MAC0338 Análise de Algoritmos

Slides de Paulo Feofiloff

[com erros do coelho]

Slides de Paulo Feofiloff

[com erros do coelho]

"A análise de algoritmos é uma disciplina de engenharia. Um engenheiro civil, por exemplo, tem métodos e tecnologia para prever o comportamento de uma estrutura antes de construí-la.
Da mesma forma, um projetista de algoritmos deve ser capaz de prever o comportamento de um algoritmo antes de implementá-lo."

Avisos

- Página da MAC0338:

  `http://paca.ime.usp.br/`

- Paca: Cadastro, fórum, entregas de trabalho
- Monitor: Rafael Cosentino
  5a. das 12:30 às 14:00 (?)
  `cosen@ime.usp.br`
- Livros:
  - CLRS = Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, *Introduction to Algorithms*
  - AU = Aho, Ullman, *Foundations of Computer Science*
  - TAOCP = Knuth, *The Art of Computer Programming*
- Tarefas: Tarefa 1 está disponível na Paca.

MAC0338

Continuação natural de MAC0323 Estrutura de Dados.

A disciplina

- estuda algoritmos eficientes e elegantes para alguns problemas computacionais básicos;
- prova a correção de algoritmos iterativos a partir de suas relações invariantes;
- explora a estrutura recursiva dos problemas para construir algoritmos eficientes;
- formaliza o conceito de desempenho (assintótico) de algoritmos;
- calcula o desempenho de vários algoritmos básicos.

Principais tópicos

- Elementos de análise assintótica (notação O, Ω e Θ)
- Solução de recorrências
- Análise da correção e desempenho de algoritmos iterativos
- Análise da correção e desempenho de algoritmos recursivos
- Análise de pior caso e análise probabilística
- Algoritmos de busca e ordenação
- Algoritmos de programação dinâmica
- Algoritmos gulosos
- Algoritmos para problemas em grafos
- Análise amortizada de desempenho
- Introdução à teoria da complexidade: problemas completos em NP

Introdução à AA

CLRS 2.1–2.2

AU 3.3, 3.6

Exercício 1.A

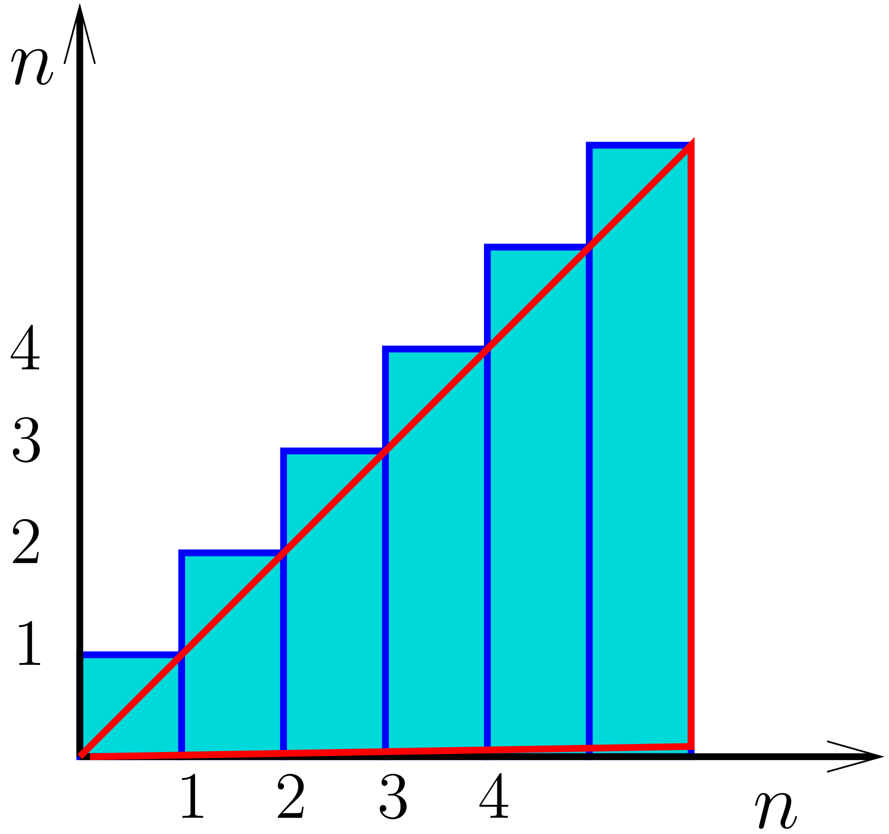
Quanto vale S no fim do algoritmo?

$S \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 2$ **até** $n - 2$ **faça**
    para $j \leftarrow i$ **até** n **faça**
        $S \leftarrow S + 1$

Escreva um algoritmo mais eficiente que tenha o mesmo efeito.

