Melhores momentos

AULA 23

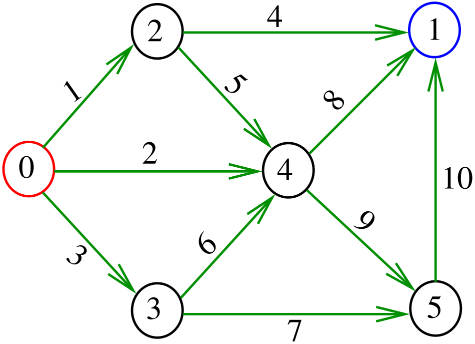
Saldos

O **saldo** em `v` é a diferença

$$\texttt{ef}(\texttt{v}) - \texttt{inf}(\texttt{v})$$

entre o efluxo de `v` e o influxo em `v`.

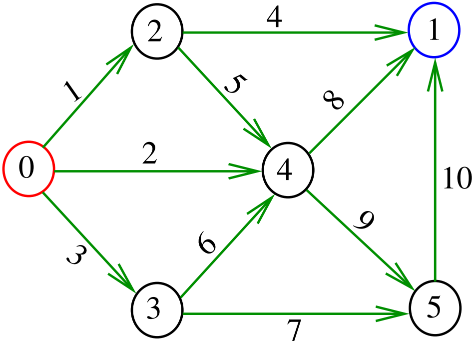
Exemplo: o saldo do vértice 4 é 17-13=4



Fluxos

Num digrafo com vértice inicial `s` e vértice final `t`, um **fluxo** (= *flow*) é uma função `f` que atribui valores em $\mathbb{Z}_{\geq}$ aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de `s` e `t` é nulo e em `s` é ≥ 0.

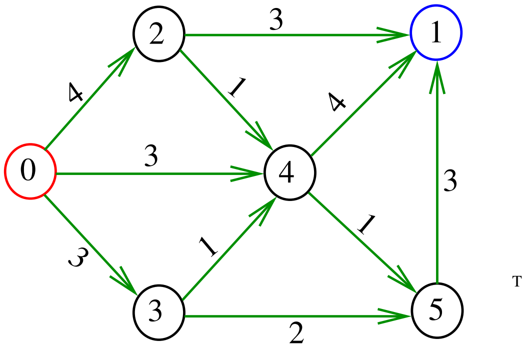
Exemplo: não é um fluxo



Fluxos

Num digrafo com vértice inicial $\mathtt{s}$ e vértice final $\mathtt{t}$, um **fluxo** (= *flow*) é uma função $\mathtt{f}$ que atribui valores em $\mathbb{Z}_{\geq}$ aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de $\mathtt{s}$ e $\mathtt{t}$ é nulo e em $\mathtt{s}$ é ≥ 0.

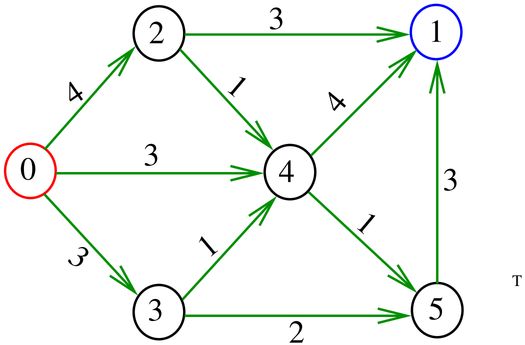
Exemplo: é um fluxo onde $\mathtt{s}$=0 e $\mathtt{t}$=1



Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo `f` é o saldo de `f` em `s`.
Em geral (mas nem sempre) o influxo em `s` é nulo e o efluxo de `t` é nulo.

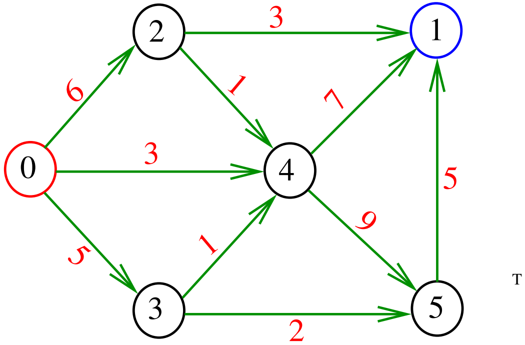
Exemplo: fluxo de intensidade 10



Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com vértice inicial e vértice final em que a cada um arcos está associado um número em $\mathbb{Z}_{\geq}$ que chamaremos **capacidade do arco**.

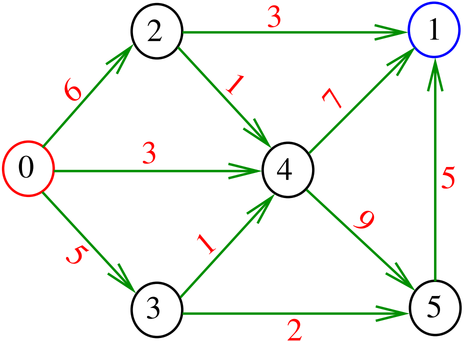
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: rede capacitada

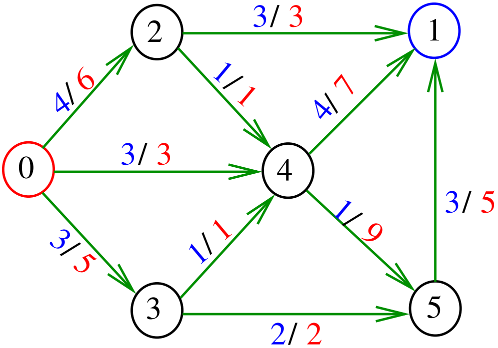


T

Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: fluxo que respeita as capacidades

