Melhores momentos

AULA PASSADA

Classe O da solução de uma recorrência

Não faço questão de solução exata: basta solução assintótica (em notação O, se possível Θ)

Exemplo:

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16, \ldots \end{aligned}$$

Solução exata: $G(n) = 7n\lg n + 3n - 2$

Solução assintótica: $G(n) = \mathrm{O}(n\lg n)$ $\quad (G(n) = \Theta(n\lg n))$

Em geral, é mais fácil obter e provar solução assintótica que solução exata

Método das substituições iterativas

Exemplo:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 6\,T(n-1) + 4n^3 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

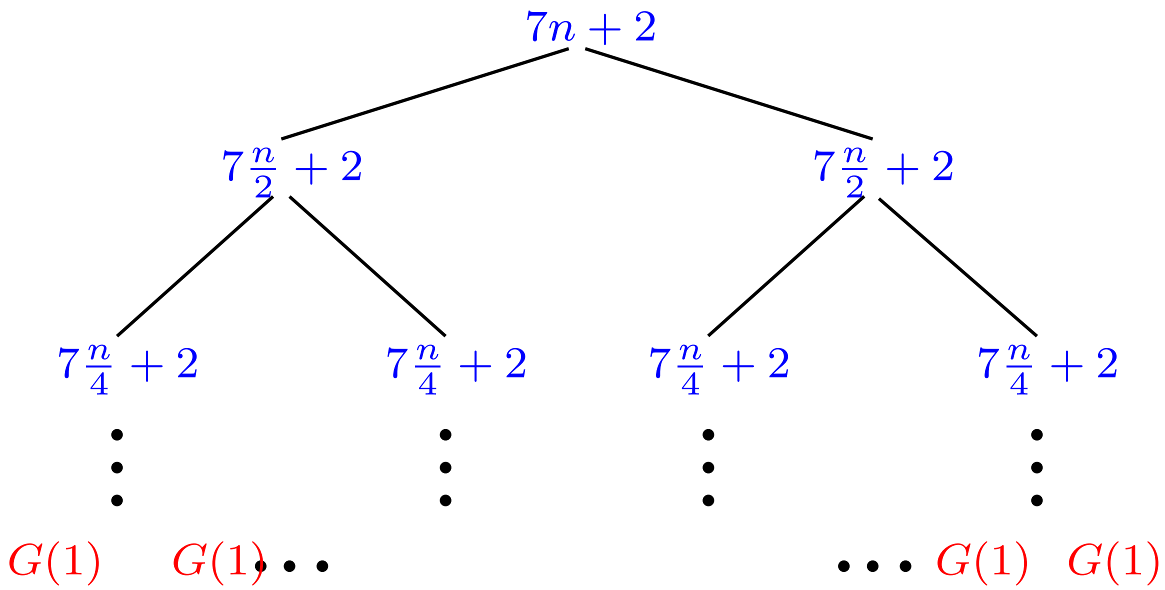
$$\begin{aligned} T(n) &= 6\,T(n-1) + n^3 \\ &= 6\,(6\,T(n-2) + (n-1)^3) + n^3 \\ &= 6\,(6\,(6\,(T(n-3) + (n-2)^3) + (n-1)^3) + n^3 \\ &= 6\,(6\,(6\,(6\,(T(n-4) + (n-3)^3) + (n-2)^3) + (n-1)^3) + n^3 \\ &= \ldots \\ &= 6^{n-1} + 6^{n-2}\,(2^3) + \cdots + 6^2\,(n-2)^3 + 6\,(n-1)^3 + n^3 \\ &= \Theta(6^n) \qquad \text{(Verificar este último '$=$')} \end{aligned}$$

Método da árvore da recorrência

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 1 \\
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots
\end{aligned}
$$

$$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$$



total de $1 + \lg n$ níveis

Método do chute-e-demonstre

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 1 \\
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots
\end{aligned}
$$

Acho que $G(n)$ é da forma $n \lg n$ . . .

n	$G(n)$	$6n \lg n$	$7n \lg n$	$8n \lg n$	n^2
1	1	0	0	0	1
2	18	12	14	16	4
4	66	48	56	64	16
8	190	144	168	192	64
16	494	384	448	512	256
32	1214	960	1120	1280	1024
64	2878	2304	2688	3072	4096
128	6654	5376	6272	7168	16384
256	15102	12288	14336	16384	65536

Dica prática (sem prova)

A solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 2T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

e na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T''(4) &= 10 \\ T''(n) &= 2T''(n/2) + n \quad \text{para } n = 2^3, 2^4, 2^5, \ldots \end{aligned}$$

Teorema Bambambã

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é um qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

	1									n
A	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

Sai:

	1		3				7			n
A	31	−41	59	26	−53	58	97	−93	−23	84

$A[e\,..\,d] = A[3\,..\,7]$ é segmento de soma máxima.
$A[3\,..\,7]$ tem soma 187.

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-3 é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-2 é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-DC é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-1 é $\Theta(n)$.

Técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (SEG-MAX-2, SEG-MAX-1, programação dinâmica).
- Pré-processar os dados. O HEAPSORT pré-processa os dados armazenando-os em uma estrutura de dados para realizar computações futuras mais eficientemente.
- Divisão-e-conquista. MERGE-SORT e SEG-MAX-DC utilizam uma forma conhecidade dessa técnica.
- Algoritmos incrementais/varredura. Como estender a solução de um subproblema a uma solução do problema (SEG-MAX-1).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (SegMaxu).

Resultados experimentais

n	SEG-MAX-2		SEG-MAX-3	
	clock	user time	clock	user time
1000	0.01	0.01	2.91	2.92
2000	0.03	0.03	23.00	23.04
3000	0.08	0.08	77.58	1m17.57
5000	0.24	0.24	360.78	6m0.45s
10000	1.16	1.62	2940	49m27.32
20000	4.8	4.82	?	?
50000	42.8	42.96	?	?
100000	188.0	3m7.58s	?	?
200000	911.74	15m10.34s	?	?
400000	?	64m22.880s	?	?

