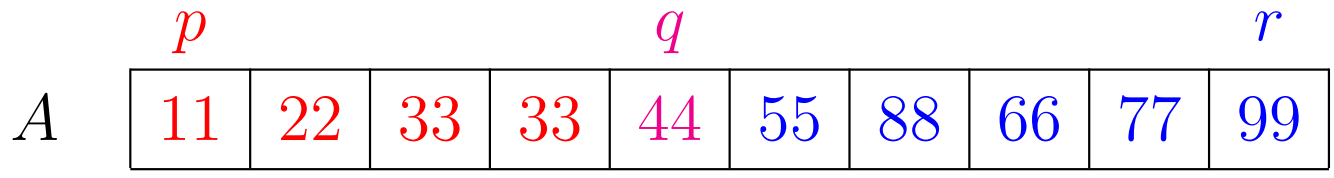
```
PARTICIONE (A, p, r)
1    x ← A[r]          ▷ x é o "pivô"
2    i ← p−1
3    para j ← p até r − 1 faça
4        se A[j] ≤ x
5            então i ← i + 1
6                  A[i] ↔ A[j]
7    A[i+1] ↔ A[r]
8    devolva i + 1
```

| | $p$ | | | | | | | | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 99 | 33 | 55 | 77 | 11 | 22 | 88 | 66 | 33 | 44 |

# Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
1    x ← A[r]          ▷ x é o "pivô"
2    i ← p−1
3    para j ← p até r − 1 faça
4        se A[j] ≤ x
5            então i ← i + 1
6                  A[i] ↔ A[j]
7    A[i+1] ↔ A[r]
8    devolva i + 1
```



# Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE (A, p, r)
1   x ← A[r]            ▷ x é o "pivô"
2   i ← p−1
3   para j ← p até r − 1 faça
4       se A[j] ≤ x
5           então i ← i + 1
6                 A[i] ↔ A[j]
7   A[i+1] ↔ A[r]
8   devolva i + 1
```

O algoritmo PARTICIONE consome tempo $\Theta(n)$.

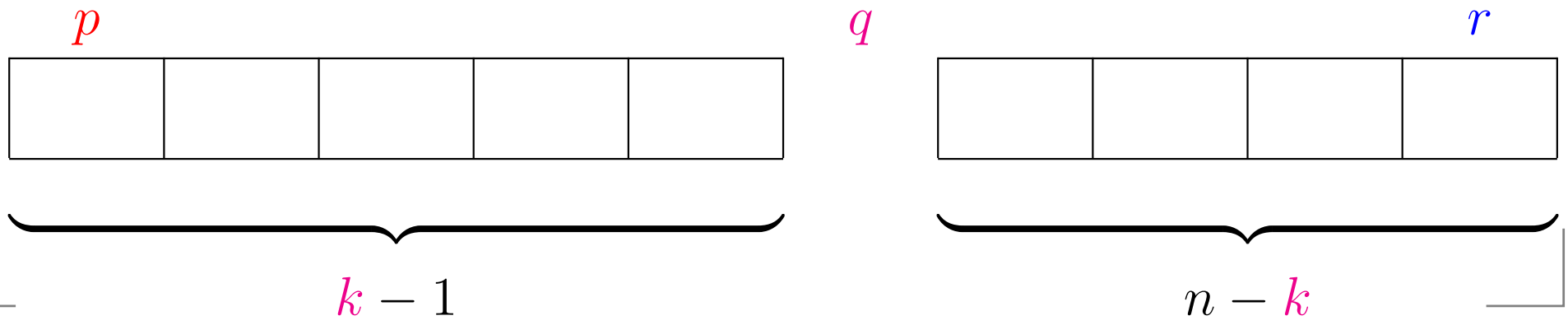
# Algoritmo SELECT

Recebe $A[p\,..\,r]$ e $i$ tal que $1 \leq i \leq r-p+1$
e devolve valor do $i$-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

```
SELECT(A, p, r, i)
1    se p = r
2         então devolva A[p]
3    q ← PARTICIONE (p, r)
4    k ← q − p + 1
5    se k = i
6         então devolva A[q]
7    se k > i
8         então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
9         senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```

# Algoritmo SELECT

```
SELECT(A, p, r, i)
1    se p = r
2         então devolva A[p]
3    q ← PARTICIONE (A, p, r)
4    k ← q − p + 1
5    se k = i
6         então devolva A[q]
7    se k > i
8         então devolva SELECT (A, p, q − 1, i)
9         senão devolva SELECT (A, q + 1, r, i − k)
```