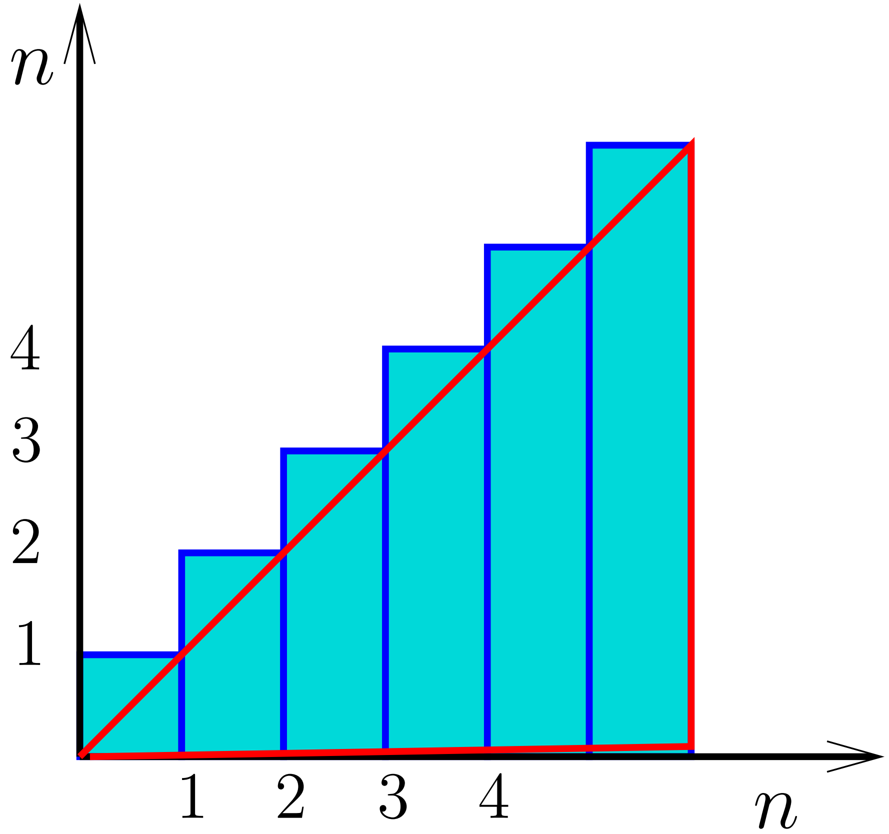
$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = ?$$