Resultados experimentais

n (M)	SEG-MAX-1 A clock	SEG-MAX-1 A user time	SEG-MAX-1 B clock	SEG-MAX-1 B user time
1	0.06	0.11	0.08	0.07
2	0.11	0.23	0.15	0.06
3	0.16	0.28	0.30	0.12
6	0.32	0.63	0.56	0.29
8	0.43	0.80	0.71	0.43
10	0.55	1.03	1.00	0.52
15	0.82	1.55	1.37	0.64
20	1.08	2.03	2.17	0.95
25	1.37	2.52	2.44	1.38
30	1.70	3.13	3.28	1.68

[a]

[a] Todos os tempos estão em segundos.

AULA 6

Mais análise de algoritmos recursivos

CLRS 2.1–2.2, 28.2

AU 3.3, 3.6 (muito bom)

Notas de AA de Jeff Edmonds:

`http://www.cs.yorku.ca/~jeff/notes/3101/`

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Multiplicação de inteiros gigantescos

$n :=$ número de algarismos.

Problema: Dados dois números inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Entra: Exemplo com $n = 12$

	12											1
X	9	2	3	4	5	5	4	5	6	2	9	8
Y	0	6	3	2	8	4	9	9	3	8	4	4

Sai:

$X \cdot Y$

23																						1
5	8	4	4	0	8	7	2	8	6	7	0	2	7	1	4	1	0	2	9	5	1	2

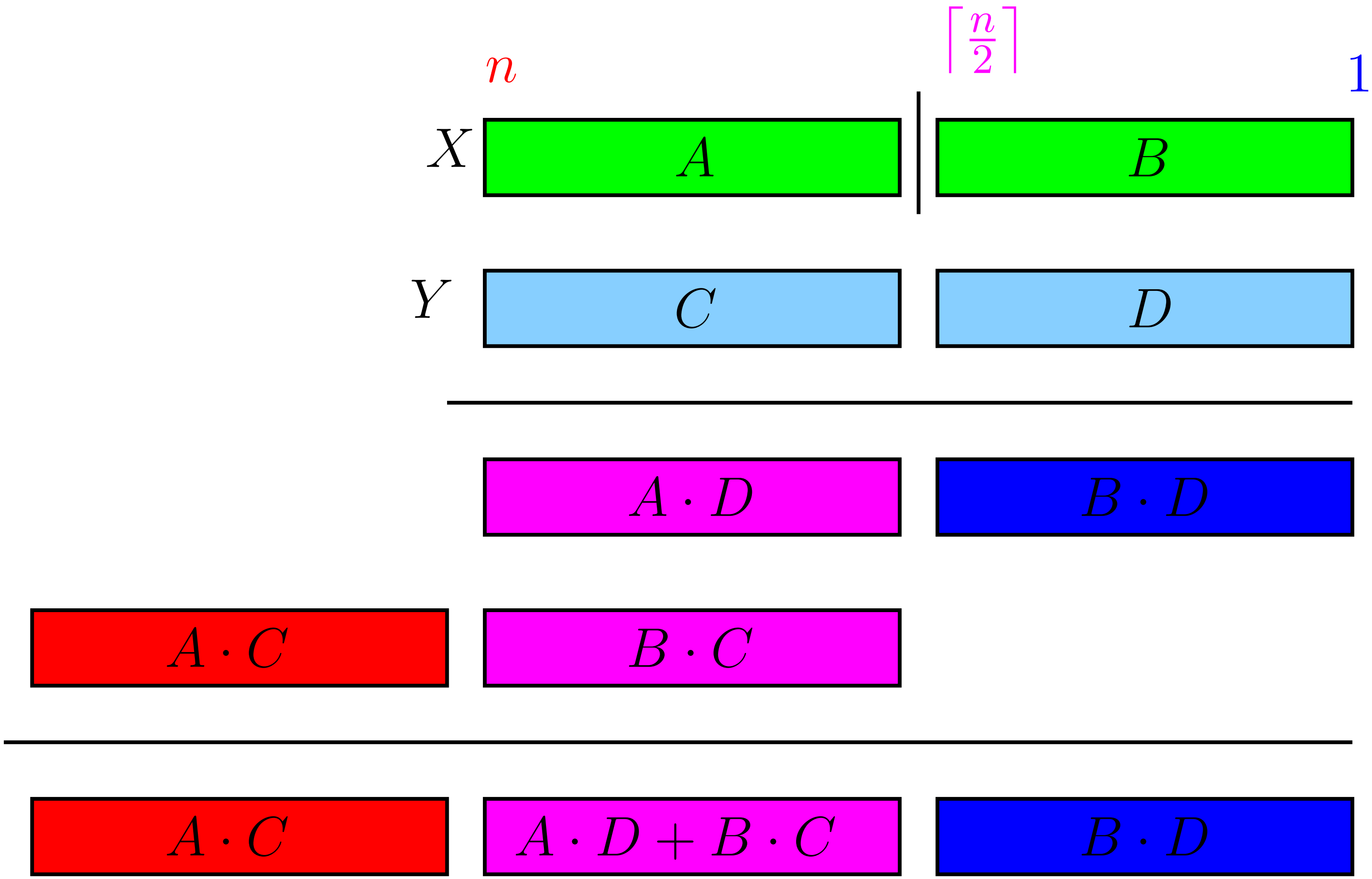
Aplicações em esquemas criptográficos.

Algoritmo do ensino fundamental

```
                           *  *  *  *  *  *  *  *
                        ×  *  *  *  *  *  *  *  *
                        ---------------------------
                        *  *  *  *  *  *  *  *  *
                     *  *  *  *  *  *  *  *  *
                  *  *  *  *  *  *  *  *  *
               *  *  *  *  *  *  *  *  *
            *  *  *  *  *  *  *  *  *
         *  *  *  *  *  *  *  *  *
      *  *  *  *  *  *  *  *  *
   *  *  *  *  *  *  *  *  *
---------------------------------------------------
*  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *  *
```

O algoritmo do ensino fundamental é $\Theta(n^2)$.