# Consumo de tempo

$T(n) =$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1-2 | $= 2\,\Theta(1)$ |
| 3 | $= \Theta(n)$ |
| 4-7 | $= 4\,\Theta(1)$ |
| 8 | $= T(k-1)$ |
| 9 | $= T(n-k)$ |

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta(n+6) + \max\{T(k-1), T(n-k)\} \\
&= \Theta(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}
\end{aligned}
$$

# Consumo de tempo

$T(n)$ pertence a mesma classe $\Theta$ que:

$$T'(1) = 1$$
$$T'(n) = T'(n-1) + n \text{ para } n = 2, 3, \ldots$$

Solução assintótica:

$$T'(n) \text{ é } \Theta(n^2).$$

Solução exata:

$$T'(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

# Algumas conclusões

No melhor caso o consumo de tempo do algoritmo SELECT é $\Theta(n)$.

No pior caso o consumo de tempo do algoritmo SELECT é $\Theta(n^2)$.

Consumo médio?
$\mathrm{E}[T(n)] =$ ???

# Exemplos

Número médio de comparações sobre todas as permutações de $A[p\,..\,r]$ (supondo que nas linhas 8 e 9 o algoritmo sempre escolhe o lado maior):

| $A[p\,..\,r]$ | comps |
|---|---|
| 1,2 | 1+0 |
| 2,1 | 1+0 |
| média | 2/2 |

| $A[p\,..\,r]$ | comps |
|---|---|
| 1,2,3 | 2+1 |
| 2,1,3 | 2+1 |
| 1,3,2 | 2+0 |
| 3,1,2 | 2+0 |
| 2,3,1 | 2+1 |
| 3,2,1 | 2+1 |
| média | 16/6 |

# Mais exemplos

| $A[p\,..\,r]$ | comps |
|---|---|
| 1,2,3,4 | 3+3 |
| 2,1,3,4 | 3+3 |
| 1,3,2,4 | 3+2 |
| 3,1,2,4 | 3+2 |
| 2,3,1,4 | 3+3 |
| 3,2,1,4 | 3+3 |
| 1,2,4,3 | 3+1 |
| 2,1,4,3 | 3+1 |
| 1,4,2,3 | 3+1 |
| 4,1,2,3 | 3+1 |
| 2,4,1,3 | 3+1 |
| 4,2,1,3 | 3+1 |

| $A[p\,..\,r]$ | comps |
|---|---|
| 1,3,4,2 | 3+1 |
| 3,1,4,2 | 3+1 |
| 1,4,3,2 | 3+1 |
| 4,1,3,2 | 3+1 |
| 3,4,1,2 | 3+1 |
| 4,3,1,2 | 3+1 |
| 2,3,4,1 | 3+3 |
| 3,2,4,1 | 3+3 |
| 2,4,3,1 | 3+2 |
| 4,2,3,1 | 3+2 |
| 3,4,2,1 | 3+3 |
| 4,3,2,1 | 3+3 |
| média | 116/24 |

# Ainda exemplos

No caso $r - p + 1 = 5$, a média é $864/120$.