Carl Friedrich Gauss, 1787



$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = ?$$

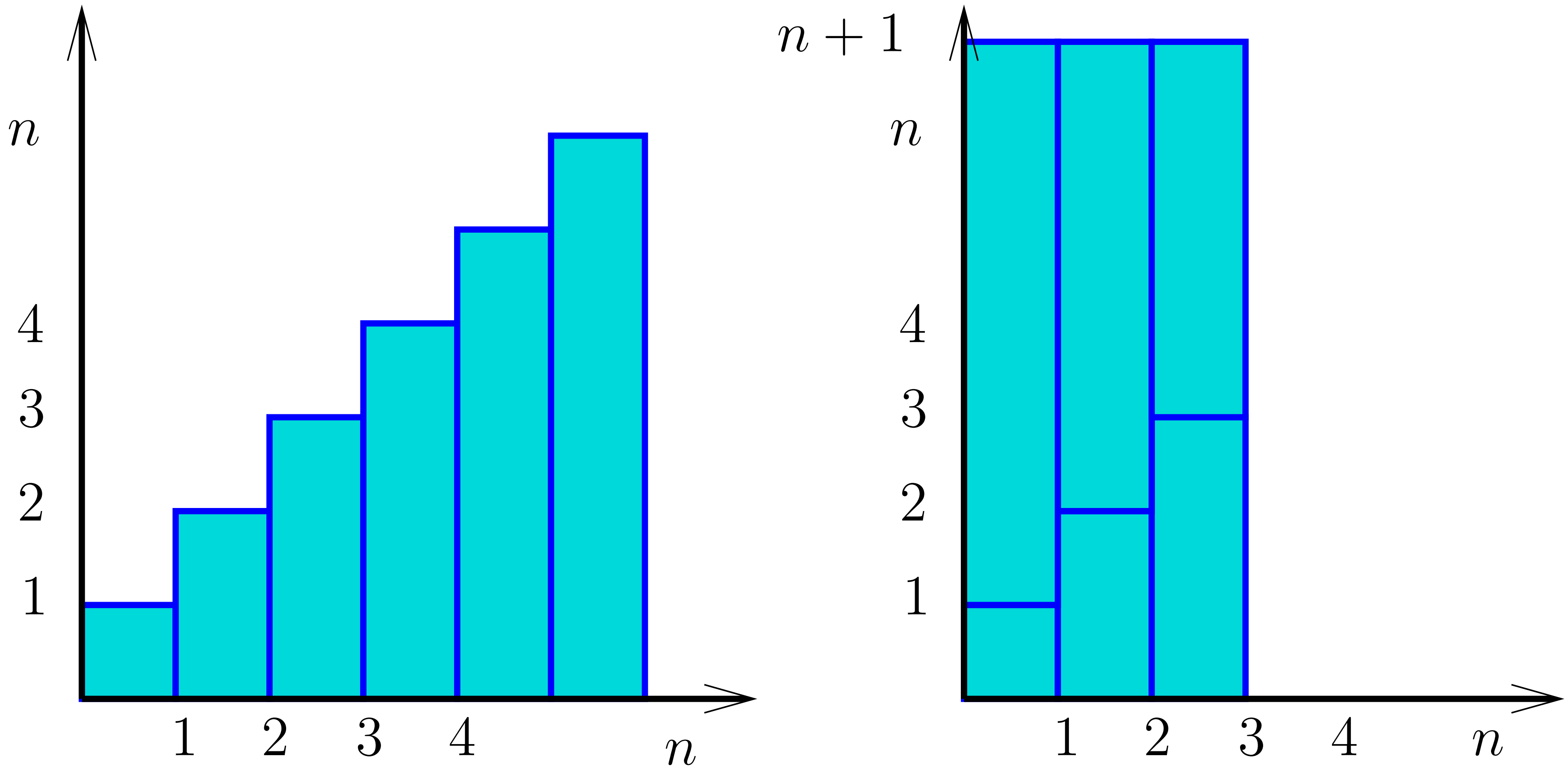
Carl Friedrich Gauss, 1787



$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

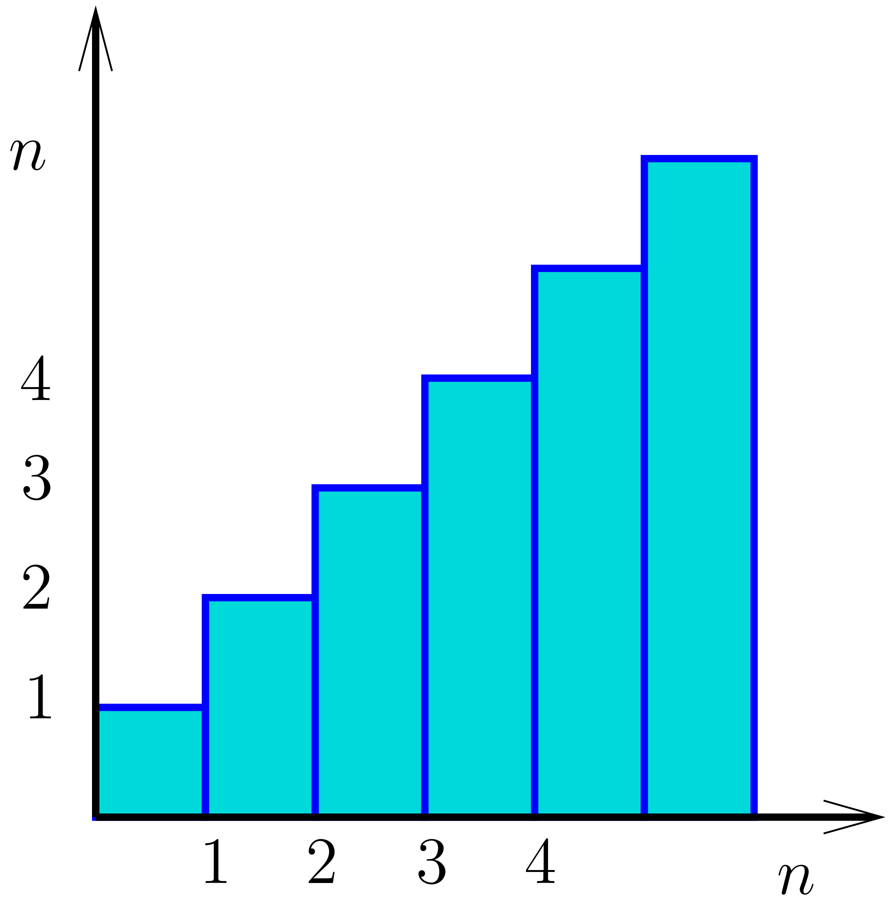
$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = ?$$