Divisão e conquista



$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^{2\lceil n/2 \rceil} + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + B \cdot D$$

Exemplo

	4			1
X	3	1	4	1

	4			1
Y	5	9	3	6

Exemplo

	4			1			4			1
X	3	1	4	1		Y	5	9	3	6

A	3	1	B	4	1	C	5	9	D	3	6

Exemplo

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 4 & & & 1 \end{array} \\ X & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 4 & & & 1 \end{array} \\ Y & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 9 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$A \ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad C \ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 9 \\ \hline \end{array} \qquad D \ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$X \cdot Y = A \cdot C \times 10^4 + (A \cdot D + B \cdot C) \times 10^2 + B \cdot D$$

$A \cdot C = 1829$ $\qquad$ $(A \cdot D + B \cdot C) = 1116 + 2419 = 3535$

$B \cdot D = 1476$

$$\begin{array}{lcccccccc} A \cdot C & 1 & 8 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A \cdot D + B \cdot C) & & & 3 & 5 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ B \cdot D & & & & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline X \cdot Y = & 1 & 8 & 6 & 4 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{array}$$

Algoritmo de Multi-DC

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,.\,.\,n]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

MULT (X, Y, n)
se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
$A \leftarrow X[q+1\,.\,.\,n]$ $\quad$ $B \leftarrow X[1\,.\,.\,q]$
$C \leftarrow Y[q+1\,.\,.\,n]$ $\quad$ $D \leftarrow Y[1\,.\,.\,q]$
$E \leftarrow$ MULT$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
$F \leftarrow$ MULT$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
$G \leftarrow$ MULT$(A, D, \lceil n/2 \rceil)$
$H \leftarrow$ MULT$(B, C, \lceil n/2 \rceil)$
$R \leftarrow E \times 10^{2\lceil n/2 \rceil} + (G + H) \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
devolva R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
8	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(4n+2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 4T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776