| $n$ | $\mathrm{E}[T(n)]$ | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 2/2 | 1 |
| 3 | 16/6 | 2.7 |
| 4 | 116/24 | 4.8 |
| 5 | 864/120 | 7.2 |

# Número de comparações

O consumo de tempo assintótico é proporcional a

$C(n) =$ número de comparações entre elementos de $A$ quando $n = r - p + 1$

| linha | número de comparações na linha |
|---|---|
| 1-2 | $= 0$ |
| 3 | $= n - 1$ |
| 4-7 | $= 0$ |
| 8 | $= C(k-1)$ |
| 9 | $= C(n-k)$ |
| total | $\leq \max\{C(k-1), C(n-k)\} + n - 1$ |

# Número de comparações

No pior caso $C(n)$ pertence a mesma classe $\Theta$ que:

$$C'(1) = 0$$

$$C'(n) = C'(n-1) + n - 1 \text{ para } n = 3, 4, \ldots$$

Solução assintótica:

$$C'(n) \text{ é } \Theta(n^2)$$

Solução exata:

$$C'(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

# Particione aleatorizado

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

```
PARTICIONE-ALEA(A, p, r)
1   i ← RANDOM (p, r)
2   A[i] ↔ A[r]
3   devolva PARTICIONE (A, p, r)
```

O algoritmo PARTICIONE-ALEA consome tempo $\Theta(n)$.

# SELECT-ALEATORIZADO (= randomized select)

Recebe $A[p\,..\,r]$ e $i$ tal que $1 \le i \le r-p+1$
e devolve valor do $i$-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

```
SELECT-ALEA(A, p, r, i)
1    se p = r
2          então devolva A[p]
3    q ← PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
4    k ← q − p + 1
5    se k = i
6          então devolva A[q]
7    se k > i
8          então devolva SELECT-ALEA (A, p, q − 1, i)
9          senão devolva SELECT-ALEA (A, q + 1, r, i − k)
```

# Consumo de tempo

O consumo de tempo é proporcional a

$T(n) =$ número de comparações entre elementos de $A$ quando $n = r - p + 1$

| linha | número de comparações na linha |
|---|---|
| 1-2 | $= 0$ |
| 3 | $= n - 1$ |
| 4-7 | $= 0$ |
| 8 | $= T(k - 1)$ |
| 9 | $= T(n - k)$ |
| total | $\leq \max\{T(k-1), T(n-k)\} + n - 1$ |

$T(n)$ é uma variável aleatória.

# Consumo de tempo

$$T(1) = 0$$

$$T(n) \leq \sum_{h=1}^{n-1} X_h T(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

onde

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Pr\{X_h = 1\} = \mathrm{E}[X_h]$$

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de $X_h$ valer 1?

# $\Pr\{X_h = 1\} = \mathrm{E}[X_h]$

$$X_h = \begin{cases} 1 & \text{se } \max\{k-1, n-k\} = h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de $X_h$ valer 1?

Para $h = 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor - 1$, $\Pr\{X_h = 1\} = 0 = \mathrm{E}[X_h]$.

Para $h = \lceil n/2 \rceil, \ldots, n$,

$$\Pr\{X_h{=}1\} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} = \mathrm{E}[X_h]$$

Se $n$ é impar e $h = \lfloor n/2 \rfloor$, então

$$\Pr\{X_h = 1\} = \frac{1}{n} = \mathrm{E}[X_h]$$

# Consumo de tempo esperado

$$\mathrm{E}[T(1)] = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[T(n)] &\leq \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h T(h)] + n - 1 \\
&= \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{E}[X_h]\,\mathrm{E}[T(h)] + n - 1 \quad \text{(CLRS 9.2-2)} \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} \mathrm{E}[T(h)] + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

onde $a = \lfloor n/2 \rfloor$.

Solução: $\mathrm{E}[T(n)] = \mathrm{O}(n)$.

# Consumo de tempo esperado

$\mathrm{E}[T(n)]$ pertence a mesma classe $\mathrm{O}$ que:

$$S(1) = 0$$

$$S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1 \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

onde $a = \lfloor n/2 \rfloor$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(n)$ | 0.0 | 1.0 | 2.7 | 4.8 | 7.4 | 10.0 | 13.1 | 15.8 | 19.4 | 22.1 |
| $4n$ | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |

Vamos verificar que $S(n) < 4\,n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

# Recorrência

Prova: Se $n = 1$, então $S(n) = 0 < 4 = 4 \cdot 1 = 4n$. Se $n \geq 2$,

$$S(n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} S(h) + n - 1$$

hi

$$< \frac{2}{n} \sum_{h=a}^{n-1} 4\,h + n - 1$$

$$= \frac{8}{n} \left( \sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{a-1} h \right) + n - 1$$

$$\leq \frac{4}{n} \left( n^2 - n - \frac{(n-1)(n-3)}{4} \right) + n - 1$$

$$= \frac{4}{n} \left( \frac{3n^2}{4} - \frac{3}{4} \right) + n - 1$$

$$= 3n - \frac{3}{n} + n - 1 = 4n - \frac{3}{n} - 1 < 4n.$$

# Conclusão

O consumo de tempo esperado do algoritmo SELECT-ALEA é $\mathrm{O}(n)$.