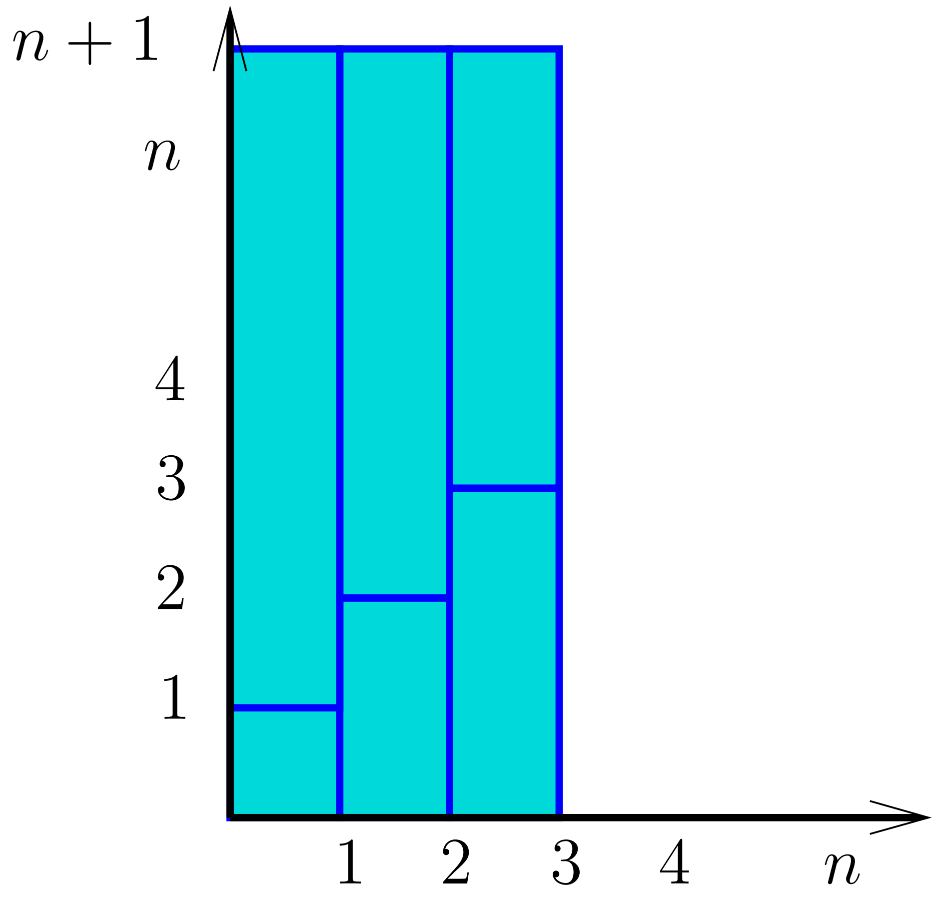
Carl Friedrich Gauss, 1787



$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = ?$$

Carl Friedrich Gauss, 1787





$$(n+1) \times \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solução

Se $n \geq 4$ então no fim da execução das linhas 1–4,

$$
\begin{aligned}
S &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 4 + 3 \\
&= (n+2)(n-3)/2 \\
&= \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n - 3\,.
\end{aligned}
$$

Ordenação

$A[1\,..\,n]$ é crescente se $A[1] \leq \cdots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de mode que ele fique crescente.

Entra:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & n \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{33} & \multicolumn{1}{c|}{55} & \multicolumn{1}{c|}{33} & \multicolumn{1}{c|}{44} & \multicolumn{1}{c|}{33} & \multicolumn{1}{c|}{22} & \multicolumn{1}{c|}{11} & \multicolumn{1}{c|}{99} & \multicolumn{1}{c|}{22} & \multicolumn{1}{c|}{55} & \multicolumn{1}{c|}{77} \\
\hline
\end{array}
$$

Ordenação

$A[1\,..\,n]$ é crescente se $A[1] \leq \cdots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de mode que ele fique crescente.

Entra:

1										n
33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77

Sai:

1										n
11	22	22	33	33	33	44	55	55	77	99

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1						j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

1			i			j				n
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

1			i			j				n
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50

1		i				j				n
20	25	35		40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

1			i			j				n
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50

1		i				j				n
20	25	35		40	44	55	99	10	65	50

1		i				j				n
20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave$	1						j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave$	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave$	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

$chave$	1								j		n
10	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave$	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

$chave$	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

Ordenação por inserção

chave	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

Ordenação por inserção

$chave$	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

$chave$	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

$chave$	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

Ordenação por inserção

chave	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

chave	1										j
50	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

Ordenação por inserção

chave	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

chave	1										j
50	10	20	25	35	38	40	44	50	55	65	99

Ordenação por inserção

Algoritmo rearranja $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

para $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**
    $chave \leftarrow A[j]$

    $i \leftarrow j - 1$
    enquanto $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**
        $A[i+1] \leftarrow A[i]$ $\triangleright$ desloca
        $i \leftarrow i - 1$

    $A[i+1] \leftarrow chave$ $\triangleright$ insere

Ordenação por inserção

Algoritmo rearranja $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

$j \leftarrow 2$
enquanto $j \leq n$ **faça**
    $chave \leftarrow A[j]$

    $i \leftarrow j - 1$
    enquanto $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**
        $A[i+1] \leftarrow A[i]$ ▷ desloca
        $i \leftarrow i - 1$

    $A[i+1] \leftarrow chave$ ▷ insere
    $j \leftarrow j + 1$

O algoritmo faz o que promete?

Correção do algoritmo!

O algoritmo faz o que promete?

Correção do algoritmo!

Relação invariante chave:

(i0) na linha 1 vale que: $A[1\,..\,j-1]$ é crescente.

1						j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

O algoritmo faz o que promete?

Correção do algoritmo!

Relação invariante chave:

(i0) na linha 1 vale que: $A[1 \,.\,.\, j-1]$ é crescente.

						j				n
1										
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

Supondo que a invariante vale.
Correção do algoritmo é evidente.

No início da última iteração das linhas 1–7 tem-se que $j = n + 1$. Da invariante concluí-se que $A[1 \,.\,.\, n]$ é crescente.

Mais invariantes

Na linha 4 vale que:

(i1) $A[1\,..\,i]$ e $A[i+2\,..\,j]$ são crescentes

(i2) $A[1\,..\,i] \leq A[i+2\,..\,j]$

(i3) $A[i+2\,..\,j] > chave$

$chave$	1		i				j			n
38	20	25	35		40	44	55	99	10	65	50

Mais invariantes

Na linha 4 vale que:

(i1) $A[1\,..\,i]$ e $A[i+2\,..\,j]$ são crescentes

(i2) $A[1\,..\,i] \leq A[i+2\,..\,j]$

(i3) $A[i+2\,..\,j] > chave$

$chave$	1		i				j				n
38	20	25	35		40	44	55	99	10	65	50

invariantes (i1),(i2) e (i3)
$+$ condição de parada do **enquanto** da linha 4
$+$ atribuição da linha 7 $\Rightarrow$ validade (i0)

Demonstre!