Árvore da recorrência

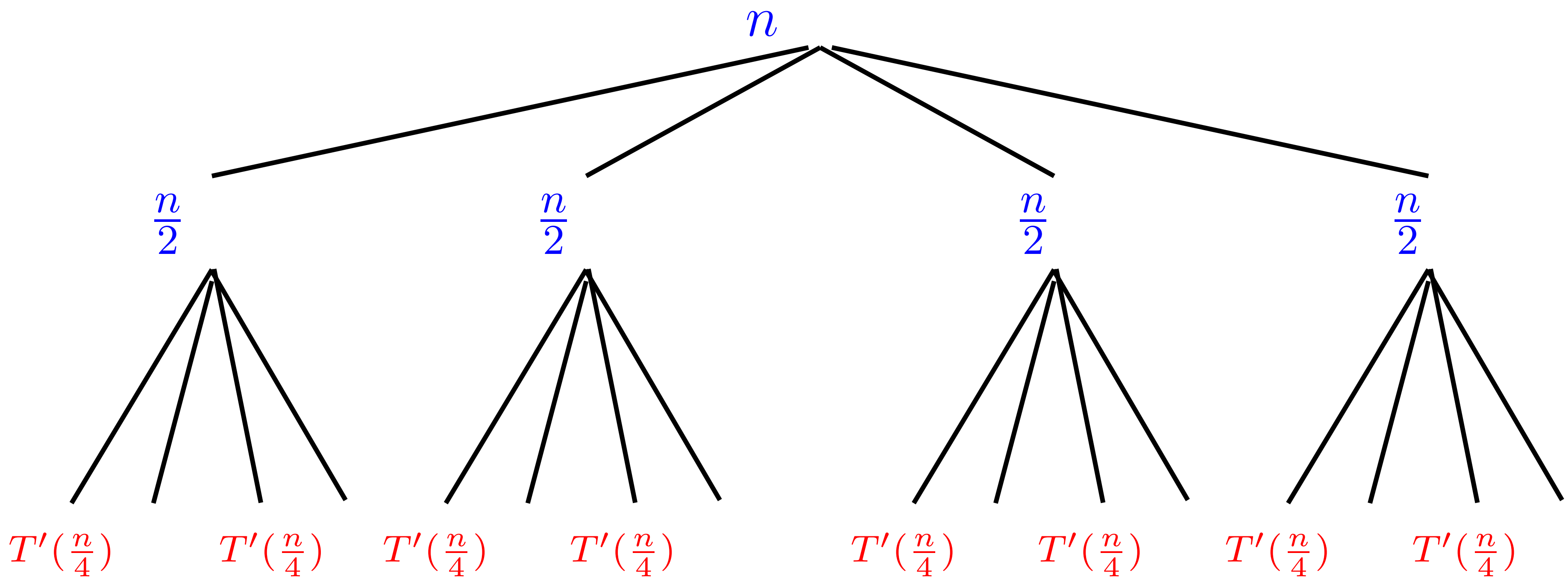
$$T'(n)$$

Árvore da recorrência

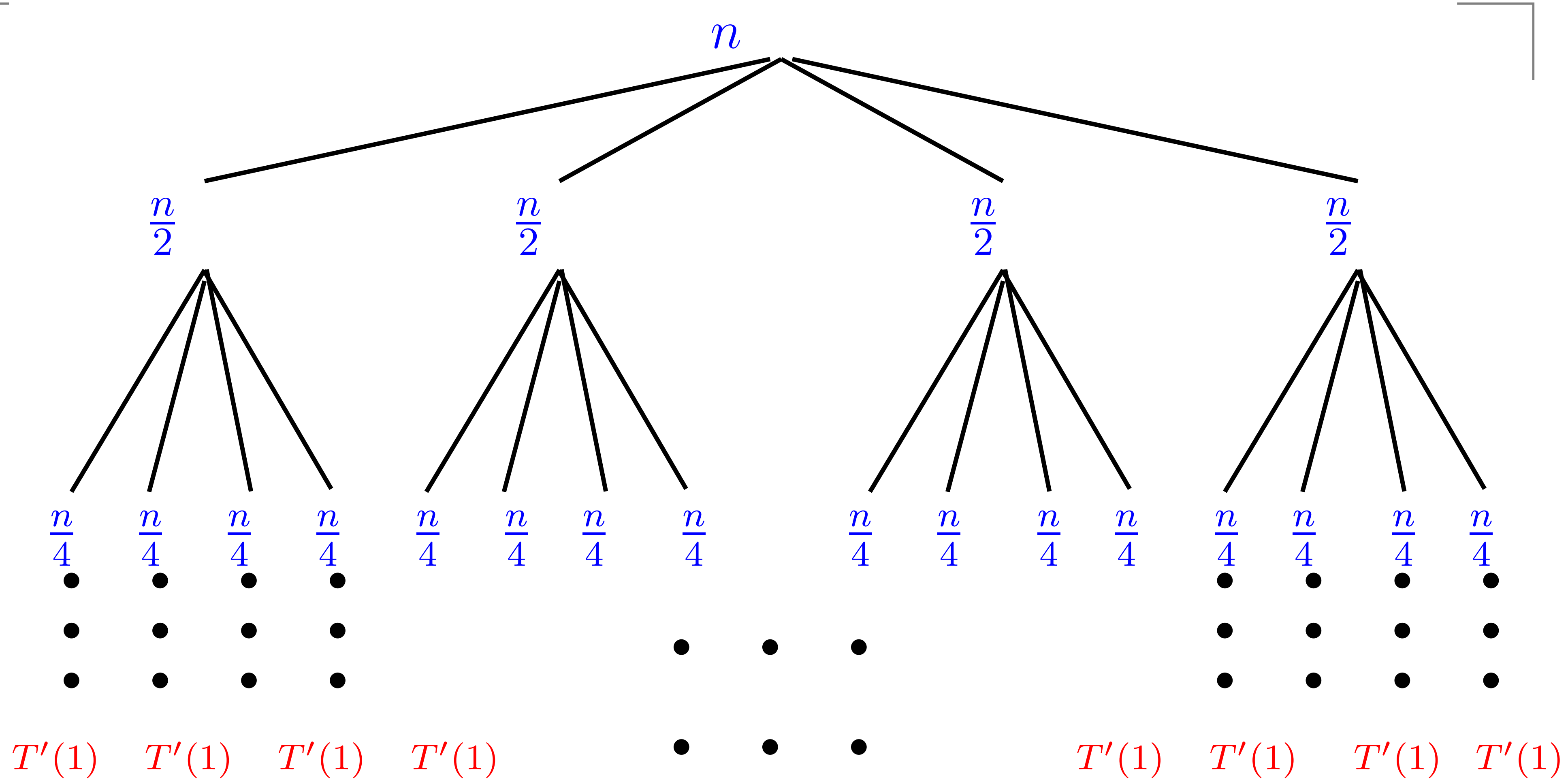
$$n$$

$$T'\left(\frac{n}{2}\right) \qquad T'\left(\frac{n}{2}\right) \qquad T'\left(\frac{n}{2}\right) \qquad T'\left(\frac{n}{2}\right)$$

Árvore da recorrência



Árvore da recorrência



total de $1 + \lg n$ níveis

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	n	$2n$	$4n$	$\ldots$	$2^{k-1}n$	$2^k n$

$n = 2^k$ $\qquad$ $k = \lg n$

Contas

nível	0	1	2	$\dots$	$k-1$	k
soma	n	$2n$	$4n$	$\dots$	$2^{k-1}n$	$2^k n$

$n = 2^k \qquad\qquad k = \lg n$

$$\begin{aligned}
T'(n) &= n + 2n + \cdots + 2^{k-1}n + 2^k n \\
&= n\,(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^k) \\
&= n\,(2^{k+1} - 1) \\
&= n\,(2n - 1) \qquad (k = \lg n) \\
&= 2n^2 - n = \Theta(n^2)
\end{aligned}$$

ÊPA, não melhoroou . . .

Teorema Bambambã

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$. Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Conclusões

$T'(n)$ é $\Theta(n^2)$.

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULT é $\Theta(n^2)$.

Tanto trabalho por nada . . .
Será?!?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b \quad$ e $\quad Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$
\begin{array}{llll}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad+bc & bd
\end{array}
$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?

Pensar pequeno

Olhar para números com 2 algarismos ($n = 2$).

Suponha $X = a\,b$ e $Y = c\,d$.
Se cada multiplicação custa R$ 1,00 e
cada soma custa R$ 0,01, quanto custa $X \cdot Y$?
Eis $X \cdot Y$ por R$ 4,03:

$$\begin{array}{lccc} X & & a & b \\ Y & & c & d \\ \hline & & ad & bd \\ & ac & bc & \\ \hline X \cdot Y & ac & ad + bc & bd \end{array}$$

$$X \cdot Y = ac \times 10^2 + (ad + bc) \times 10^1 + bd$$

Solução mais barata?
Gauss faz por R$ 3,06!