# Exercícios

**Exercício 18.A** [CLRS 9.1-1] [muito bom!]
Mostre que o segundo menor elemento de um vetor $A[1\,..\,n]$ pode ser encontrado com não mais que $n + \lceil \lg n \rceil - 2$ comparações.

**Exercício 18.B**
Prove que o algoritmo Select Aleatorizado (= Randomized Select) funciona corretamente.

**Exercício 18.C** [CLRS 9.2-3]
Escreva uma versão iterativa do algoritmo Select Aleatorizado (= Randomized Select).

# Seleção em tempo linear

CLRS 9.3

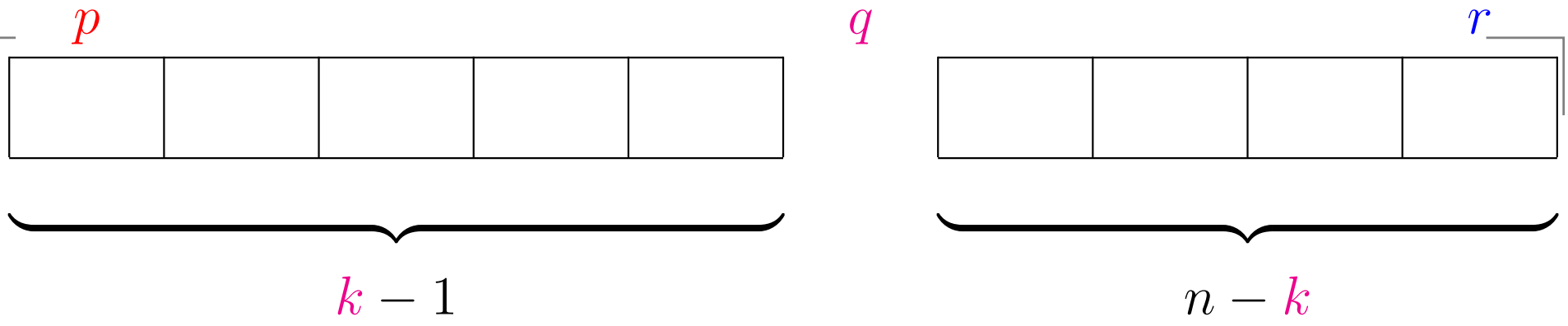
BFPRT = Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan

# Select-BFPRT

Recebe $A[p\,..\,r]$ e $i$ tal que $1 \leq i \leq r-p+1$
e devolve um índice $q$ tal que $A[q]$ é o $i$-ésimo menor elemento de $A[p\,..\,r]$

```
SELECT-BFPRT(A, p, r, i)
1    se p = r
2         então devolva p      ▷ p e não A[p]
3    q ← PARTICIONE-BFPRT (A, p, r)
4    k ← q − p + 1
5    se k = i
6         então devolva q      ▷ q e não A[q]
7    se k > i
8         então devolva SELECT-BFPRT (A, p, q − 1, i)
9         senão devolva SELECT-BFPRT (A, q + 1, r, i − k)
```

# Particione-BFPRT




Rearranja $A[p\,..\,r]$ e devolve um índice $q$, $p \le q \le r$, tal que $A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$ **e**

$$\max\{k-1, n-k\} \le \left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6,$$

onde $n = r - p + 1$ e $k = q - p + 1$.

