

AULA 12

E por falar em
análise probabilística
e algoritmos aleatorizados . . .

CLRS 5 e C.2–C.3

Hiring problem:

Encontrar o máximo de permutação $A[1..n]$
de $1, \dots, n$

MAX (A, n)

1 $max \leftarrow 0$

2 para $i \leftarrow 1$ até n

3 faça se $A[i] > max$

4 então $max \leftarrow A[i]$

5 devolva max

Quantas vezes linha 4 é executada?

Melhor caso, pior caso, caso médio

Suponha que $A[1..n]$ é
permutação aleatória uniforme
de $1, \dots, n$

isto é, cada permutação tem probabilidade $1/n!$

EXEMPLO: número de execuções da linha 4

$A[1..2]$	linha 14
1,2	2
2,1	1
$E[X]$	3/2

$A[1..3]$	linha 14
1,2,3	3
1,3,2	2
2,1,3	2
2,3,1	2
3,1,2	1
3,2,1	1
$E[X]$	11/6

$A[1..4]$	linha 14
1,2,3,4	4
1,2,4,3	3
1,3,2,4	3
1,3,4,2	3
1,4,2,3	2
1,4,3,2	2
2,1,3,4	3
2,1,4,3	2
2,3,1,4	3
2,3,4,1	3
2,4,1,3	2
2,4,3,1	2

$A[1..4]$	linha 14
3,1,2,4	2
3,1,4,2	2
3,2,1,4	2
3,2,4,1	2
3,4,1,2	2
3,4,2,1	2
4,1,2,3	1
4,1,3,2	1
4,2,1,3	1
4,2,3,1	1
4,3,1,2	1
4,3,2,1	1
$E[X]$	50/24

Variáveis aleatórias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se "max} \leftarrow A[i]" \text{ é executado} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X &= \text{núm total de execs da linha 4} \\ &= X_1 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

Esperanças:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \text{probabilidade de que } A[i] \text{ seja} \\ &\quad \text{máximo em } A[1..i] \\ &= 1/i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + \cdots + X_n] \\ &= E[X_1] + \cdots + E[X_n] \\ &= 1/1 + \cdots + 1/n \\ &< \ln n + 1 \\ &= O(\lg n) \end{aligned}$$

$$2.92 < \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{10} < 2.93 < 3.30 < 1 + \ln 10$$

Como garantir permutação aleatória uniforme?

```
MAX-ALEATORIZADO ( $A, n$ )  
0  PERMUTE( $A$ )  
1   $max \leftarrow 0$   
2  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$   
3    faça se  $A[i] > max$   
4      então  $max \leftarrow A[i]$   
5  devolva  $max$ 
```

Linha 0 faz uma permutação aleatória uniforme dos elementos de A

Como?