AULA 6

Recorrências

CLRS 4.1–4.2
AU 3.9, 3.11

Recorrência $=$

$=$ "fórmula" que define uma função em termos d'ela mesma

$=$ algoritmo recursivo que calcula uma função

Exemplo 1

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Define função T sobre inteiros positivos:

n	$T(n)$
1	1
2	9
3	20
4	34
5	51
6	71

Resolver uma recorrência =
= obter uma "fórmula fechada" para $T(n)$

Método da **substituição**:
"chute" fórmula e verifique por indução

Exemplo 1 (continuação)
Eu acho que $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$.

Verificação:
Se $n = 1$ então $T(n) = 1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 4$.
Tome $n \geq 2$ e suponha que a fórmula está certa para $n - 1$:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \\ &\stackrel{\text{hi}}{=} \tfrac{3}{2}(n-1)^2 + \tfrac{7}{2}(n-1) - 4 + 3n + 2 \\ &= \tfrac{3}{2}n^2 - 3n + \tfrac{3}{2} + \tfrac{7}{2}n - \tfrac{7}{2} - 4 + 3n + 2 \\ &= \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{7}{2}n - 4\,. \end{aligned}$$

Bingo!

Como adivinhei fórmula fechada?
Árvore da recorrência:

$$\begin{array}{ccccc}
T(n) & 3n{+}2 & 3n{+}2 & 3n{+}2 & 3n{+}2 \\
 & | & | & | & | \\
 & T(n{-}1) & 3(n{-}1){+}2 & 3n{-}1 & 3n{-}1 \\
 & & | & | & | \\
 & & T(n{-}2) & 3(n{-}2){+}2 & 3n{-}4 \\
 & & & | & | \\
 & & & T(n{-}3) & \vdots \\
 & & & & | \\
 & & & & 8 \\
 & & & & | \\
 & & & & T(1)
\end{array}$$

$1 + n - 1$ níveis

$$\begin{aligned}
T(n) &= (3n+2) + (3n-1) + \cdots + 8 + T(1) \\
&= \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{7}{2}n - 4
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= 2T(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

Não é uma recorrência! Não faz sentido!

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 1 \\
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, \ldots, 2^i, \ldots
\end{aligned}
$$

n	$G(n)$
1	1
2	18
4	66
8	190
16	494

Fórmula fechada: $G(n) = ?$

Acho que G é da forma $n \lg n$

n	$G(n)$	$6n \lg n$	$7n \lg n$	$8n \lg n$	n^2
1	1	0	0	0	1
2	18	12	14	16	4
4	66	48	56	64	16
8	190	144	168	192	64
16	494	384	448	512	256
32	1214	960	1120	1280	1024
64	2878	2304	2688	3072	4096
128	6654	5376	6272	7168	16384
256	15102	12288	14336	16384	65536

Acho que a fórmula fechada é

$$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$$

para $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Prova:
Se $n = 1$ então $G(n) = 1 = 7 \cdot 1 \lg 1 + 3 \cdot 1 - 2$.
Se $n \geq 2$ então

$$\begin{aligned}
G(n) &= 2G(\tfrac{n}{2}) + 7n + 2 \\
&\stackrel{\text{hi}}{=} 2\,(7\tfrac{n}{2} \lg \tfrac{n}{2} + 3\,\tfrac{n}{2} - 2) + 7n + 2 \\
&= 7n(\lg n - 1) + 3n - 4 + 7n + 2 \\
&= 7n \lg n - 7n + 3n - 2 + 7n \\
&= 7n \lg n + 3n - 2
\end{aligned}$$

Bingo!

Como adivinhei fórmula fechada?
Árvore da recorrência:

$$G(n) \qquad \begin{array}{ccc} & 7n+2 & \\ / & & \backslash \\ G(\frac{n}{2}) & & G(\frac{n}{2}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 7n+2 & & & \\ & & / & & \backslash & & \\ & 7\frac{n}{2}+2 & & & & 7\frac{n}{2}+2 & \\ / & & \backslash & & / & & \backslash \\ G(\frac{n}{4}) & & G(\frac{n}{4}) & & G(\frac{n}{4}) & & G(\frac{n}{4}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 7n+2 & & & \\ & & / & & \backslash & & \\ & 7\frac{n}{2}+2 & & & & 7\frac{n}{2}+2 & \\ / & & \backslash & & / & & \backslash \\ 7\frac{n}{4}+2 & & 7\frac{n}{4}+2 & & 7\frac{n}{4}+2 & & 7\frac{n}{4}+2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G(1) \;\; G(1) \;\; \ldots & & & & & & \ldots \;\; G(1) \;\; G(1) \end{array}$$

total de $1 + \lg n$ níveis

nível	soma no nível
0	$7n + 2$
1	$7n + 4$
2	$7n + 8$
$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$7n + 2^k$
k	$2^k G(1)$

$$n = 2^k$$

$$\begin{aligned}
G(n) &= 7n + 2^1 + 7n + 4^2 + \cdots + 7n + 2^{\lg n} \\
&\quad + 2^{\lg n} G(1) \\
&= 7n \lg n + (2 + 4 + \cdots + 2^{\lg n}) + 2^{\lg n} \\
&= 7n \lg n + 2 \cdot 2^{\lg n} - 2 + n \\
&= 7n \lg n + 2n - 2 + n \\
&= 7n \lg n + 3n - 2
\end{aligned}$$

Lembrete: $x^0 + \cdots + x^k = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$

CLRS (A.5), p.1060

Exemplo 3 (continuação)
É mais fácil mostrar que $G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Vou provar que $G(n) \leq 9n \lg n$
quando $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^i, \ldots$

Prova: Se $n = 2$, $G(n) = 18 = 9 \cdot 2 \cdot \lg 2$.
Se $n \geq 4$,

$$
\begin{aligned}
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 2 \cdot 9(n/2) \lg(n/2) + 7n + 2 \\
&= 9n\,(\lg n - 1) + 7n + 2 \\
&= 9n \lg n - 2n + 2 \\
&< 9n \lg n \quad \text{(pois } n > 1\text{)}
\end{aligned}
$$

Da linha 1 para a linha 2, a hipótese de indução vale pois $2 \leq n/2 < n$.

TAREFA (AULA 6)

Exercício 6.A
Seja T a função definida pela recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & T(n-1) + 2n - 2 & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

Verifique que a recorrência é honesta, ou seja, de fato define uma função. A partir da árvore da recorrência, adivinhe uma boa delimitação assintótica para $T(n)$; dê a resposta em notação O. Prove a delimitação pelo método da substituição.

Exercício 6.B
Resolva a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & T(n-2) + 2n + 1 & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

Desenhe a árvore da recorrência. Dê a resposta em notação O.

Exercício 6.C
Resolva a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(2) & = & 2 & \\ T(n) & = & T(n-2) + 2n + 1 & \text{para } n = 3, 4, 5, 6, \ldots \end{array}$$

Exercício 6.D
Resolva a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & T(n/2) + 1 & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

Exercício 6.E
Resolva a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

Exercício 6.F
Resolva a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{array}$$

Exercício 6.G
Resolva a recorrência

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

Exercício 6.H
Resolva a recorrência

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= 2T(\lceil n/2 \rceil) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$