Suponha que

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo PARTICIONE-BFPRT quando $n = r - p + 1$

# Consumo de tempo

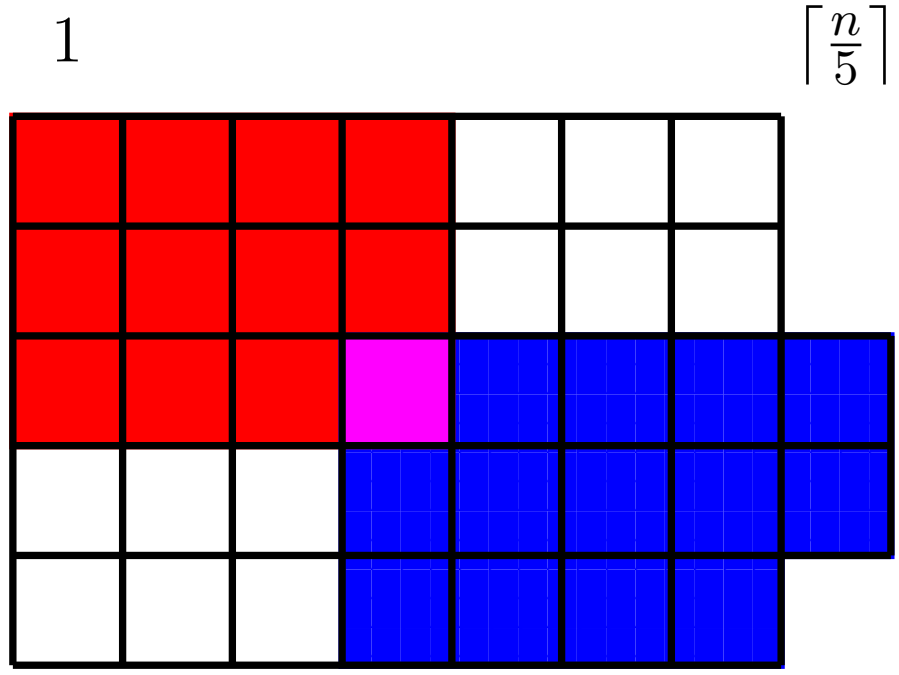
$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = r - p + 1$

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1-2 | $= 2\,\Theta(1)$ |
| 3 | $= P(n)$ |
| 4-7 | $= 4\,\Theta(1)$ |
| 8 | $= T(k-1)$ |
| 9 | $= T(n-k)$ |

$$T(n) = 6\,\Theta(1) + P(n) + \max\{T(k-1), T(n-k)\}$$

$$\leq \Theta(1) + P(n) + T(\lfloor \tfrac{7n}{10} \rfloor + 6)$$

# Particione-BFPRT




$$\max\{k-1, n-k\} \leq n - 3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5}\right\rceil\right\rceil - 2\right)$$

$$\leq n - \left(\frac{3n}{10} - 6\right) = \frac{7n}{10} + 6$$

# Particione-BFPRT

$n := r - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT $(A, p, r)$

1 **para** $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil {-}1)$ **faça**
2 ORDENE $(A, j, j{+}4)$
3 ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

4 **para** $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil {-}1$ **faça**
5 $B[j] \leftarrow A[p{+}5j{-}3]$
6 $B[\lceil n/5 \rceil] \leftarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor {+}n)/2 \rfloor]$

7 $k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(B, 1, \lceil n/5 \rceil, \lfloor (\lceil n/5 \rceil {+}1)/2 \rfloor)$

8 $A[k] \leftrightarrow A[r]$
9 **devolva** PARTICIONE $(A, p, r)$

# Particione-BFPRT

$n := r - p + 1$

PARTICIONE-BFPRT $(A, p, r)$

1 **para** $j \leftarrow p, p{+}5, p{+}5 \cdot 2, \ldots$ **até** $p{+}5(\lceil n/5 \rceil {-}1)$ **faça**
2 ORDENE $(A, j, j{+}4)$
3 ORDENE $(A, p{+}5\lfloor n/5 \rfloor, n)$

4 **para** $j \leftarrow 1$ **até** $\lceil n/5 \rceil {-}1$ **faça**
5 $A[j] \leftrightarrow A[p{+}5j{-}3]$
6 $A[\lceil n/5 \rceil] \leftrightarrow A[\lfloor (p{+}5\lfloor n/5 \rfloor {+}n)/2 \rfloor]$

7 $k \leftarrow$ SELECT-BFPRT$(A, p, p{+}\lceil n/5 \rceil {-}1, \lfloor (\lceil n/5 \rceil {+}1)/2 \rfloor)$

8 $A[k] \leftrightarrow A[r]$
9 **devolva** PARTICIONE $(A, p, r)$

# Consumo de tempo do Particione-BFPRT

$P(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo PARTICIONE-BFPRT quando $n = r - p + 1$

