AULA 9'

Exercício
relevante para o Quicksort

Exercício 9'.A

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + 5n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Faz sentido? Solução?? $T(n) = \mathrm{O}(??)$

Para adivinhar a "cara" da solução, vou tentar uma recorrência mais simples:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + 5n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$ Mas isso não faz sentido!

Então que tal essa:

$$T(x) = 1 \quad \text{para } x \text{ racional tq } 0 < x \leq 1$$
$$T(x) = T(x/3) + T(2x/3) + 5x$$

para x racional, $x > 1$.

Árvore da recorrência:

$$5n$$

/ \

$5\frac{n}{3}$ $5\frac{2n}{3}$

/ \ / \

$5\frac{n}{9}$ $5\frac{2n}{9}$ $5\frac{2n}{9}$ $5\frac{4n}{9}$

\ / \ / \

$5\frac{4n}{9}$ $5\frac{4n}{27}$ $5\frac{8n}{27}$

$\vdots$

soma em cada horizontal $= 5n$

número de "níveis" $\leq \log_{3/2} n$

$T(n) =$ a soma de tudo

$$T(n) \;\leq\; 5n \log_{3/2} n \;+\; \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\log_{3/2} n}$$

$$T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

De volta à recorrência: $T(1) = 1$ e

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + 5n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

n	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 5 \cdot 2 = 12$
3	$1 + 12 + 5 \cdot 3 = 28$
4	$12 + 12 + 5 \cdot 4 = 44$

Vou mostrar que $T(n) \leq 100\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

Prova:
Para $n = 2$ temos $T(2) = 12 < 100 \cdot 2 \cdot \lg 2$.
Para $n = 3$ temos $T(3) = 28 < 100 \cdot 3 \cdot \lg 3$.
Suponha agora que $n > 3$. Então

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + T(\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor) + 5n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 100\lceil \frac{n}{3} \rceil \lg \lceil \frac{n}{3} \rceil + 100\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor \lg \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 5n \\
&\leq 100\frac{n+2}{3} \lceil \lg \frac{n}{3} \rceil + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&< 100\frac{n+2}{3} (\lg \frac{n}{3} + 1) + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&= 100\frac{n+2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&= 100\frac{n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 100\frac{2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 100\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&< 100n \lg \frac{2n}{3} + 67 \lg \frac{2n}{3} + 5n \\
&= 100n \lg n + 100n \lg \frac{2}{3} + 67 \lg n + 67 \lg \frac{2}{3} + 5n \\
&< 100n \lg n + 100n(-0.58) + 67 \lg n + 67(-0.58) + 5n \\
&< 100n \lg n - 58n + 67 \lg n - 38 + 5n \\
&= 100n \lg n - 53n + 67 \lg n - 38 \\
&< 100n \lg n
\end{aligned}
$$

Bingo!