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$X \cdot Y$ por apenas R$ 3,06

$$
\begin{array}{lccc}
X & & a & b \\
Y & & c & d \\
\hline
 & & ad & bd \\
 & ac & bc & \\
\hline
X \cdot Y & ac & ad + bc & bd
\end{array}
$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \Rightarrow$$
$$ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$$

$$g = (a+b)(c+d) \qquad e = ac \qquad f = bd \qquad h = g - e - f$$

$$\boxed{X \cdot Y \ \text{(por R\$ 3,06)} = e \times 10^2 + h \times 10^1 + f}$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 2 \quad Y = 2 \quad X \cdot Y = 4$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \;?$$

$$ac = \;? \qquad bd = \;? \qquad (a+b)(c+d) = \;?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \;?$$

$$ac = 4 \qquad bd = \;? \qquad (a+b)(c+d) = \;?$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$

$$ac = \ 4 \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 1 \quad Y = \ 3 \quad X \cdot Y = \ 3$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 21 \quad Y = 23 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 4 \quad bd = 3 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 3 \quad Y = 5 \quad X \cdot Y = 15$$

Exemplo

$$X = \ 2133 \quad Y = \ 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \ ?$$
$$ac = \ ? \qquad bd = \ ? \qquad (a+b)(c+d) = \ ?$$

$$X = \ 21 \quad Y = \ 23 \qquad\qquad X \cdot Y = \ 483$$
$$ac = \ 4 \qquad bd = \ 3 \qquad (a+b)(c+d) = \ 15$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 33 \quad Y = 12 \qquad X \cdot Y = 396$$
$$ac = 3 \quad bd = 6 \qquad (a+b)(c+d) = 27$$

Exemplo

$$X = \; 2133 \quad Y = \; 2312 \qquad\qquad X \cdot Y = \; ?$$

$$ac = \; 483 \quad bd = \; 396 \quad (a+b)(c+d) = \; ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = ? \quad bd = ? \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$
$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = ?$$

$$X = 54 \quad Y = 35 \qquad X \cdot Y = 1890$$
$$ac = 15 \quad bd = 20 \qquad (a+b)(c+d) = 72$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = ?$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = 1890$$

Exemplo

$$X = 2133 \quad Y = 2312 \qquad X \cdot Y = 4931496$$

$$ac = 483 \quad bd = 396 \qquad (a+b)(c+d) = 1890$$

Algoritmo Karatsuba

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$ (Karatsuba e Ofman).

KARATSUBA (X, Y, n)

se $n \leq 3$ **devolva** $X \cdot Y$
$q \leftarrow \lceil n/2 \rceil$
$A \leftarrow X[q+1\,..\,n]$ $\quad B \leftarrow X[1\,..\,q]$
$C \leftarrow Y[q+1\,..\,n]$ $\quad D \leftarrow Y[1\,..\,q]$
$E \leftarrow$ KARATSUBA$(A, C, \lfloor n/2 \rfloor)$
$F \leftarrow$ KARATSUBA$(B, D, \lceil n/2 \rceil)$
$G \leftarrow$ KARATSUBA$(A+B, C+D, \lceil n/2 \rceil + 1)$
$H \leftarrow G - F - E$
$R \leftarrow E \times 10^{2\lceil n/2 \rceil} + H \times 10^{\lceil n/2 \rceil} + F$
devolva R

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar dois inteiros com n algarismos.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(1)$
3	$=$	$\Theta(n)$
4	$=$	$\Theta(n)$
5	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
6	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil)$
7	$=$	$T(\lceil n/2 \rceil + 1)$
8	$=$	$\Theta(n)$
9	$=$	$\Theta(n)$
10	$=$	$\Theta(n)$
total	$=$	$T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(5n+2)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugerem que a solução da recorrência

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta(1) \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \\
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lceil n/2 \rceil + 1) + \Theta(n) \quad n \geq 4
\end{aligned}
$$

está na mesma classe Θ que a solução de

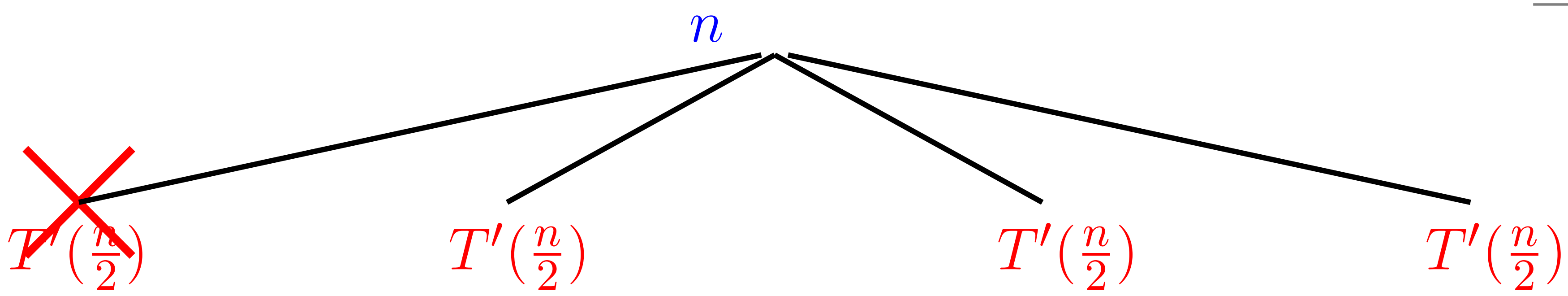
$$
\begin{aligned}
T'(1) &= 1 \\
T'(n) &= 3T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$T'(n)$	1	5	19	65	211	665	2059	6305	19171	58025