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1-3 | $= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1)$ |
| 4-6 | $= \lceil n/5 \rceil \, \Theta(1)$ |
| 7 | $= T(\lceil n/5 \rceil)$ |
| 8 | $= \Theta(1)$ |
| 9 | $= \Theta(n)$ |

$$P(n) = \Theta(2\lceil n/5 \rceil + n + 1) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

$$= \Theta(n) + T(\lceil n/5 \rceil)$$

# Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo do algoritmo SELECT-BFPRT quando $n = r - p + 1$

Temos que

$$T(1) = \Theta(1) \quad \text{para } n < 30$$

$$T(n) \leq \Theta(1) + P(n) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right)$$

$$\leq \Theta(1) + \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right)$$

$$= \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right)$$

para $n = 30, 31, \ldots$,

# Consumo de tempo do Select-BFPRT

$T(n)$ pertence a mesma classe $\mathrm{O}$ que:

$$S(n) = 1 \text{ para } n < 30$$

$$S(n) \leq S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n \text{ para } n \geq 30$$

| $n$ | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | 240 | 270 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(n)$ | 32 | 185 | 330 | 451 | 572 | 732 | 902 | 1040 | 1224 | 1439 |

Vamos verificar que $S(n) < 80\,n$ para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Prova: Se $n = 1, \ldots, 29$, então $S(n) = 1 < 80 < 80n$.
Se $n = 30, \ldots, 99$, então

$$S(n) < S(120) = 451 < 80 \times 30 \leq 80n.$$

# Recorrência

Se $n \geq 100$, então

$$S(n) \leq S\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + S\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n$$

$$\overset{\text{hi}}{<} 80\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + 80\left(\left\lfloor \frac{7n}{10} \right\rfloor + 6\right) + n$$

$$\leq 80\left(\frac{n}{5} + 1\right) + 80\left(\frac{7n}{10} + 6\right) + n$$

$$= 80\frac{n}{5} + 80 + 80\frac{7n}{10} + 480 + n$$

$$= 16n + 56n + n + 560$$

$$= 73n + 560$$

$$< 80n \quad \text{(pois } n \geq 100\text{)}.$$

Logo, $T(n)$ é $O(n)$.

# Conclusão

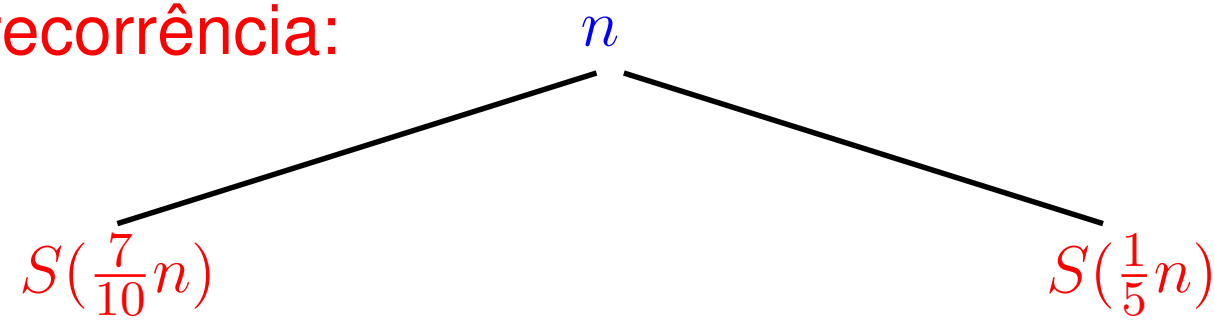
O consumo de tempo do algoritmo SELECT-BFPRT é $\mathrm{O}(n)$.

