AULA 6'

Recorrências com notação O

CLRS 4.1–4.2
AU 3.9, 3.11

Classe O da solução de uma recorrência

Não faço questão de solução *exata*:
basta solução aproximada

Exemplo (n é potência de 2):

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \qquad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

Solução exata (n é potência de 2):

$$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$$

Solução aproximada:

$$G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Em geral, é mais fácil obter e provar solução aproximada que solução exata

Dica prática (sem prova)

A solução da recorrência

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$
\begin{aligned}
T'(1) &= 1 \\
T'(n) &= 2T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2^1, 2^2, 2^3, \ldots
\end{aligned}
$$

e na mesma classe Θ que a solução de

$$
\begin{aligned}
T''(4) &= 10 \\
T''(n) &= 2T''(n/2) + n \quad \text{para } n = 2^3, 2^4, 2^5, \ldots
\end{aligned}
$$

Recorrências com O do lado direito

A "recorrência"

$$T(n) = 2T(n/2) + \mathrm{O}(n)$$

representa todas as recorrências da forma
$T(n) = 2T(n/2) + F(n)$ em que $F(n) = \mathrm{O}(n)$

Melhor:
representa todas as recorrências do tipo

$$\begin{aligned} T'(n) &= a \quad \text{para } n = n_0 - 1 \\ T'(n) &\leq 2T'(\lfloor n/2 \rfloor) + cn \quad \text{para } n \geq n_0 \end{aligned}$$

qaisquer que sejam a, $c > 0$ e $n_0 > 0$
(poderíamos tomar $n_0 = 1$; veja ex 3.I)

Também representa todas as do tipo

$$\begin{aligned} T''(n) &= a \quad \text{para } n = 2^{k-1} \\ T''(n) &\leq 2T''(n/2) + cn \quad \text{para } n = 2^k, 2^{k+1}, \ldots \end{aligned}$$

quaisquer que sejam a, $c > 0$ e $k > 0$

As soluções exatas vão depender de a, c, n_0, k;
mas todas estarão na mesma classe O
(especificamente, em $\mathrm{O}(n \lg n)$)

Dicas práticas

recorrência	condição	solução
$T(n) = T(n-1) + 4n^3$		$\Theta(n^{3+1})$
$T(n) = 6T(n-1) + 4n^3$		$\Theta(6^n)$
$T(n) = aT(n/5) + 4n^3$	$a < 5^3$	$\Theta(n^3)$
$T(n) = aT(n/5) + 4n^3$	$a = 5^3$	$\Theta(n^3 \log n)$
$T(n) = aT(n/5) + 4n^3$	$a > 5^3$	$\Theta(n^{\log_5 a})$

Veja AU, sec 3.11, p.151

A mesma coisa, escrita de maneira um pouco diferente
(Master Theorem, CLRS, sec. 4.3, p.73):

Suponha $T(n) = aT(n/5) + f(n)$ para algum $a \geq 1$.
Então, em geral,

se	$f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_5 a - \epsilon})$	então	$T(n) = \Theta(n^{\log_5 a})$
se	$f(n) = \Theta(n^{\log_5 a})$	então	$T(n) = \Theta(n^{\log_5 a} \lg n)$
se	$f(n) = \Omega(n^{\log_5 a + \epsilon})$	então	$T(n) = \Theta(f(n))$

para qquer $\epsilon > 0$

No lugar de

- "$n/5$", posso escrever "$\lfloor n/5 \rfloor$" ou "$\lceil n/5 \rceil$"
- "5", posso escrever qualquer $b > 1$
- "4", posso escrever qualquer número real
- "$4n^3$" posso escrever qualquer polinômio de grau 3
- "3", posso escrever qualquer inteiro $k \geq 0$
- "6", posso escrever qualquer número $a > 1$

TAREFA (AULA 6')

Exercício 6'.A
A que classe O pertencem as solução de recorrência do tipo $T(n) = T(n/3) + \mathrm{O}(1)$?

Exercício 6'.Aa
Seja T a função definida pela recorrência

$$\begin{array}{lcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

A que ordem Θ pertence T?

Exercício 6'.B [CLRS 4.2-1]
Seja T a função definida pela recorrência

$$\begin{array}{lcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

A partir da árvore da recorrência, adivinhe a que classe Θ pertence $T(n)$. Prove a delimitação pelo método da substituição.

Exercício 6'.C
Resolva a recorrência

$$\begin{array}{lcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & 2T(\lceil n/2 \rceil) + 7n + 2 & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

Exercício 6'.D
Resolva a "recorrência" $T(n) = T(n-2) + \mathrm{O}(n)$.

Exercício 6'.E
Resolva a "recorrência" $T(n) = 5T(n-1) + \mathrm{O}(n)$.