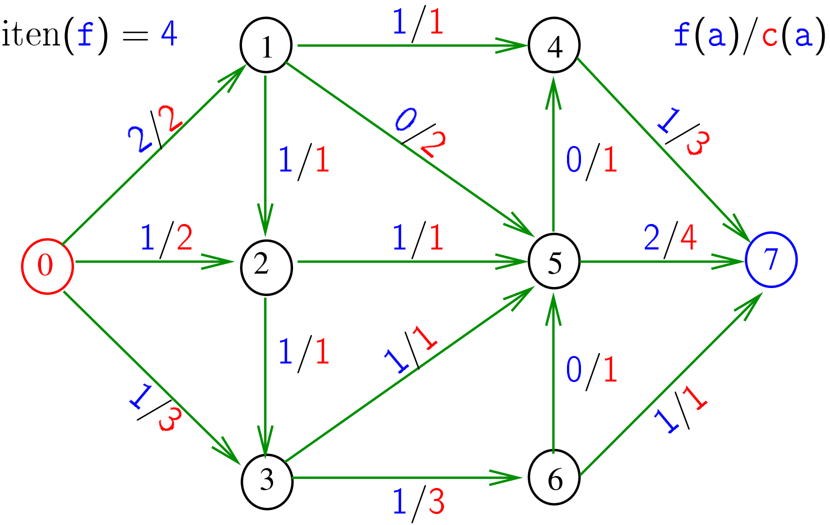


AULA 24

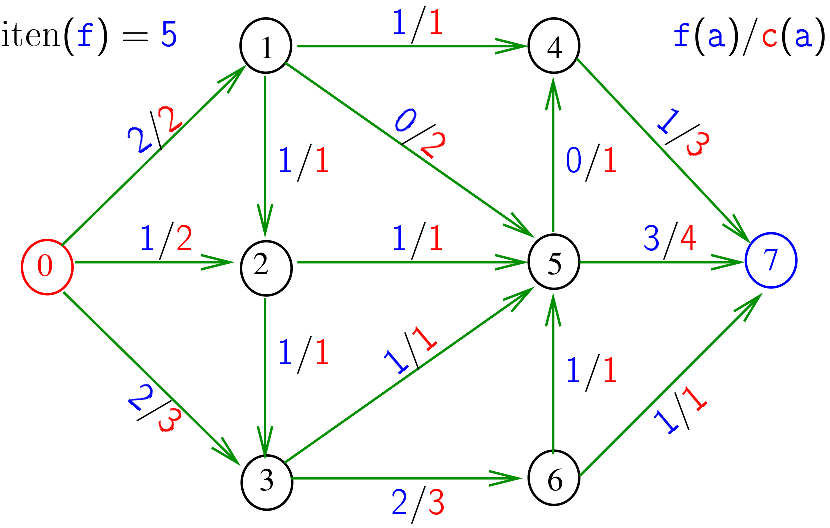
Método dos caminhos de aumento

S 22.2

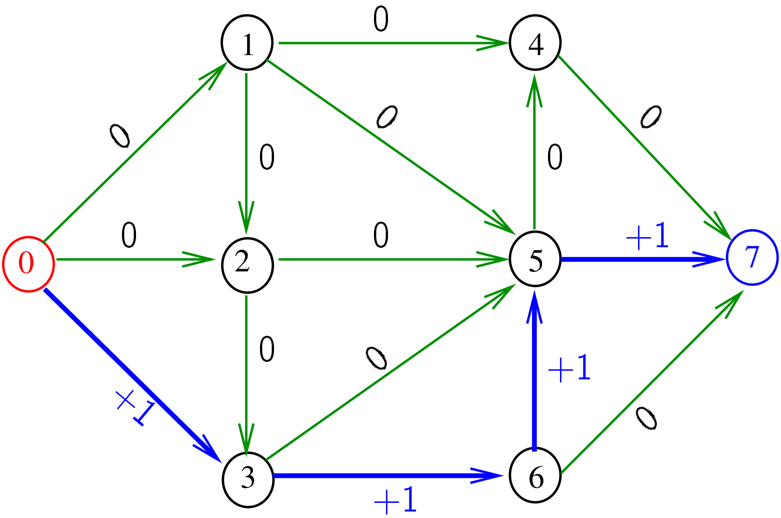
Fluxo é máximo?



E agora? Fluxo é máximo?



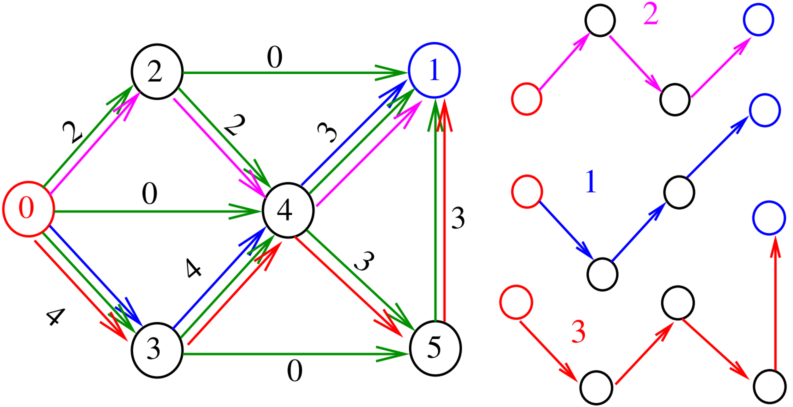
Onde mudou?



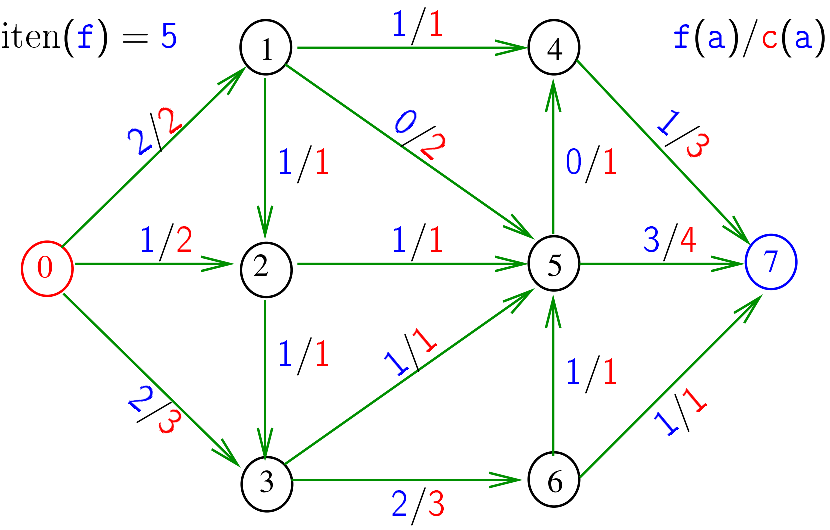
Decomposição de fluxos

Fluxos podem ser representados por caminhos de $\texttt{s}$ a $\texttt{t}$. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