Correção de algoritmos iterativos

Estrutura "típica" de demonstrações da correção de algoritmos iterativos através de suas relações invariantes consiste em:

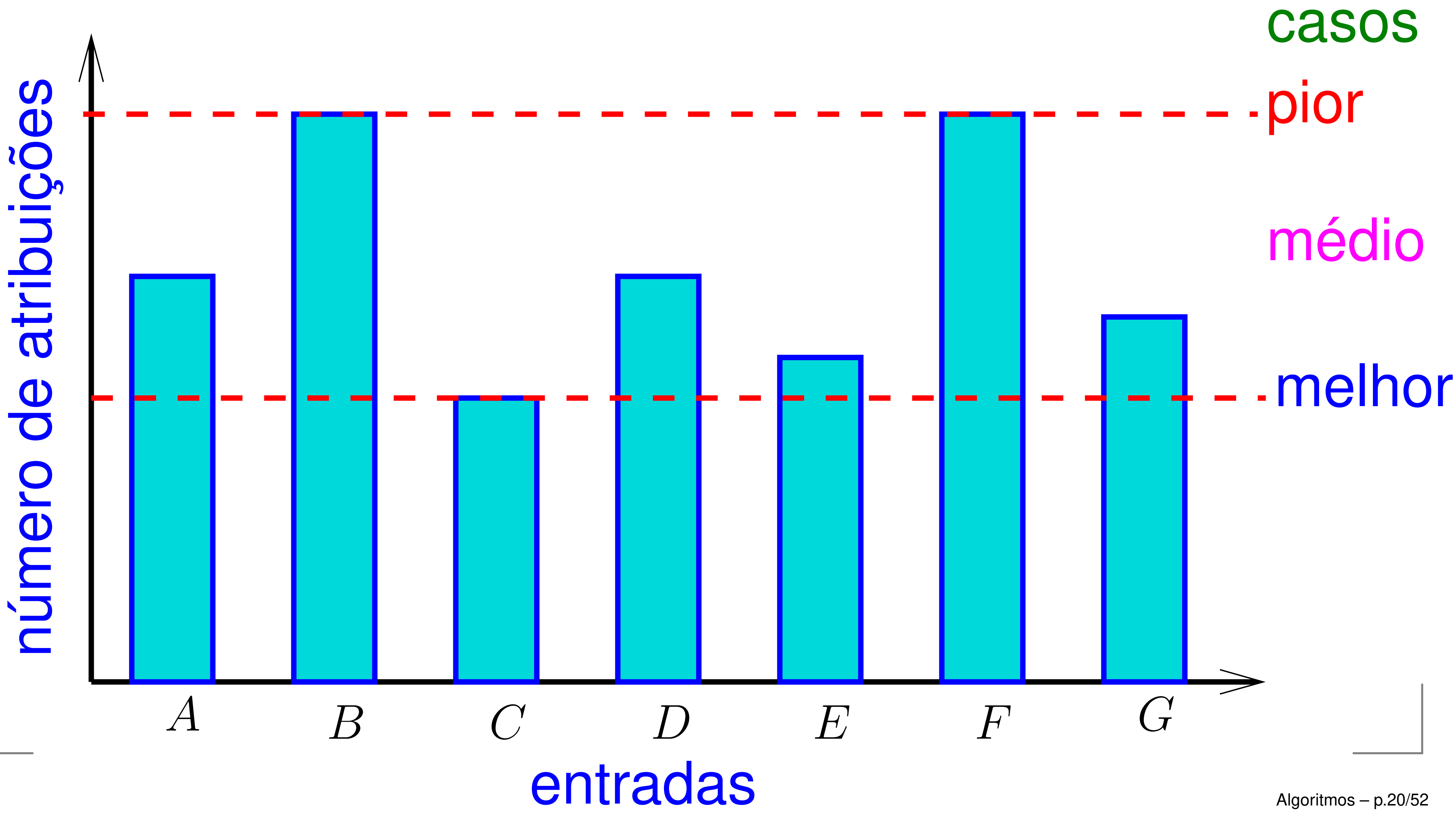
1. verificar que a relação vale no início da primeira iteração;
2. demonstrar que

   se a relação vale no início da iteração, então ela vale no final da iteração (com os papéis de alguns atores possivelmente trocados);
3. concluir que, se relação vale no início da última iteração, então a a relação junto com a condição de parada implicam na correção do algoritmo.

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

Quantas atribuições (←) algoritmo faz?

Número mínimo, médio ou máximo?
Melhor caso, caso médio, pior caso?



Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

3 $\quad i \leftarrow j - 1 \qquad \triangleright\ 2 \leq j \leq n$

4 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$

6 $\qquad i \leftarrow i - 1$

linha	atribuições (número máximo)
3	?
4	?
5	?
6	?

total ?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

3 $\quad i \leftarrow j - 1 \qquad \triangleright\ 2 \leq j \leq n$

4 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$

6 $\qquad i \leftarrow i - 1$

linha	atribuições (número máximo)
3	$= 1$
4	$= 0$
5	?
6	?

total ?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

3 $\quad i \leftarrow j - 1 \qquad \triangleright\ 2 \leq j \leq n$

4 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$

6 $\qquad i \leftarrow i - 1$

linha	atribuições (número máximo)
3	$= 1$
4	$= 0$
5	$\leq j - 1$
6	?

total ?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

3 $\quad i \leftarrow j - 1 \qquad \triangleright\ 2 \le j \le n$

4 $\quad$ **enquanto** $i \ge 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$

6 $\qquad i \leftarrow i - 1$

linha	atribuições (número máximo)
3	$= 1$
4	$= 0$
5	$\le j - 1$
6	$\le j - 1$

total $\quad \le 2j - 1 \le 2n - 1$

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça** $\triangleright$ $j \leftarrow j + 1$ escondido

2 $chave \leftarrow A[j]$

3 LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

7 $A[i + 1] \leftarrow chave$

linha	atribuições (número máximo)
1	?
2	?
3–6	?
7	?
total	?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça** $\triangleright$ $j \leftarrow j + 1$ escondido

2 $chave \leftarrow A[j]$

3 LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

7 $A[i+1] \leftarrow chave$

linha	atribuições (número máximo)
1	$= n - 1 + 1$
2	$= n - 1$
3–6	$\leq (n-1)(2n-1)$
7	$= n - 1$

total $\leq 2n^2 - 1$

Análise mais fina

linha	atribuições (número máximo)
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
7	?
total	?

Análise mais fina

linha	atribuições (número máximo)
1	$= n - 1 + 1$
2	$= n - 1$
3	$= n - 1$
4	$= 0$
5	$\leq 1 + 2 + \cdots + (n{-}1) = n(n-1)/2$
6	$\leq 1 + 2 + \cdots + (n{-}1) = n(n-1)/2$
7	$= n - 1$

total $\leq n^2 + 3n - 3$

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4
3	15	9
10	127	100

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4
3	15	9
10	127	100
100	10297	10000
1000	1002997	1000000

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4
3	15	9
10	127	100
100	10297	10000
1000	1002997	1000000
10000	100029997	100000000
100000	10000299997	10000000000

n^2 domina os outros termos

Exercício 1.B

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, qual o consumo total?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

para $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**

   $chave \leftarrow A[j]$

   $i \leftarrow j - 1$

   enquanto $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

     $A[i+1] \leftarrow A[i]$ $\triangleright$ desloca

     $i \leftarrow i - 1$

   $A[i+1] \leftarrow chave$ $\triangleright$ insere

Solução

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	n
2	$=$	$n-1$
3	$=$	$n-1$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \;=\; (n-1)(n+2)/2$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n{-}1) \;=\; n(n-1)/2$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n{-}1) \;=\; n(n-1)/2$
7	$=$	$n-1$
total	$\leq$	$(3/2)n^2+(7/2)n-4$

Exercício 1.C

Se a execução da linha i consome t_i unidades de tempo, para $i = 1, \ldots, 7$, qual o consumo total?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**

2 $\quad$ $chave \leftarrow A[j]$

3 $\quad$ $i \leftarrow j - 1$

4 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $\quad\quad$ $A[i+1] \leftarrow A[i]$ $\quad \triangleright$ desloca

6 $\quad\quad$ $i \leftarrow i - 1$

7 $\quad$ $A[i+1] \leftarrow chave$ $\quad \triangleright$ insere

Solução para $t_i = 1$

linha	todas as execuções da linha
1	$= \; n$
2	$= \; n-1$
3	$= \; n-1$
4	$\leq \; 2+3+\cdots+n \; = \; (n-1)(n+2)/2$
5	$\leq \; 1+2+\cdots+(n-1) \; = \; n(n-1)/2$
6	$\leq \; 1+2+\cdots+(n-1) \; = \; n(n-1)/2$
7	$= \; n-1$
total	$\leq \; (3/2)n^2+(7/2)n-4$

Solução

linha	todas as execuções da linha			
1	$=$	n		$\times t_1$
2	$=$	$n-1$		$\times t_2$
3	$=$	$n-1$		$\times t_3$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n$	$= \;(n-1)(n+2)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n{-}1)$	$= \;n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n{-}1)$	$= \;n(n-1)/2$	$\times t_6$
7	$=$	$n-1$		$\times t_7$

total $\leq$?

Solução

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	n	$\times t_1$
2	$=$	$n-1$	$\times t_2$
3	$=$	$n-1$	$\times t_3$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \;=\; (n-1)(n+2)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_6$
7	$=$	$n-1$	$\times t_7$

$$
\begin{aligned}
\text{total} \;\leq\;& ((t_4+t_5+t_6)/2) \times n^2 \\
+\;& (t_1+t_2+t_3+t_4/2-t_5/2-t_6/2+t_7) \times n \\
-\;& (t_2+t_3+t_4+t_7)
\end{aligned}
$$

Solução

linha	todas as execuções da linha			
1	$=$	n		$\times t_1$
2	$=$	$n-1$		$\times t_2$
3	$=$	$n-1$		$\times t_3$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n$	$=\ (n-1)(n+2)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1)$	$=\ n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1)$	$=\ n(n-1)/2$	$\times t_6$
7	$=$	$n-1$		$\times t_7$

total $\leq$ $c_2 \times n^2 + c_1 \times n + c_0$

c_2, c_1, c_0 são constantes que dependem da máquina.

n^2 é para sempre! Está nas entranhas do algoritmo!

Exercícios

Exercício 1.D (bom!)

