

AULA 9

Análise probabilística

CLRS 5.1, C.2, C.3

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1 \dots n]$ de números inteiros positivos distintos.

MAX (A, n)

1 $max \leftarrow 0$

2 **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

3 **se** $A[i] > max$

4 **então** $max \leftarrow A[i]$

5 **devolva** max

Quantas vezes linha 4 é executada?

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1 \dots n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX ( $A, n$ )  
1    $max \leftarrow 0$   
2   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  
3       se  $A[i] > max$   
4           então  $max \leftarrow A[i]$   


---

5   devolva  $max$ 
```

Quantas vezes linha 4 é executada?
Melhor caso, pior caso, **caso médio**?

Máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1..n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX ( $A, n$ )  
1    $max \leftarrow 0$   
2   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  
3       se  $A[i] > max$   
4           então  $max \leftarrow A[i]$   


---

5   devolva  $max$ 
```

Quantas vezes linha 4 é executada?

Melhor caso, pior caso, **caso médio**?

Suponha que $A[1..n]$ é permutação **aleatória uniforme** de $1, \dots, n$

Cada permutação tem **probabilidade** $1/n!$.

Um pouco de probabilidade

(S, Pr) **espaço de probabilidade**

S = conjunto finito (**eventos elementares**)

$\text{Pr}\{\}$ = (**distribuição de probabilidades**) função de S em $[0, 1]$ tal que

p1. $\text{Pr}\{s\} \geq 0;$

p2. $\text{Pr}\{S\} = 1;$ e

p3. $R, T \subseteq S, R \cap T = \emptyset \Rightarrow \text{Pr}\{R \cup T\} = \text{Pr}\{R\} + \text{Pr}\{T\}.$

$$\text{Pr}\{U\} \text{ é abreviação de } \sum_{u \in U} \text{Pr}\{u\}.$$

Um pouco de probabilidade

(S, Pr) **espaço de probabilidade**

S = conjunto finito (**eventos elementares**)

$\text{Pr}\{\}$ = (**distribuição de probabilidades**) função de S em $[0, 1]$ tal que

p1. $\text{Pr}\{s\} \geq 0$;

p2. $\text{Pr}\{S\} = 1$; e

p3. $R, T \subseteq S, R \cap T = \emptyset \Rightarrow \text{Pr}\{R \cup T\} = \text{Pr}\{R\} + \text{Pr}\{T\}$.

$$\text{Pr}\{U\} \text{ é abreviação de } \sum_{u \in U} \text{Pr}\{u\}.$$

No problema do máximo:

● S é o conjunto das permutações dos números em $A[1 \dots n]$;

● na distribuição uniforme, para cada $s \in S$, $\text{Pr}\{s\} = 1/n!$.

Eventos

Um **evento** é um subconjunto de S .

Eventos

Um **evento** é um subconjunto de S .

No problema do máximo, eventos são subconjuntos de permutações de $A[1..n]$.

Exemplo.

$U := \{\text{permutações de } A[1..n] \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$

é um evento de S .

Eventos

Um **evento** é um subconjunto de S .

No problema do máximo, eventos são subconjuntos de permutações de $A[1..n]$.

Exemplo.

$U := \{\text{permutações de } A[1..n] \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$

é um evento de S .

Se $\Pr\{\}$ é distribuição uniforme, então

$$\Pr\{U\} = ???.$$

Eventos

Um **evento** é um subconjunto de S .

No problema do máximo, eventos são subconjuntos de permutações de $A[1..n]$.

Exemplo.

$U := \{\text{permutações de } A[1..n] \text{ em que } A[n] \text{ é máximo}\}$

é um evento de S .

Se $\text{Pr}\{\}$ é distribuição uniforme, então

$$\text{Pr}\{U\} = 1/n.$$

Probabilidade condicional

A **probabilidade condicional** de ocorrer um evento E ocorrer dado que um evento F ocorreu é

$$\Pr\{E \mid F\} = \frac{\Pr\{E \cap F\}}{\Pr\{F\}}.$$

A expressão acima só faz sentido quando $\Pr\{F\} \neq 0$.