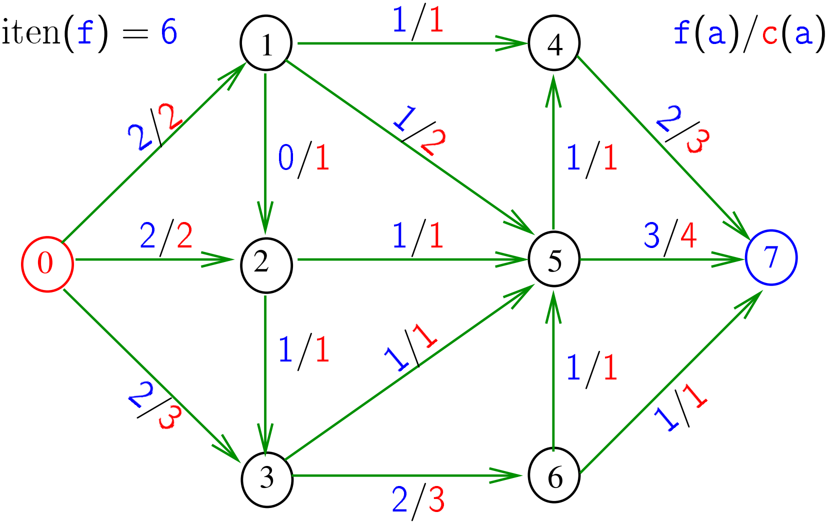
Exemplo:



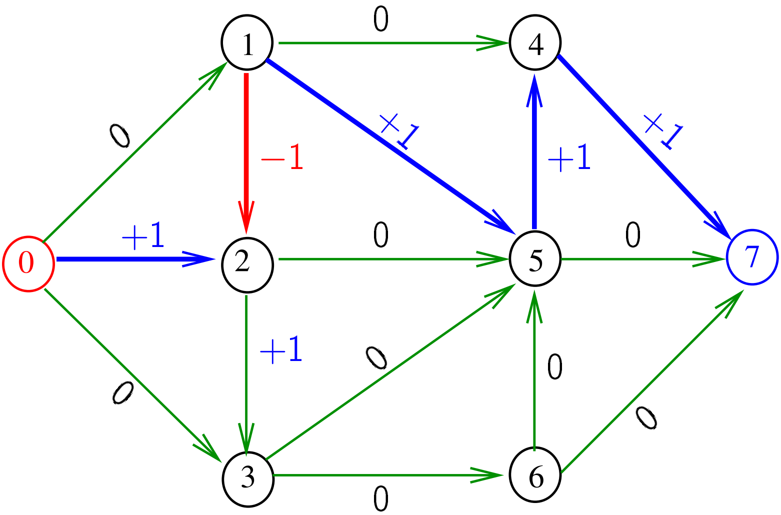
Fluxo é máximo?



E agora? Fluxo é máximo?

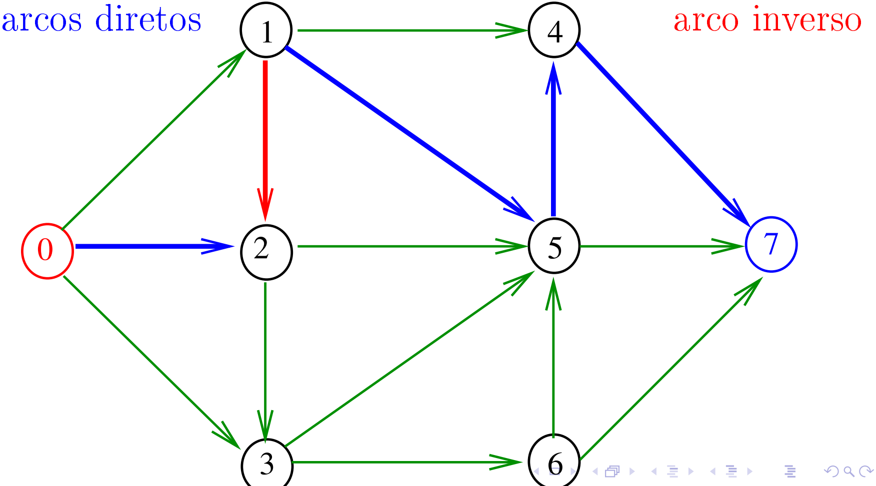


Onde mudou?



Pseudo-caminhos

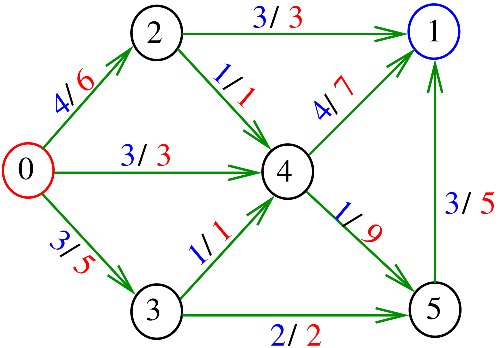
Um **pseudo-caminho** num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (`u`,`v`) de vértices consecutivos, `u`-`v` ou `v`-`u` é um arco do digrafo.



