Ordenação: limite inferior

Problema:
Rearranjar $A[1 \dots n]$ em ordem crescente

Existem algoritmos $O(n \lg n)$
Existe algoritmo assintoticamente melhor?

NÃO,
se o algoritmo é baseado em comparações

Prova?

Qualquer algoritmo de comparações
é uma "árvore de decisão"

EXEMPLO: INSERTION-SORT com $n = 3$

- Árvore de decisão para a, b, c, todos distintos
- "$a : b$" representa comparação entre a e b

```
                     a : b

                 <           >

          b : c                    a : c
         /     \                  /     \
      abc       a : c          bac       b : c
               /     \                  /     \
            acb       cab            bca       cba
```

- "bac" significa que $b < a < c$

Árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$

- todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas

- número de comparações, no pior caso? resposta: altura, h, da árvore

- devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$

- $(n!)^2 \;=\; \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \;\geq\; \prod_{i=1}^{n} n \;=\; n^n$

- $h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n \lg n$

Conclusão: Todo algoritmo de ordenação baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso

TAREFA 12'

Exercício 12'.A
Desenha a árvore de decisão para o SELECTION-SORT aplicado a $A[1\,..\,3]$ com todos os elementos distintos.

Exercício 12'.B [CLRS 8.1-1]
Qual o menor profundidade (= menor nível) que uma folha pode ter em uma árvore de decisão que descreve um algoritmo de ordenação baseado em comparações?

Exercício 12'.C [CLRS 8.1-2]
Mostre que $\lg(n!) = \Omega(n \lg n)$ sem usar a fórmula de Stirling.
Sugestão: Calcule $\sum_{k=n/2}^{n} \lg k$. Use as técnicas de CLRS A.2.