AULA 11'

Consumo médio de tempo do Quicksort

CLRS 7.4

Quicksort

Consumo de tempo no pior caso: $\Theta(n^2)$

No melhor caso: $\Theta(n \lg n)$

Consumo médio?

Divisão $\frac{1}{3}$ para $\frac{2}{3}$:

$R(n) = R(\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor) + R(\lceil \frac{2n-2}{3} \rceil) + \Theta(n)$

Solução: $R(n) = \Theta(n \lg n)$ veja exercício 9'.A

Divisão $\frac{1}{10}$ para $\frac{9}{10}$:

$R(n) = R(\lfloor \frac{n-1}{10} \rfloor) + R(\lceil \frac{9n-9}{10} \rceil) + \Theta(n)$

Solução: $R(n) = \Theta(n \lg n)$

Isso sugere que consumo médio é $\Theta(n \lg n)$.

Confirmação?

EXEMPLO:

Número médio de execuções da linha 4 do PARTICIONE.

Suponha que $A[p\,..\,r]$ é permutação de $1\,..\,n$

$A[p\,..\,r]$	execs
1,2	1
2,1	1
média	1

$A[p\,..\,r]$	execs
1,2,3	2+1
2,1,3	2+1
1,3,2	2+0
3,1,2	2+0
2,3,1	2+1
3,2,1	2+1
média	16/6

$A[p\,..\,r]$	execs
1,2,3,4	3+3
2,1,3,4	3+3
1,3,2,4	3+2
3,1,2,4	3+2
2,3,1,4	3+3
3,2,1,4	3+3
1,2,4,3	3+1
2,1,4,3	3+1
1,4,2,3	3+1
4,1,2,3	3+1
2,4,1,3	3+1
4,2,1,3	3+1

$A[p\,..\,r]$	execs
1,3,4,2	3+1
3,1,4,2	3+1
1,4,3,2	3+1
4,1,3,2	3+1
3,4,1,2	3+1
4,3,1,2	3+1
2,3,4,1	3+3
3,2,4,1	3+3
2,4,3,1	3+2
4,2,3,1	3+2
3,4,2,1	3+3
4,3,2,1	3+3
média	116/24

O número médio coincide exatamente com a fórmula

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1}$$

dada algumas transparência adiante.

Algo melhor: **Quicksort aleatorizado**

PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
$i \leftarrow$ RANDOM (p, r)
$A[i] \leftrightarrow A[r]$
devolva PARTICIONE (A, p, r)

QUICKSORT-ALE (A, p, r)
se $p < r$
    então $q \leftarrow$ PARTICIONE-ALEA (A, p, r)
        QUICKSORT-ALE $(A, p, q - 1)$
        QUICKSORT-ALE $(A, q + 1, r)$

Análise do consumo medio?
Basta contar o número esperado de comparações na linha 4 do PARTICIONE

Suponha $A[p\,..\,r]$ permutação de $1\,..\,n$

Quero calcular

$$
\begin{aligned}
X &= \text{total de comparaçs “}A[j] \le x\text{”} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}
\end{aligned}
$$

$$X_{ab} \;=\; \text{número de comparações entre } a \text{ e } b$$

Exemplo:

1	3	6	2	5	7	4

$\boxed{1 \mid 3 \mid 2}\;\; 4 \;\;\boxed{5 \mid 7 \mid 6}$

$\boxed{1}\;\; 2 \;\;\boxed{3}\;\; 4 \;\;\boxed{5}\;\; 6 \;\;\boxed{7}$

	1	2	3	4	5	6	7
1		1	0	1	0	0	0
2	1		1	1	0	0	0
3	0	1		1	0	0	0
4	1	1	1		1	1	1
5	0	0	0	1		1	0
6	0	0	0	1	1		1
7	0	0	0	1	0	1	

Supondo $a < b$,

$$X_{ab} = \begin{array}{ll} 1 & \text{se primeiro pivô em } \{a,\ldots,b\} \text{ é } a \text{ ou } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array}$$

$$\Pr\{X_{ab}{=}1\} \;=\; \frac{1}{b-a+1} + \frac{1}{b-a+1}$$

$$X = \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} X_{ab}$$

$$\mathrm{E}[X] = ?$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[X] &= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \mathsf{E}[X_{ab}] \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \Pr\{X_{ab}{=}1\} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \frac{2}{b-a+1} \\
&= \sum_{a=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-a} \frac{2}{k+1} \\
&< \sum_{a=1}^{n-1} 2\,(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}) \\
&< 2n\,(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}) \\
&< 2n\,(\ln n + 1) \qquad \text{CLRS (A.7), p.1060}
\end{aligned}
$$

Consumo esperado do QUICKSORT-ALE:

$$\mathrm{O}(n \lg n)$$