

# Ordenação: limite inferior

Problema:

Rearranjar  $A[1 \dots n]$  em ordem crescente

Existem algoritmos  $O(n \lg n)$

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

NÃO,

se o algoritmo é baseado em comparações

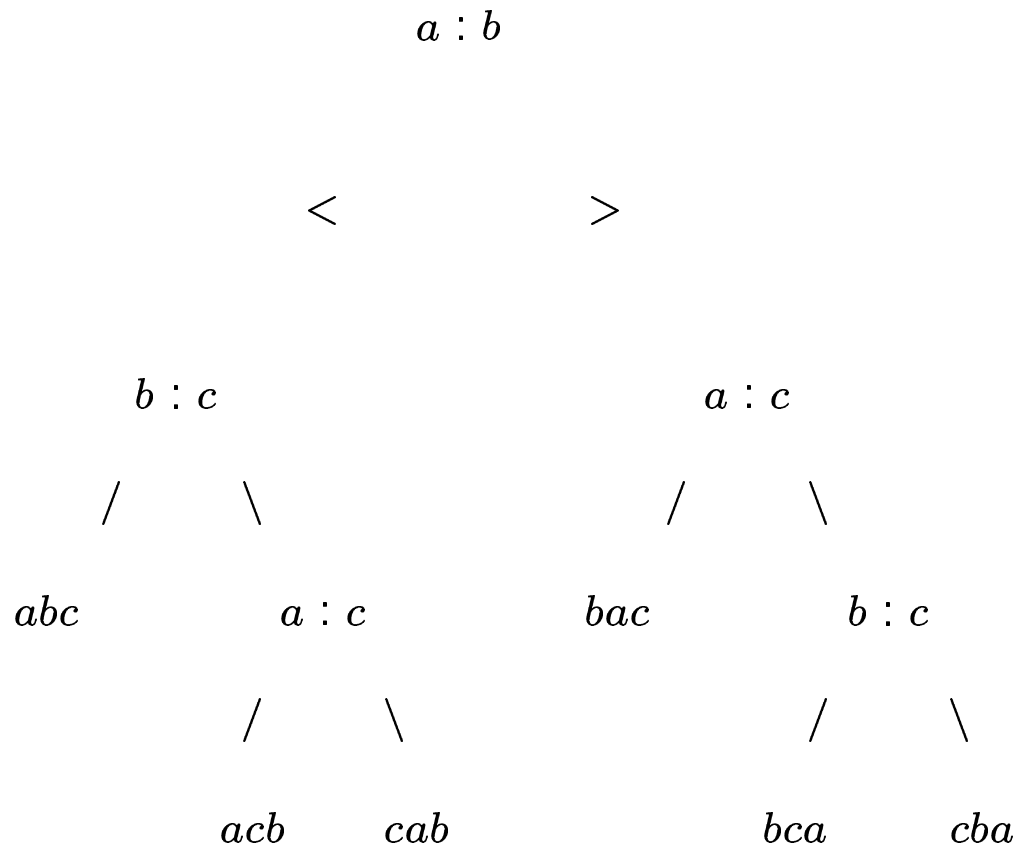
Prova?

Qualquer algoritmo de comparações

é uma “árvore de decisão”

## EXEMPLO: INSERTION-SORT com $n = 3$

- Árvore de decisão para  $a, b, c$ , todos distintos
- “ $a : b$ ” representa comparação entre  $a$  e  $b$



- “ $bac$ ” significa que  $b < a < c$

## Árvore de decisão para $A[1..n]$

- todas as  $n!$  permutações de  $1, \dots, n$  devem ser folhas
- número de comparações, no pior caso?  
resposta: altura,  $h$ , da árvore
- devemos ter  $2^h \geq n!$ , donde  $h \geq \lg(n!)$
- $(n!)^2 = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)(i+1) \geq \prod_{i=1}^n n = n^n$
- $h \geq \lg(n!) \geq \frac{1}{2} n \lg n$

Conclusão: Todo algoritmo de ordenação baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso

## TAREFA 12'

### Exercício 12'.A

Desenha a árvore de decisão para o SELECTION-SORT aplicado a  $A[1..3]$  com todos os elementos distintos.

### Exercício 12'.B [CLRS 8.1-1]

Qual o menor profundidade (= menor nível) que uma folha pode ter em uma árvore de decisão que descreve um algoritmo de ordenação baseado em comparações?

### Exercício 12'.C [CLRS 8.1-2]

Mostre que  $\lg(n!) = \Omega(n \lg n)$  sem usar a fórmula de Stirling.  
Sugestão: Calcule  $\sum_{k=n/2}^n \lg k$ . Use as técnicas de CLRS A.2.