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco `u-v` está **cheio** se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco `u-v` está **vazio** se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio

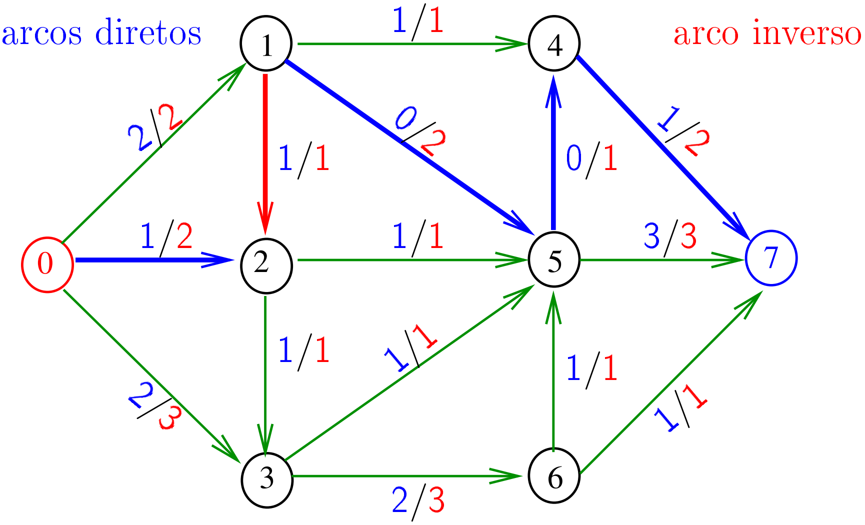


Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e
- os arcos inversos não estão vazios.

Exemplo

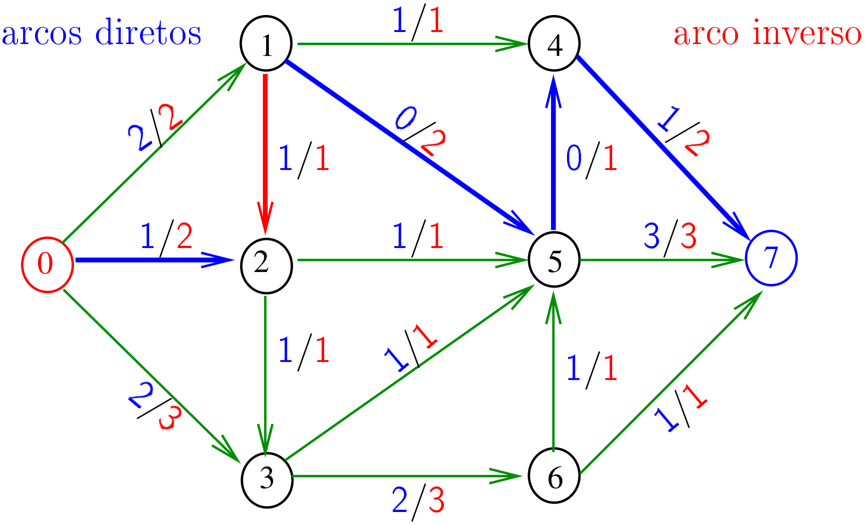

arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
2/3
0/1
1/2
1/1
3/3
1/1

Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de **enviar** d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

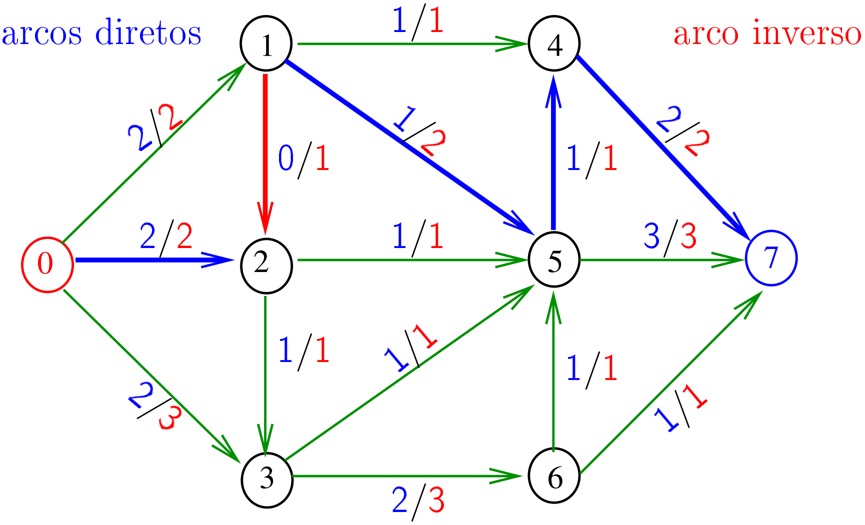
- para cada arco direto, some d ao fluxo
- para cada arco inverso, subtraia d do fluxo.

Exemplo



arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
1/1
2/3
0/1
1/2
3/3
1/1
1/1

Exemplo


arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
1/1
2/2
0/1
1/2
2/2
1/1
2/2
1/1
3/3
1/1
1/1
1/1
2/3
1/1
1/1
2/3

Capacidade residual

A **capacidade residual** de um arco direto $\mathtt{a}$ é

$$\mathtt{c}(\mathtt{a}) - \mathtt{f}(\mathtt{a}).$$

A **capacidade residual** de um arco reverso $\mathtt{b}$ é

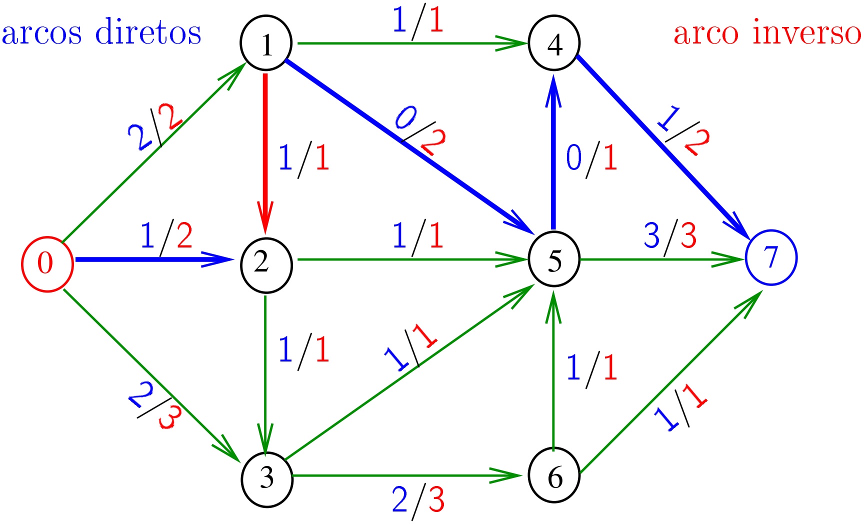
$$\mathtt{f}(\mathtt{b}).$$

A **capacidade residual de um caminho de aumento** é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e
- arco direto 4-7 é 1.

