

# AULA 7

## Análise de algoritmos recursivos

CLRS 2.3  
AU 2.8, 3.9, 3.10

## Exemplo 1: Ordenação por inserção

Rearranja  $A[p..r]$ , com  $p \leq r$ , em ordem crescente

```
ORDENA-POR-INS ( $A, p, r$ )
1  se  $p < r$ 
2    então ORDENA-POR-INS ( $A, p, r - 1$ )
3       $chave \leftarrow A[r]$ 
4       $i \leftarrow r - 1$ 
5      enquanto  $i \geq p$  e  $A[i] > chave$  faça
6         $A[i + 1] \leftarrow A[i]$ 
7         $i \leftarrow i - 1$ 
8       $A[i + 1] \leftarrow chave$ 
```

O algoritmo está correto?

$T(n) :=$  consumo de tempo máximo  
quando  $r - p + 1 = n$

linha	consumo na linha
1	$O(1)$
2	$T(n - 1)$
3	$O(1)$
4	$O(1)$
5	$O(n)$
6	$O(n)$
7	$O(n)$
8	$O(1)$

$$T(n) = T(n - 1) + O(3n + 4)$$

$$T(n) = T(n - 1) + O(n)$$

Tradução: existe função  $F(n)$  em  $O(n)$  tq  
 $T(n) = T(n - 1) + F(n)$  para todo  $n$   
suficientemente grande

Mais tradução: Existem  $a, c > 0$  e  $n_0 > 0$  tq  
 $T(n_0 - 1) = a$  e  $T(n) \leq T(n - 1) + cn$  para todo  $n \geq n_0$   
(em virtude do ex 3.I poderíamos tomar  $n_0 = 0$ )

Solução:  $T(n) = O(n^2)$

Prova?

Exemplo:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n - 1) + 3n + 4 \quad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

Solução:  $T(n) \leq 4n^2$  para  $n \geq 1$

Prova?

## Exemplo 2: Merge-Sort

Rearranja  $A[p..r]$ , com  $p \leq r$ , em ordem crescente.

MERGE-SORT ( $A, p, r$ )

1 se  $p < r$

2     então  $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

3             MERGE-SORT ( $A, p, q$ )

4             MERGE-SORT ( $A, q + 1, r$ )

5             INTERCALA ( $A, p, q, r$ )

$p$				$q$				$r$
99	99	99	99	99	99	99	99	99

O algoritmo está correto?

$T(n) :=$  consumo de tempo máximo  
quando  $r - p + 1 = n$

linha	consumo na linha
1	$O(1)$
2	$O(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$O(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n + 2)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n)$$

Solução:  $T(n) = O(n \lg n)$ .

Prova?

## TAREFA (AULA 7)

### Exercício 7.A

Que acontece se trocarmos  $\lfloor (p+r)/2 \rfloor$  por  $\lceil (p+r)/2 \rceil$  na linha 2 do MERGE-SORT?

### Exercício 7.B

Quantas vezes a comparação “ $A[r] \neq 0$ ” é executada? Defina esse número por meio de um recorrência.

```
Limpa ( $A, p, r$ )
1  se  $p = r$ 
2    então devolva  $r$ 
3  senão  $q \leftarrow$  Limpa ( $A, p, r - 1$ )
4        se  $A[r] \neq 0$ 
5          então  $q \leftarrow q + 1$ 
6                 $A[q] \leftarrow A[r]$ 
7        devolva  $q$ 
```

Dê uma fórmula exata para a função definida pela recorrência. Em que classe  $\Theta$  está a função definida pela recorrência?