$\Pr\{E \mid F\}$ lê-se “A probabilidade de E dado F ”.

Intuitivamente, estamos interessados na probabilidade de ocorrer $E \cap F$ dentro de F . Como F define a nossa restrição do espaço, normalizamos as probabilidades dividindo por $\Pr\{F\}$.

Rescrevendo, temos que

$$\Pr\{E \cap F\} = \Pr\{F\} \times \Pr\{E \mid F\}.$$

Probabilidade condicional (exemplo)

$E := \{\text{permutações de } A[1..4] \text{ em que } A[1] = 1 \text{ e } A[2] = 2\}$

$F := \{\text{permutações de } A[1..4] \text{ em que } A[1] = 1\}$

$$\Pr\{E \cap F\} = \Pr\{E\} = 2!/4! = 1/12$$

$$\Pr\{F\} = 3!/4! = 1/4$$

Logo,

$$\Pr\{E \mid F\} = \frac{\Pr\{E \cap F\}}{\Pr\{F\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Verifique que $1/3$ das permutações de $A[1..4]$ com $A[1] = 1$ têm $A[2] = 2$.

Variáveis aleatórias e esperança

Uma **variável aleatória** é uma função numérica definida sobre os eventos elementares.

Variáveis aleatórias e esperança

Uma **variável aleatória** é uma função numérica definida sobre os eventos elementares.

Exemplo de variável aleatória

$X(A) :=$ número de execuções da linha 4 em **MAX**(A, n)

Variáveis aleatórias e esperança

Uma **variável aleatória** é uma função numérica definida sobre os eventos elementares.

Exemplo de variável aleatória

$X(A) :=$ número de execuções da linha 4 em **MAX**(A, n)

“ $X = k$ ” é uma abreviação de $\{s \in S : X(s) = k\}$

Esperança $E[X]$ de uma variável aleatória X

$$E[X] = \sum_{k \in X(S)} k \cdot \Pr\{X = k\} = \sum_{s \in S} X(s) \cdot \Pr\{s\}$$

Variáveis aleatórias e esperança

Uma **variável aleatória** é uma função numérica definida sobre os eventos elementares.

Exemplo de variável aleatória

$X(A) :=$ número de execuções da linha 4 em **MAX**(A, n)

“ $X = k$ ” é uma abreviação de $\{s \in S : X(s) = k\}$

Esperança $E[X]$ de uma variável aleatória X

$$E[X] = \sum_{k \in X(S)} k \cdot \Pr\{X = k\} = \sum_{s \in S} X(s) \cdot \Pr\{s\}$$

Linearidade da esperança: $E[\alpha X + Y] = \alpha E[X] + E[Y]$

De volta ao máximo

Problema: Encontrar o elemento máximo de um vetor $A[1 \dots n]$ de números inteiros positivos distintos.

```
MAX ( $A, n$ )  
1    $max \leftarrow 0$   
2   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  
3       se  $A[i] > max$   
4           então  $max \leftarrow A[i]$   


---

5   devolva  $max$ 
```

Quantas vezes linha 4 é executada no **caso médio**?

Suponha que $A[1 \dots n]$ é permutação **aleatória uniforme** de $1, \dots, n$

Cada permutação tem **probabilidade** $1/n!$.