Exemplo

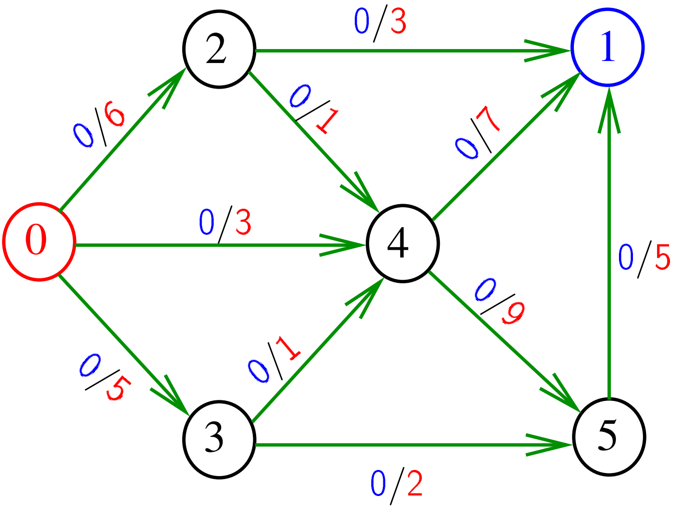


arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
0/1
1/1
1/2
3/3
1/1
2/3

Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\texttt{f}) = 0$

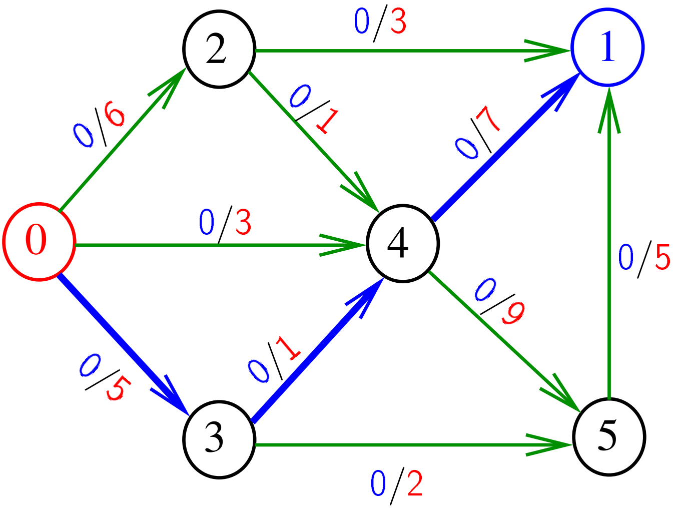
$\texttt{f(a)}/\texttt{c(a)}$



Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 0$

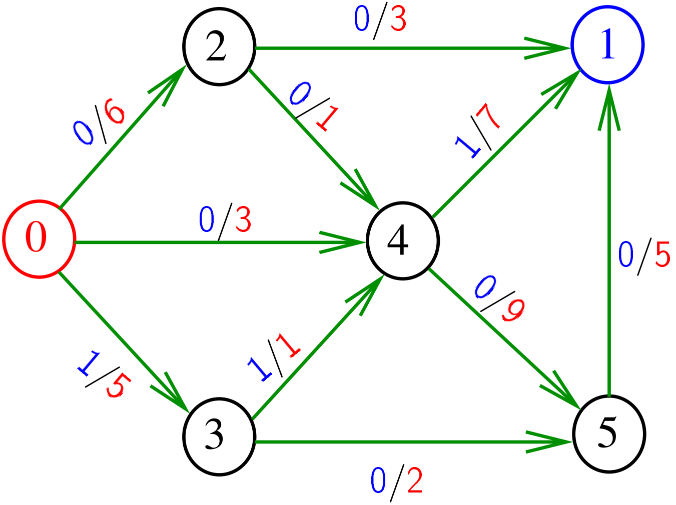
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 1$

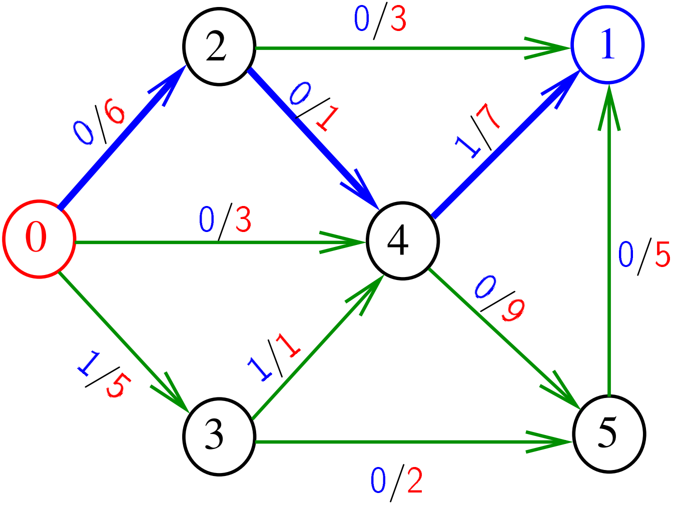
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Método dos caminhos de aumento