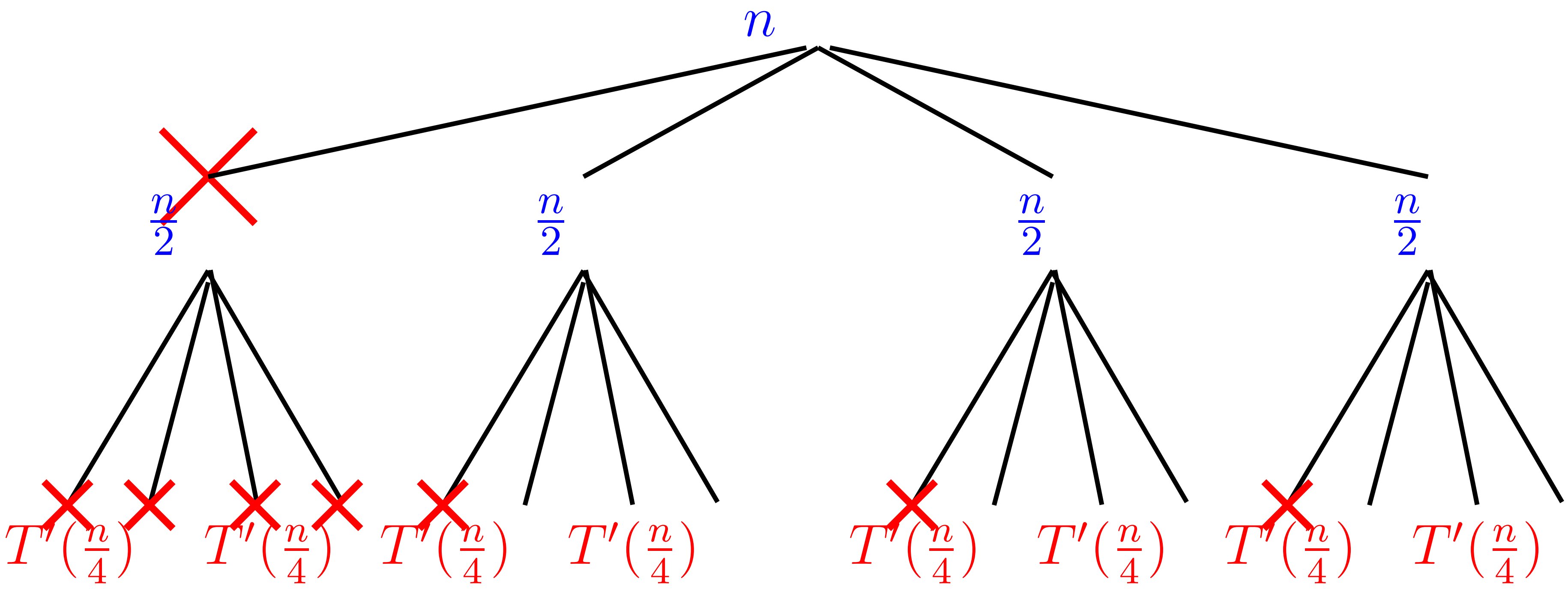
Árvore da recorrência

$T'(n)$

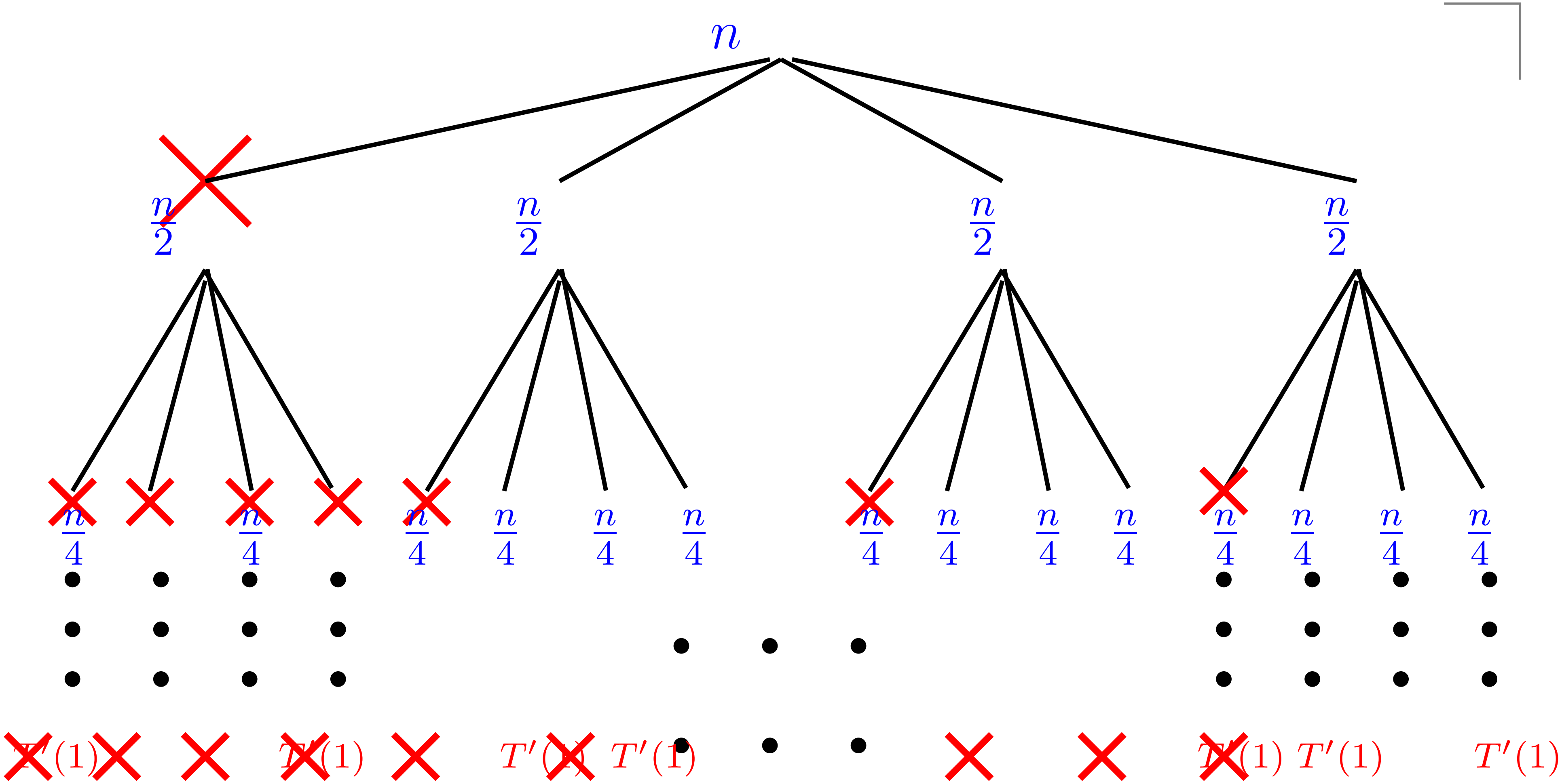
Árvore da recorrência



Árvore da recorrência



Árvore da recorrência



total de $1 + \lg n$ níveis

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	n	$(3/2)n$	$(3/2)^2 n$	$\ldots$	$(3/2)^{k-1} n$	$(3/2)^k n$