Exemplos

$A[1 \dots 2]$	linha 4
1,2	2
2,1	1
$E[X]$	$3/2$

$A[1 \dots 3]$	linha 4
1,2,3	3
1,3,2	2
2,1,3	2
2,3,1	2
3,1,2	1
3,2,1	1
$E[X]$	$11/6$

Mais um exemplo

$A[1 \dots 4]$	linha 4	$A[1 \dots 4]$	linha 4
1,2,3,4	4	3,1,2,4	2
1,2,4,3	3	3,1,4,2	2
1,3,2,4	3	3,2,1,4	2
1,3,4,2	3	3,2,4,1	2
1,4,2,3	2	3,4,1,2	2
1,4,3,2	2	3,4,2,1	2
2,1,3,4	3	4,1,2,3	1
2,1,4,3	2	4,1,3,2	1
2,3,1,4	3	4,2,1,3	1
2,3,4,1	3	4,2,3,1	1
2,4,1,3	2	4,3,1,2	1
2,4,3,1	2	4,3,2,1	1

Variáveis aleatórias indicadoras

X = número total de execuções da linha 4

Variáveis aleatórias indicadoras

X = número total de execuções da linha 4

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se “} \textit{max} \leftarrow A[i] \text{” é executado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X = número total de execuções da linha 4

$$= X_1 + \cdots + X_n$$

Variáveis aleatórias indicadoras

X = número total de execuções da linha 4

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se “} \textit{max} \leftarrow A[i] \text{” é executado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X = número total de execuções da linha 4

$$= X_1 + \dots + X_n$$

Esperanças:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= 0 \times \Pr\{X_i = 0\} + 1 \times \Pr\{X_i = 1\} \\ &= \Pr\{X_i = 1\} \\ &= \text{probabilidade de que } A[i] \text{ seja} \\ &\quad \text{máximo em } A[1 \dots i] \\ &= 1/i \end{aligned}$$

Esperança

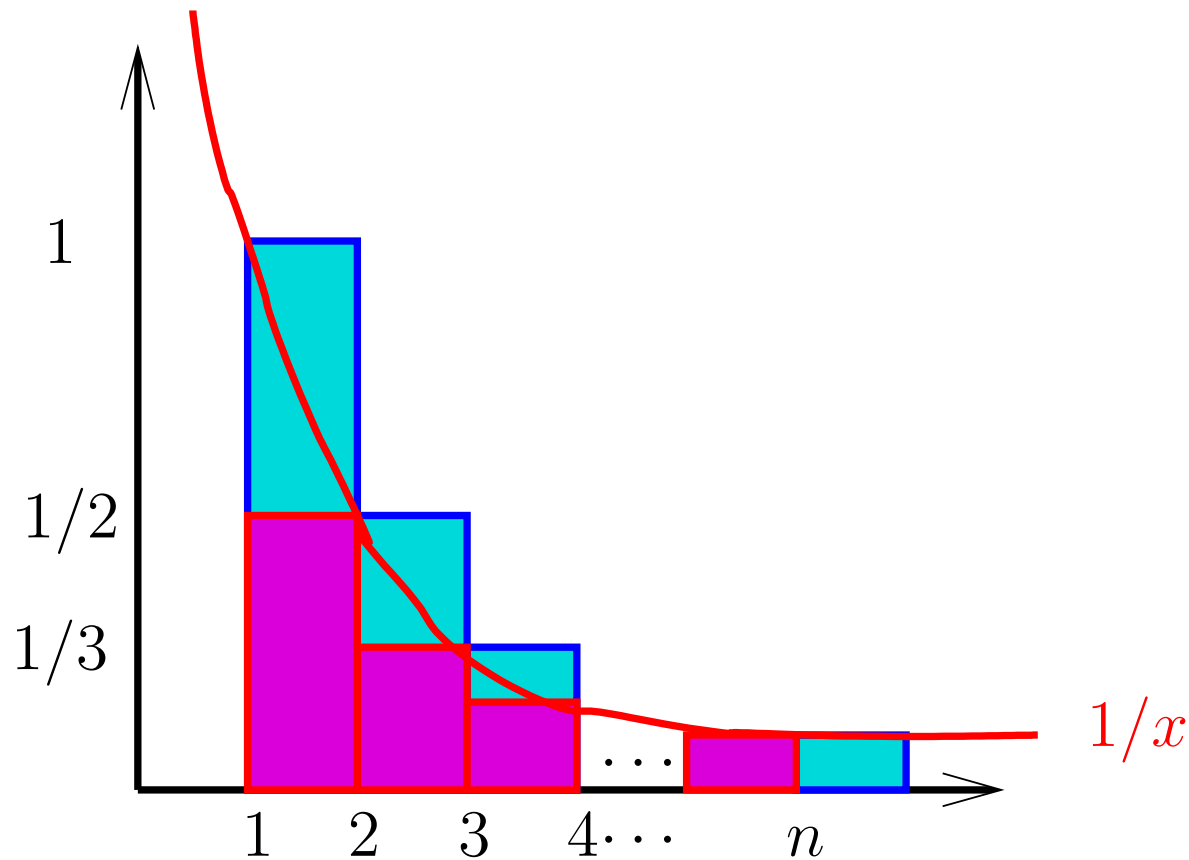
$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + \cdots + X_n] \\ &= E[X_1] + \cdots + E[X_n] \\ &= 1/1 + \cdots + 1/n \\ &< 1 + \ln n \\ &= O(\lg n) \end{aligned}$$