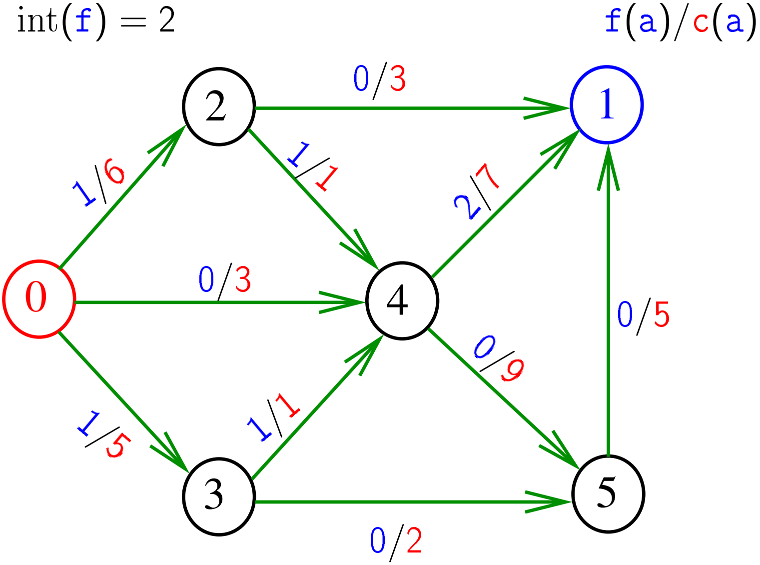
$\text{int}(\mathtt{f}) = 1$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



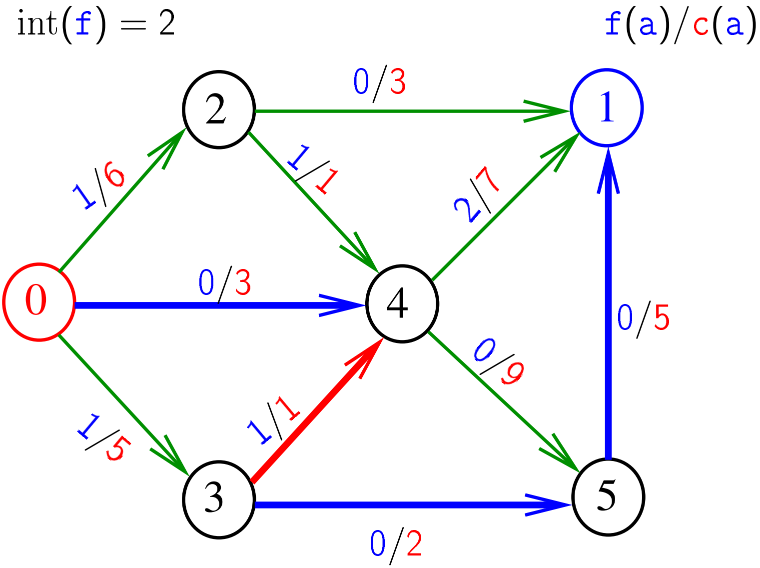
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 2$



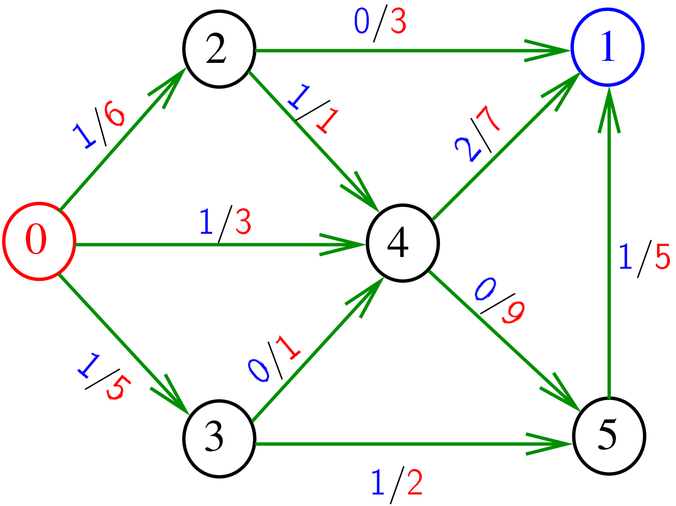
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\texttt{f}) = 2$



Método dos caminhos de aumento

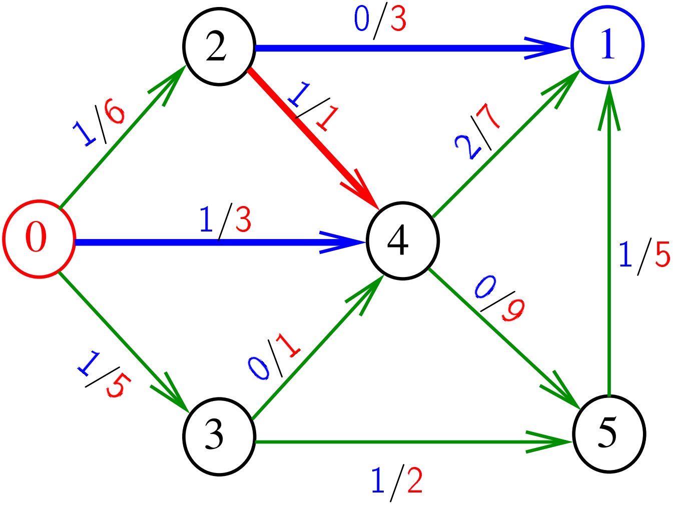
$\text{int}(f) = 3$ $\qquad$ $f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

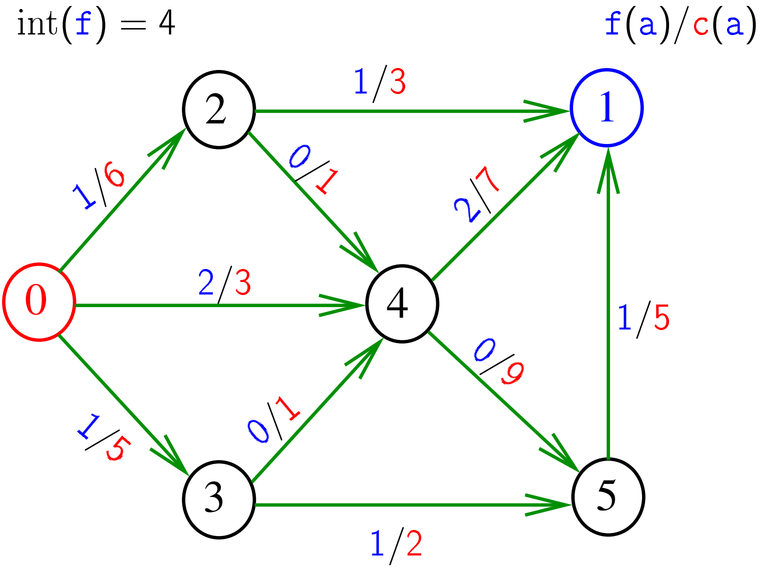
$\text{int}(\mathtt{f}) = 3$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