Quanto vale S no fim do seguinte algoritmo?

$S \leftarrow 0$
$i \leftarrow n$
enquanto $i > 0$ **faça**
  para $j \leftarrow 1$ **até** i **faça**
    $S \leftarrow S + 1$
  $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$

Exercício 1.E

Prove a invariante do algoritmo ORDENA-POR-INSERÇÃO.

Exercício 1.F

Quantas comparações faz o algoritmo ORDENA-POR-INSERÇÃO, no pior caso, ao receber um vetor $A[1 \,.\,.\, n]$?

Exercício 1.G

Quantas atribuições faz o algoritmo abaixo?

$s \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  $s \leftarrow s + i$
devolva s

Escreva um algoritmo melhorado que produza o mesmo efeito com menos atribuições.

Exercícios

Exercício 1.H (AU 3.7.1)

O algoritmo abaixo opera sobre um vetor $A[1 \mathinner{.\,.} n]$. Quantas atribuições ele faz no pior caso? Quantas comparações?

$s \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $s \leftarrow s + A[i]$
$m \leftarrow s/n$
$k \leftarrow 1$
para $i \leftarrow 2$ **até** n **faça**
    se $(A[i] - m)^2 < (A[k] - m)^2$
        então $k \leftarrow i$
devolva k

Exercício 1.I (AU 3.7.2)

O fragmento abaixo opera sobre uma matriz $A[1 \mathinner{.\,.} n, 1 \mathinner{.\,.} n]$. Quantas atribuições faz?

para $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
    para $j \leftarrow i + 1$ **até** n **faça**
        para $k \leftarrow i$ **até** n **faça**
            $A[j,k] \leftarrow A[j,k] - A[i,k] \cdot A[j,i]/A[i,i]$

Exercícios

Exercício 1.J (AU 3.7.3*)

Quantas atribuições faz o algoritmo?

SUMPOWERSOFTWO (n)

$s \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $j \leftarrow i$
    enquanto $2\lfloor j/2 \rfloor = j$ **faça**
    $j \leftarrow \lfloor j/2 \rfloor$
    $s \leftarrow s + 1$
devolva s