$$2.92 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10} < 2.93 < 3.30 < 1 + \ln 10$$

$$5.18 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{100} < 5.19 < 5.60 < 1 + \ln 100$$

$$9.78 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10000} < 9.79 < 10.21 < 1 + \ln 10000$$

Série harmônica



$$\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} < H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n$$

Experimentos

Para cada valor de $n = 252, 512, 1024, \dots$ foram geradas 10, 100 ou 200 amostras de seqüências de inteiros através do trecho de código

```
for (i = 0; i < n; i++) {  
    v[i] = (int) ((double) INT_MAX * rand() / (RAND_MAX + 1  
}
```

onde `rand()` é a função geradora de números (pseudo-)aleatórios da biblioteca do C.

A coluna $E[\hat{X}]$ nas tabelas a seguir mostra o número médio de vezes que a linha 4 do algoritmo **MAX** foi executada para cada valor de n e cada amostra de seqüências.

Experimentos (10)

n	$E[\hat{X}]$	$1 + \ln n$
256	7.20	6.55
512	6.90	7.24
1024	7.30	7.93
2048	7.10	8.62
4096	10.20	9.32
8192	9.00	10.01
16384	10.80	10.70
32768	11.00	11.40
65536	12.50	12.09
131072	12.60	12.78
262144	13.20	13.48
524288	13.20	14.17
1048576	12.80	14.86
2097152	13.90	15.56
4194304	14.90	16.25
8388608	17.90	16.94

Experimentos (100)

n	$E[\hat{X}]$	$1 + \ln n$
256	5.92	6.55
512	6.98	7.24
1024	7.55	7.93
2048	8.39	8.62
4096	8.97	9.32
8192	9.26	10.01
16384	10.44	10.70
32768	11.32	11.40
65536	11.66	12.09
131072	12.38	12.78
262144	13.17	13.48
524288	13.56	14.17
1048576	14.54	14.86
2097152	15.10	15.56
4194304	15.61	16.25
8388608	16.56	16.94

Experimentos (200)

n	$E[\hat{X}]$	$1 + \ln n$
256	6.12	6.55
512	6.86	7.24
1024	7.38	7.93
2048	7.96	8.62
4096	8.87	9.32
8192	9.41	10.01
16384	10.28	10.70
32768	10.92	11.40
65536	11.31	12.09
131072	12.37	12.78
262144	12.92	13.48
524288	13.98	14.17
1048576	14.19	14.86
2097152	15.62	15.56
4194304	15.74	16.25
8388608	17.06	16.94

Resumo de probabilidade

(S, Pr) **espaço de probabilidade**, S = conjunto finito
(**eventos elementares**)

$\text{Pr}\{\}$ = (**distribuição de probabilidades**) função de S em $[0, 1]$ tal que

p1. $\text{Pr}\{s\} \geq 0$;

p2. $\text{Pr}\{S\} = 1$; e

p3. $A, B \subseteq S, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{Pr}\{A \cup B\} = \text{Pr}\{A\} + \text{Pr}\{B\}$.