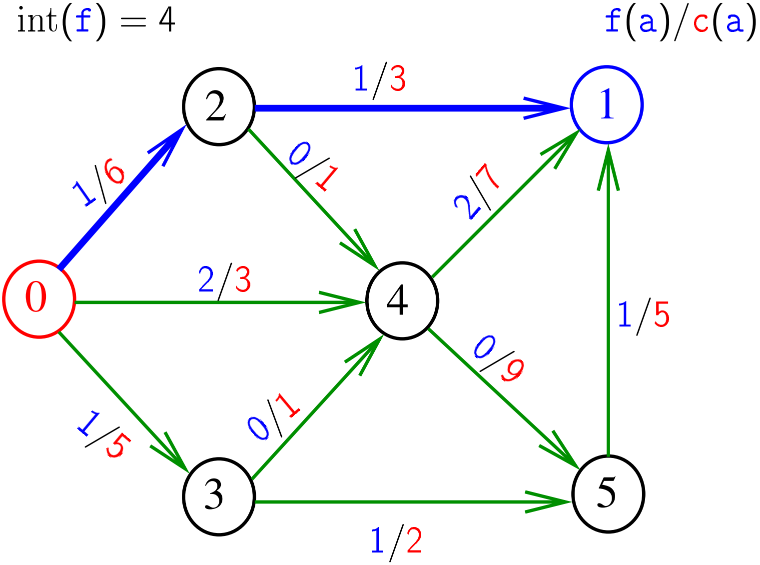
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 4$



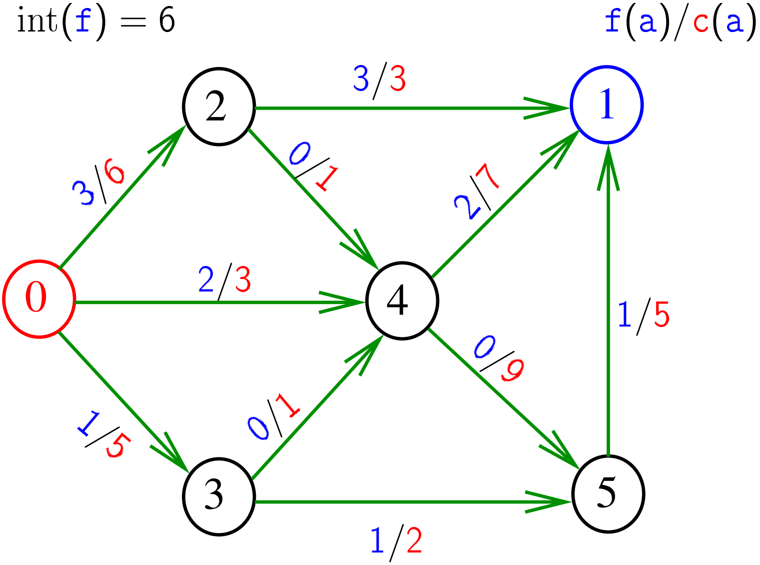
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\mathtt{f}) = 4$



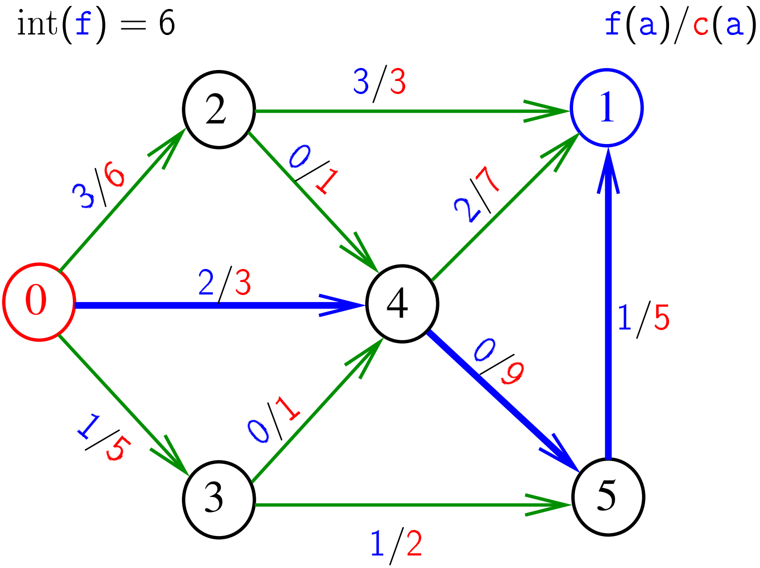
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\mathtt{f}) = 6$



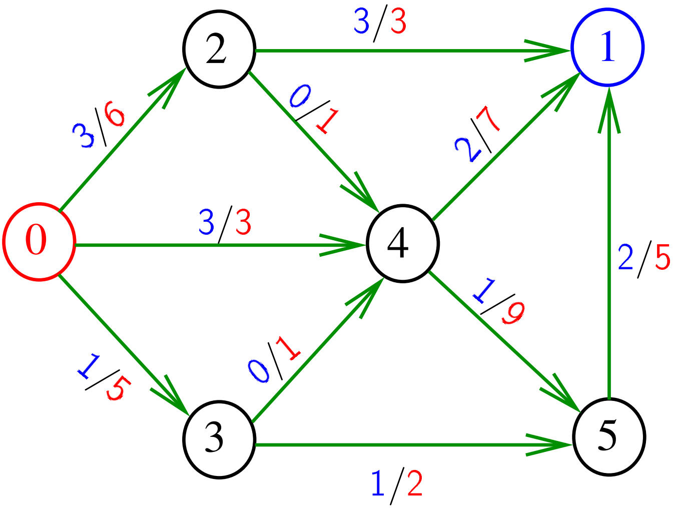
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\mathtt{f}) = 6$