$n = 2^k \qquad\qquad k = \lg n$

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	n	$(3/2)n$	$(3/2)^2n$	$\ldots$	$(3/2)^{k-1}n$	$(3/2)^kn$

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

$$\begin{aligned}
T'(n) &= n + (3/2)n + \cdots + (3/2)^{k-1}n + (3/2)^k n \\
&= n\,(1 + (3/2) + (3/2)^2 + \cdots + (3/2)^k) \\
&= n\,(3(3/2)^k - 2) \\
&= n\left(3\frac{3^{\lg n}}{2^{\lg n}} - 2\right) \qquad (\text{pois}, k = \lg n) \\
&= 3 \cdot 3^{\lg n} - 2n = 3n^{\lg 3} - 2n = \Theta(n^{\lg 3})
\end{aligned}$$

$1{,}584 < \lg 3 < 1.585$

LEGAL, estamos de volta ao jogo!

Recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(2) &= 1 \\ R(3) &= 1 \\ R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(2) &= 1 \\ R(3) &= 1 \\ R(n) &= 3R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil + 1) + n \quad \text{para } n = 4, 5, 6 \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	1	1	7	14	15	29	36	45	53
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91

Vamos mostra que $R(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.
Isto implica que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n^{\lg 3})$.

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	$*$	$*$	$*$	7	63	119	237	324	473	5910

Solução assintótica da recorrência

Vou mostrar que $R(n) \leq 31\,(n-3)^{\lg 3} - 6n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(n)$	1	1	1	7	26	27	85	86	90	91
$31(n-3)^{\lg 3} - 6n$	$*$	$*$	$*$	7	63	119	237	324	473	5910

Prova:
Se $n = 4$, então $R(n) = 7 = 31(n-3)^{\lg 3} - 6n$.

Solução assintótica da recorrência

Prova: (continuação) Se $n \geq 5$ vale que

$$R(n) = 3R(\lceil n/2 \rceil + 1) + n$$

hi

$$\leq 3(31(\lceil n/2 \rceil + 1 - 3)^{\lg 3} - 6(\lceil n/2 \rceil + 1)) + n$$

$$\leq 3(31\left(\frac{(n+1)}{2} - 2\right)^{\lg 3} - 6\left(\frac{n}{2} + 1\right)) + n$$

$$= 3(31\left(\frac{(n-3)}{2}\right)^{\lg 3} - 3n - 6) + n$$

$$= 3(31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{2^{\lg 3}} - 3n - 6) + n$$

$$= 3 \cdot 31\frac{(n-3)^{\lg 3}}{3} - 9n - 18 + n$$

$$= 31(n-3)^{\lg 3} - 6n - 2n - 18$$

$$< 31(n-3)^{\lg 3} - 6n = \mathrm{O}(n^{\lg 3})$$

Teorema Bambambã

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

Conclusão anterior+Exercício 9.C $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 3})$.

O consumo de tempo do algoritmo KARATSUBA é $\Theta(n^{\lg 3})$ $(1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585)$.

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de inteiros:

Jardim de infância	$\Theta(n\,10^n)$
Ensino fundamental	$\Theta(n^2)$
Karatsuba e Ofman	$\Theta(n^{\lg 3}) = \mathrm{O}(n^{1{,}585})$
Schönhage e Strassen (FFT)	$\mathrm{O}(n \lg n \lg\lg n)$

$1{,}584 < \lg 3 < 1{,}585$

Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão 2.7.2.1 e opção de compilação -O2.

As implementações comparadas neste experimento são as do algoritmo do ensino fundamental e do algoritmo KARATSUBA.

O programa foi escrito por Carl Burch:

`http://www-2.cs.cmu.edu/~cburch/251/karat/.`

Resultados experimentais

n	Ensino Fund.	KARATSUBA
4	0.005662	0.005815
8	0.010141	0.010600
16	0.020406	0.023643
32	0.051744	0.060335
64	0.155788	0.165563
128	0.532198	0.470810
256	1.941748	1.369863
512	7.352941	4.032258

Tempos em 10^{-3} segundos.

Multiplicação de matrizes

Problema: Dadas duas matrizes $X[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ calcular o produto $X \cdot Y$.

Os algoritmo tradicional de multiplicação de matrizes consome tempo $\Theta(n^3)$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$r = ae + bg$$

$$s = af + bh$$

$$t = ce + dg$$

$$u = cf + dh$$

Solução custa R$ 8,04

Divisão e conquista

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}} \times \overset{Y}{\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$$

$$R = AE + BG$$

$$S = AF + BH$$

$$T = CE + DG$$

$$U = CF + DH$$

Algoritmo de Multi-Mat

Algoritmo recebe inteiros $X[1\,..\,n]$ e $Y[1\,..\,n]$ e devolve $X \cdot Y$.

```
MULTI-M (X, Y, n)      ▷ supõe n da forma 2^k
    se n = 1 devolva X · Y
    (A, B, C, D) ← PARTICIONE(X, n)
    (E, F, G, H) ← PARTICIONE(Y, n)
    R ← MULTI-M(A, E, n/2) + MULTI-M(B, G, n/2)
    S ← MULTI-M(A, F, n/2) + MULTI-M(B, H, n/2)
    T ← MULTI-M(C, E, n/2) + MULTI-M(D, G, n/2)
    U ← MULTI-M(C, F, n/2) + MULTI-M(D, H, n/2)
    P ← CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)
    devolva P
```

$T(n) =$ consumo de tempo do algoritmo para multiplicar duas matrizes de n linhas e n colunas.