Um **evento** é um subconjunto de S .

Uma **variável aleatória** é uma função numérica definida sobre os eventos elementares.

“ $X = k$ ” é uma abreviação de $\{s \in S : X(s) = k\}$

$$E[X] = \sum_{k \in X(S)} k \cdot \text{Pr}\{X = k\} = \sum_{s \in S} X(s) \cdot \text{Pr}\{s\}$$

Algoritmos aleatorizados ou probabilístico

CLRS 5.2, 5.3, C.2, C.3

Algoritmos aleatorizados ou probabilístico

Um algoritmo é **probabilístico** ou **aleatorizado** se o seu comportamento não é determinado apenas pela entrada, mas também depende dos valores produzidos por um gerador de números aleatórios.

RANDOM(a, b): devolve um inteiro i , $a \leq i \leq b$.

Algoritmos aleatorizados ou probabilístico

Um algoritmo é **probabilístico** ou **aleatorizado** se o seu comportamento não é determinado apenas pela entrada, mas também depende dos valores produzidos por um gerador de números aleatórios.

RANDOM(a, b): devolve um inteiro i , $a \leq i \leq b$.

Todos os inteiros devolvido por **RANDOM** são independentes dos inteiros previamente devolvidos com probabilidade uniforme, em outras palavras:

$$\Pr\{\mathbf{RANDOM}(a, b) = i\} = ???.$$

Algoritmos aleatorizados ou probabilístico

Um algoritmo é **probabilístico** ou **aleatorizado** se o seu comportamento não é determinado apenas pela entrada, mas também depende dos valores produzidos por um gerador de números aleatórios.

RANDOM(a, b): devolve um inteiro i , $a \leq i \leq b$.

Todos os inteiros devolvido por **RANDOM** são independentes dos inteiros previamente devolvidos com probabilidade uniforme, em outras palavras:

$$\Pr\{\text{RANDOM}(a, b) = i\} = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Existem implementações aproximadas de **RANDOM**. Veja D.E. Knuth, *Seminumerical algorithms*, volume 2, *The Art of Computer Programming*.

Permutação aleatória uniforme

Problema: Obter uma **permutação aleatória uniforme** de um dado vetor $A[1 \dots n]$ de números inteiros positivos distintos.

Permutação *in-place*

Devolve uma **permutação aleatória uniforme** de $A[1 \dots n]$.

PERMUTE-IN-PLACE(A, n)

```
1  para  $i \leftarrow 1$  até  $n - 1$  faça
2       $j \leftarrow \text{RANDOM}(i, n)$ 
3       $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
```

Não é óbvio que isso produz permutação aleatória uniforme de $A[1 \dots n]$.

Consumo de tempo: $\Theta(n)$, supondo que **RANDOM** é $\Theta(1)$.

Uniformidade

Considere uma permutação $B[1..n]$ de $A[1..n]$.

Qual é a probabilidade de **PERMUTE-IN-PLACE**(A, n) produzir $B[1..n]$?

Uniformidade

Considere uma permutação $B[1..n]$ de $A[1..n]$.

Qual é a probabilidade de **PERMUTE-IN-PLACE**(A, n) produzir $B[1..n]$?

Relação invariante: Na linha 1 vale que

$$(i0) \Pr\{B[1..i-1] = A[1..i-1]\} = (n-i+1)!/n!.$$

Uniformidade

Considere uma permutação $B[1..n]$ de $A[1..n]$.

Qual é a probabilidade de **PERMUTE-IN-PLACE**(A, n) produzir $B[1..n]$?