Chão, teto, log etc

CLRS 3.2, A.1

AU 2.9

Definições

$\lfloor x \rfloor$:= inteiro i tal que $i \leq x < i + 1$

$\lceil x \rceil$:= inteiro j tal que $j - 1 < x \leq j$

Diz-se que

$\lfloor x \rfloor$ é o chão de x

$\lceil x \rceil$ é o teto de x

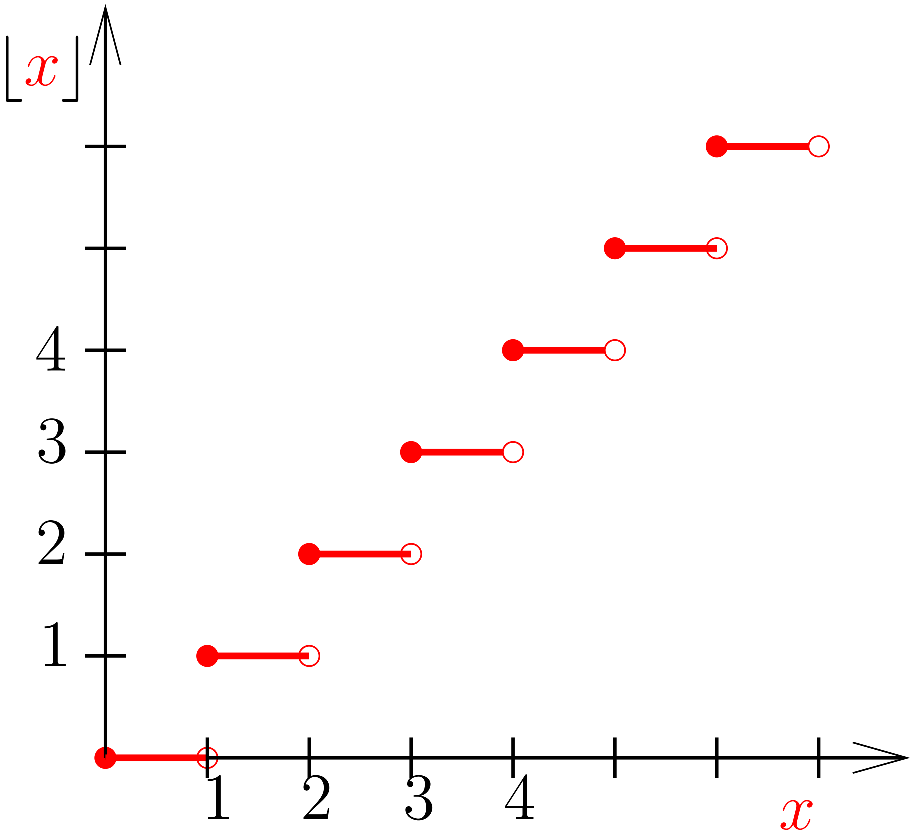
Exercício A1.A

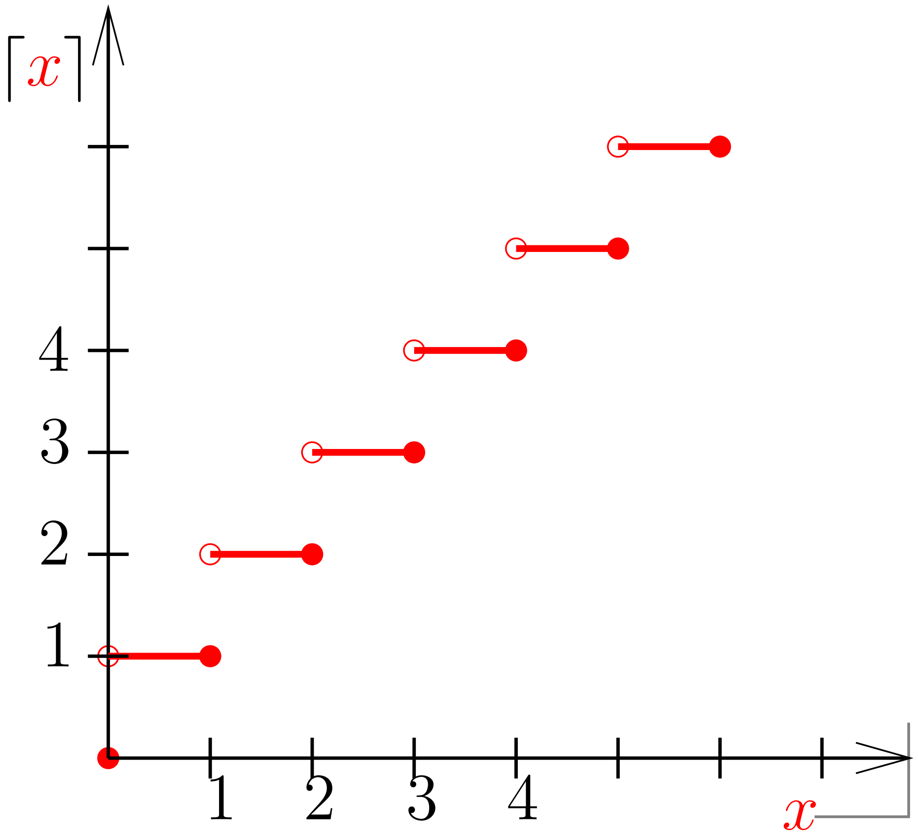
Desenhe os gráficos das funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para x não-negativo.

Exercício A1.A

Desenhe os gráficos das funções $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ para x não-negativo.

Solução





Exercícios

Exercício A1.B
Mostre que para qualquer inteiro $n \geq 1$.

$$\frac{n-1}{2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{n}{2} \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2}$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$.

Exercício A1.C
É verdade que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$ para quaisquer x e y? É verdade que $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil x + y \rceil$ para quaisquer x e y?

Exercício A1.D
Desenhe os gráficos das funções $\lg x$ e 2^x para x inteiro não-negativo.

Exercícios

Exercício A1.E
Explique o significado da expressão $\log_{3/2} n$.

Exercício A1.F
Calcule $5^{\log_5 n}$, $\log_3 3^n$ e $\lg 2^n$.

Exercício A1.G
Qual a relação entre $\log_8 n$ e $\log_2 n$?

Exercício A1.H
Se $i := \lfloor \lg n \rfloor$, qual a relação entre n e 2^i ?
Se $j := \lceil \lg n \rceil$, qual a relação entre n e 2^j ?

Exercício A1.I
É verdade que $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg(n+1) \rceil$ para todo inteiro $n \geq 1$?

Exercício A1.J
Escreva um algoritmo que calcule $\lfloor \lg n \rfloor$.

Exercício A1.L
Mostre que para qualquer número real x tem-se $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

Exercício A1.M
Mostre que $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ para todo inteiro positivo n.

Mais exercícios

Exercício A1.N

Mostre que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, com igualdade se e somente se $x + y - 1 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Encontre uma fórmula análoga para $\lceil \cdot \rceil$.

Exercício A1.O

Se c é inteiro e x é racional, é verdade que $\lceil cx \rceil = c\lceil x \rceil$?

Exercício A1.P

Use a notação $\lfloor\ \rfloor$ para representar o resto da divisão de n por 7.

Exercício A1.Q

É verdade que $\lceil 2\lceil 2n/3 \rceil/3 \rceil = \lceil 4n/9 \rceil$? É verdade que $\lfloor 2\lfloor 2n/3 \rfloor/3 \rfloor = \lfloor 4n/9 \rfloor$?

Exercício A1.R

É verdade que $\lfloor \lfloor n/2 \rfloor /2 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor$?

Exercício A1.S

Se n, a, b são inteiros positivos, é verdade que $\lfloor \lfloor n/a \rfloor /b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$?

Exercício A1.T

É verdade que $\lfloor \lg n \rfloor \geq \lg(n-1)$ para todo inteiro $n \geq 2$? É verdade que $\lceil \lg n \rceil \leq \lg(n+1)$ para todo inteiro $n \geq 1$?

Mais exercícios ainda

Exercício A1.U
Prove que para qualquer número racional $x > 1$ tem-se

$$\lfloor \lg x \rfloor \leq \lg \lfloor x \rfloor \leq \lg x \leq \lg \lceil x \rceil \leq \lceil \lg x \rceil$$

Exercício A1.V
Quanto vale $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots + 1/2^n + \cdots$?