# Como adivinhei classe $\mathrm{O}$?

Árvore da recorrência: $S(n)$

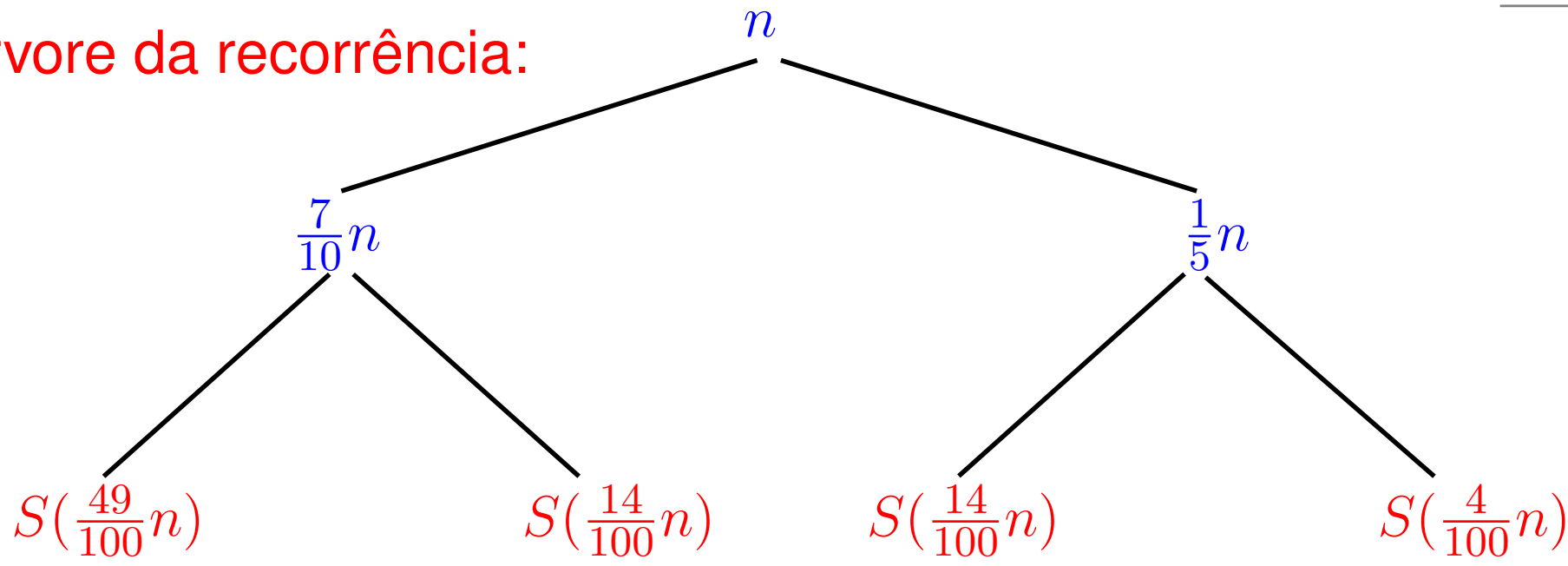
# Como adivinhei classe $O$?

Árvore da recorrência:



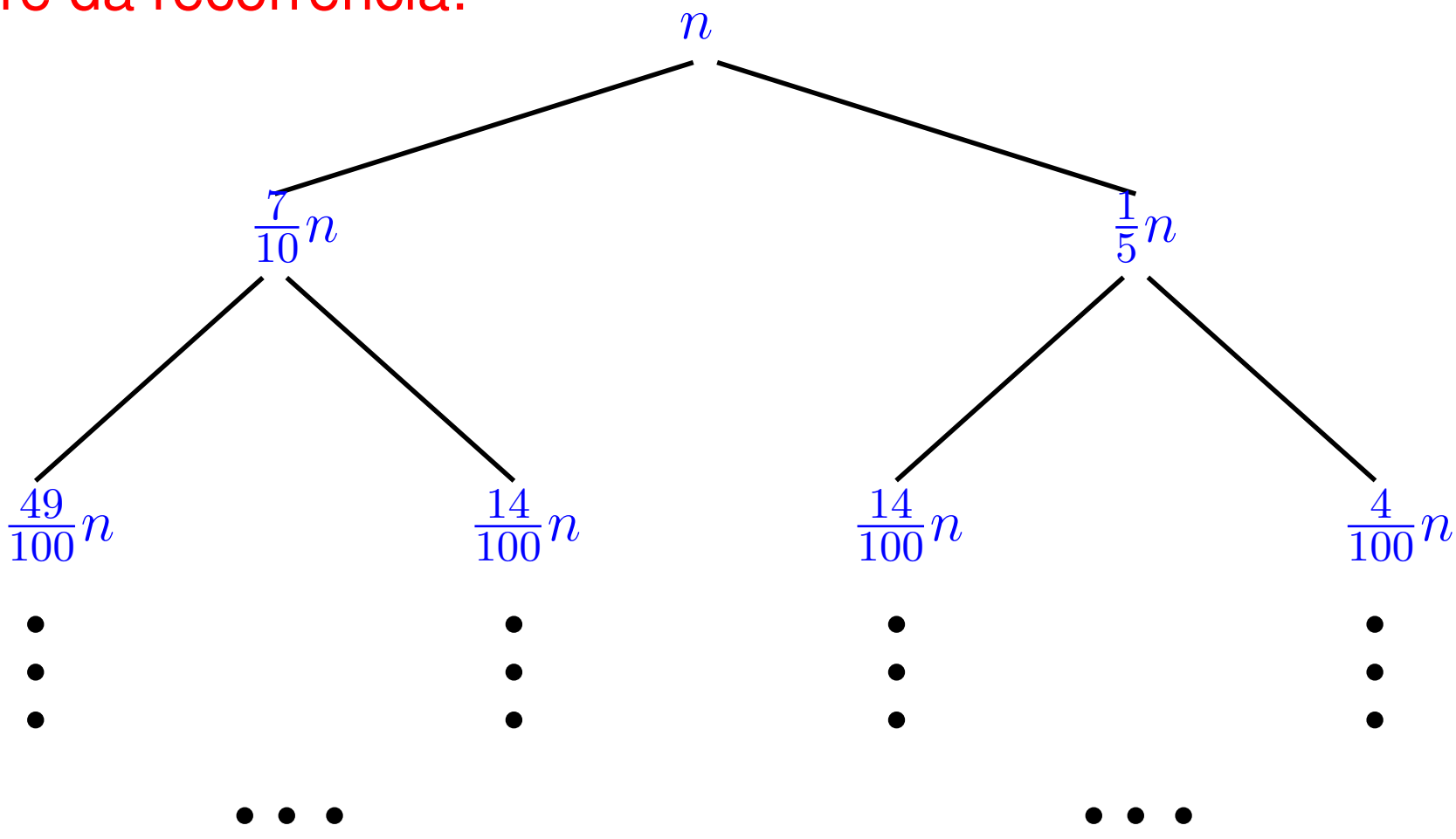
# Como adivinhei classe $O$?

Árvore da recorrência:



# Como adivinhei classe $O$?

Árvore da recorrência:



# Contabilidade

| nível | 0 | 1 | 2 | $\ldots$ | $k-1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| soma | $n$ | $\frac{9}{10}n$ | $\frac{9^2}{10^2}n$ | $\ldots$ | $\frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n$ | $\frac{9^k}{10^k}n$ |

$$\frac{10^{k-1}}{9^{k-1}} < n \leq \frac{10^k}{9^k} \Rightarrow k = \lceil \log_{\frac{10}{9}} n \rceil$$

$$\begin{aligned} S(n) &= n + \frac{9}{10}n + \cdots + \frac{9^{k-1}}{10^{k-1}}n + \frac{9^k}{10^k}n \\ &= (1 + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{9^k}{10^k})n \\ &= 10(1 - \frac{9^{k+1}}{10^{k+1}})n \\ &< 10n \end{aligned}$$