Relação invariante: Na linha 1 vale que

$$(i0) \Pr\{B[1..i-1] = A[1..i-1]\} = (n-i+1)!/n!.$$

Na **última iteração** $i = n$ e da invariante (i0) temos que

$$\Pr\{B[1..n] = A[1..n]\} = (n-i+1)!/n! = 1/n!.$$

A invariante vale no início da **primeira iteração** já que

$$\Pr\{B[1..0] = A[1..0]\} = 1.$$

Uniformidade (cont.)

Considere uma iteração que não seja a última. Da invariante (i0) sabemos que

$$\Pr\{B[1 \dots i - 1] = A[1 \dots i - 1]\} = (n - i + 1)!/n!$$

Se $B[1 \dots i - 1] = A[1 \dots i - 1]$, então, após a execução da linha 2 temos que

$$\Pr\{B[i] = A[j]\} = \frac{1}{n - i + 1}.$$

Logo, após a execução da linha 3 temos que

$$\Pr\{B[1 \dots i] = A[1 \dots i]\} = \frac{(n - i + 1)!}{n!} \times \frac{1}{n - i + 1} = \frac{(n - i)!}{n!}.$$

Portanto, (i0) vale no início da próxima iteração.

Uniformidade (cont.)

Reescrevendo ... Considere uma iteração que não seja ...

$E := \{\text{após a execução da linha 2 } B[i] = A[j]\}$

$F := \{\text{no início da iteração } B[1 \dots i-1] = A[1 \dots i-1]\}$

Após a execução da linha 3, ao final da iteração, vale que

$$\begin{aligned}\Pr\{B[1 \dots i] = A[1 \dots i]\} &= \Pr\{E \cap F\} \\ &= \Pr\{F\} \times \Pr\{E \mid F\} \\ &= \frac{(n - i + 1)!}{n!} \times \frac{1}{n - i + 1} \\ &= \frac{(n - i)!}{n!}\end{aligned}$$

Portanto, (i0) vale no início da próxima iteração.

Permutação por ordenação

Devolve uma permutação aleatória uniforme de $A[1..n]$.

PERMUTE-POR-ORDENAÇÃO (A, n)

- 1 para $i \leftarrow 1$ até n faça
- 2 $P[i] \leftarrow \text{RANDOM}(1, n^3)$
- 3 ordene $A[1..n]$ com chaves $P[1..n]$

No começo da linha 3, com grande probabilidade, $P[1..n]$ não tem elementos repetidos (**Exercício 5.3-5** do CLRS).

Linha 3 faz permutação $A[j_1..j_n]$ de $A[1..n]$ tal que

$$P[j_1] \leq \dots \leq P[j_n].$$

Consumo de tempo: $\Theta(n \lg n)$ se **RANDOM** for $\Theta(1)$

Max aleatorizado

Devolve o elemento máximo de um vetor $A[1 \dots n]$.

```
MAX-ALEATORIZADO( $A, n$ )
0  PERMUTE( $A, n$ )
1   $max \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3      se  $A[i] > max$ 
4          então  $max \leftarrow A[i]$ 
5  devolva  $max$ 
```

Linha 0 faz uma permutação aleatória uniforme dos elementos de A .

Qual é a entrada que dá o **pior caso**?

Exercícios

Exercício 15.A [CLRS 5.3-3]

Que acontece se trocarmos “**RANDOM**(i, n)” por “**RANDOM**($1, n$)” no algoritmo **PERMUTE-IN-PLACE**? O algoritmo continua produzindo permutação aleatória uniforme?

Exercício 15.B [CLRS C.3-2]

Um vetor $A[1..n]$ contém n números distintos aleatoriamente ordenados. Suponha que cada permutação dos n números é igualmente provável. Qual é a esperança do índice do maior elemento do vetor? Qual é a esperança do índice do menor elemento do vetor?