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(n^2)$
3	$=$	$\Theta(n^2)$
4	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
5	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
6	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
7	$=$	$T(n/2) + T(n/2)$
8	$=$	$\Theta(n^2)$
9	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$8\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 8\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 8T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	12	112	960	7936	64512	520192	4177920	33488896

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 \\
R(n) &= 8\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 20(n-1)^3 - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	12	105	112	865	876	945	960
$20\,(n-1)^3 - 2n^2$	-2	12	142	508	1230	2428	4222	6732

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^3)$.

Conclusão anterior$+$Exercício $\Rightarrow$
$T(n)$ é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo MULTI-M é
$\Theta(n^3)$.

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$

$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$

$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$

$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$

$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$

$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$

$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

Strassen: $X \cdot Y$ por apenas R$ 7,18

$$p_1 = a(f - h) = af - ah$$
$$p_2 = (a + b)h = ah + bh$$
$$p_3 = (c + d)e = ce + de$$
$$p_4 = d(g - e) = dg - de$$
$$p_5 = (a + d)(e + h) = ae + ah + de + dh$$
$$p_6 = (b - d)(g + h) = bg + bh - dg - dh$$
$$p_7 = (a - c)(e + f) = ae + af - ce - cf$$

$$r = p_5 + p_4 - p_2 + p_6 = ae + bg$$
$$s = p_1 + p_2 = af + bh$$
$$t = p_3 + p_4 = ce + dg$$
$$u = p_5 + p_1 - p_3 - p_7 = cf + dh$$

Algoritmo de Strassen

STRASSEN (X, Y, n) $\quad\triangleright$ supõe n da forma 2^k

se $n = 1$ **devolva** $X \cdot Y$
$(A, B, C, D) \leftarrow$ PARTICIONE(X, n)
$(E, F, G, H) \leftarrow$ PARTICIONE(Y, n)
$P_1 \leftarrow$ STRASSEN$(A, F - H, n/2)$
$P_2 \leftarrow$ STRASSEN$(A + B, H, n/2)$
$P_3 \leftarrow$ STRASSEN$(C + D, E, n/2)$
$P_4 \leftarrow$ STRASSEN$(D, G - E, n/2)$
$P_5 \leftarrow$ STRASSEN$(A + D, E + H, n/2)$
$P_6 \leftarrow$ STRASSEN$(B - D, G + H, n/2)$
$P_7 \leftarrow$ STRASSEN$(A - C, E + F, n/2)$
$R \leftarrow P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$S \leftarrow P_1 + P_2$
$T \leftarrow P_3 + P_4$
$U \leftarrow P_5 + P_1 - P_3 - P_7$
devolva $P \leftarrow$ CONSTRÓI-MAT(R, S, T, U)

Consumo de tempo

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2-3	$=$	$\Theta(n^2)$
4-10	$=$	$7, T(n/2) + \Theta(n^2)$
11-14	$=$	$\Theta(n^2)$
15	$=$	$\Theta(n^2)$
total	$=$	$7\,T(n/2) + \Theta(4n^2 + 1)$

Consumo de tempo

As dicas no nosso estudo de recorrências sugeri que a solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= \Theta(1) \\ T(n) &= 7\,T(n/2) + \Theta(n^2) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 7T'(n/2) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$T'(n)$	1	11	93	715	5261	37851	269053	1899755	13363821

Solução assintótica da recorrência

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} R(1) &= 1 \\ R(n) &= 7\,R(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n^2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Verifique por indução que $R(n) \leq 19(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$ para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

$2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(n)$	1	11	86	93	627	638	700	715
$19\,(n-1)^{\lg 7} - 2n^2$	-1	11	115	327	881	1657	2790	4337

Teorema Bambambã

Teorema Mestre Simplificado:

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + c\,n^k$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$.
Então, em geral,

se $a > b^k$ então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $a = b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k \lg n)$
se $a < b^k$ então $T(n) = \Theta(n^k)$

Conclusões

$R(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

$T(n)$ é $\Theta(n^{\lg 7})$.

O consumo de tempo do algoritmo STRASSEN é $\Theta(n^{\lg 7})$ $(2{,}80 < \lg 7 < 2{,}81)$.

Mais conclusões

Consumo de tempo de algoritmos para multiplicação de matrizes:

Ensino fundamental	$\Theta(n^3)$
Strassen	$\Theta(n^{\lg 7}) = \mathrm{O}(n^{2.81})$
...	...
Coppersmith e Winograd	$\mathrm{O}(n^{2.38})$

Exercícios

Exercício 11.A

O algoritmo abaixo promete rearranjar $A[p \mathinner{.\,.} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
ORDENA-POR-INS (A, p, r)
se p < r
      então ORDENA-POR-INS (A, p, r − 1)
            chave ← A[r]
            i ← r − 1
            enquanto i ≥ p e A[i] > chave faça
                  A[i + 1] ← A[i]
                  i ← i − 1
            A[i + 1] ← chave
```

O algoritmo está correto? Escreva uma recorrência que expresse o consumo de tempo. Qual o consumo de tempo do algoritmo?

Exercício 11.B

Que acontece se trocarmos $\lfloor (p+r)/2 \rfloor$ por $\lceil (p+r)/2 \rceil$ na linha 2 do MERGE-SORT?

Mais exercicios

Exercício 11.C

Quantas vezes a comparação "$A[r] \neq 0$" é executada? Defina esse número por meio de um recorrência.

```
LIMPA (A, p, r)
  se p = r
     então devolva r
     senão q ← LIMPA (A, p, r − 1)
           se A[r] ≠ 0
              então q ← q + 1
                    A[q] ← A[r]
           devolva q
```

Dê uma fórmula exata para a função definida pela recorrência. Em que classe Θ está a função definida pela recorrência?