Método dos caminhos de aumento

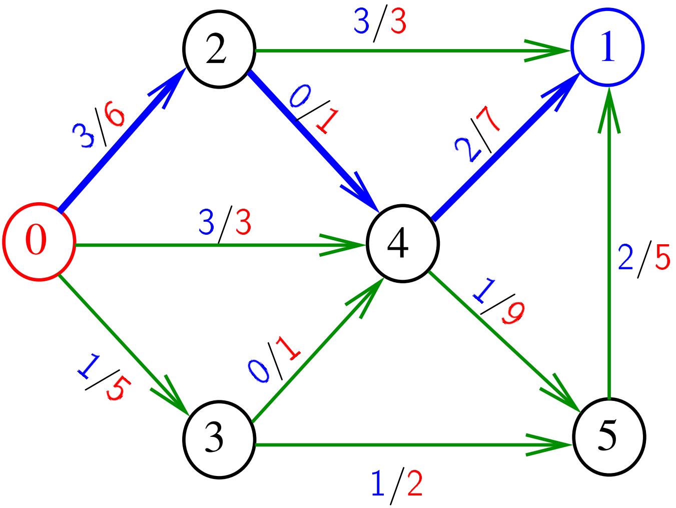
$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 7$



Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\texttt{f}) = 7$

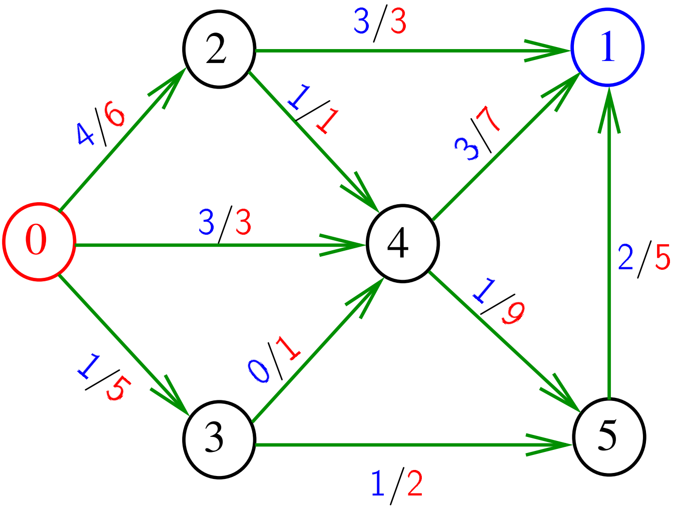
$\texttt{f(a)/c(a)}$



Método dos caminhos de aumento

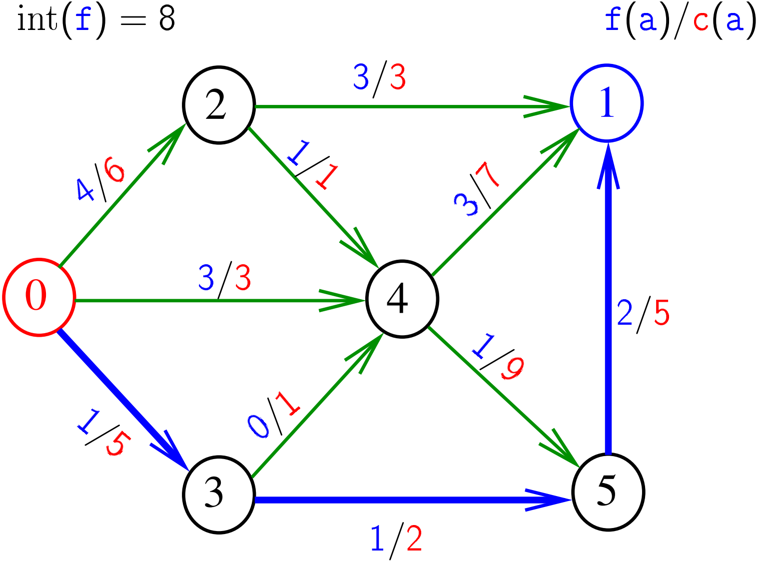
$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 8$

$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



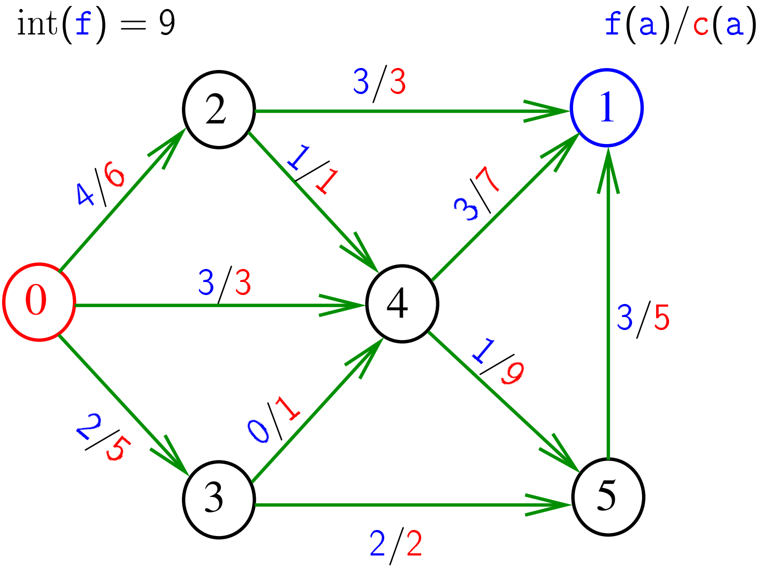
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 8$



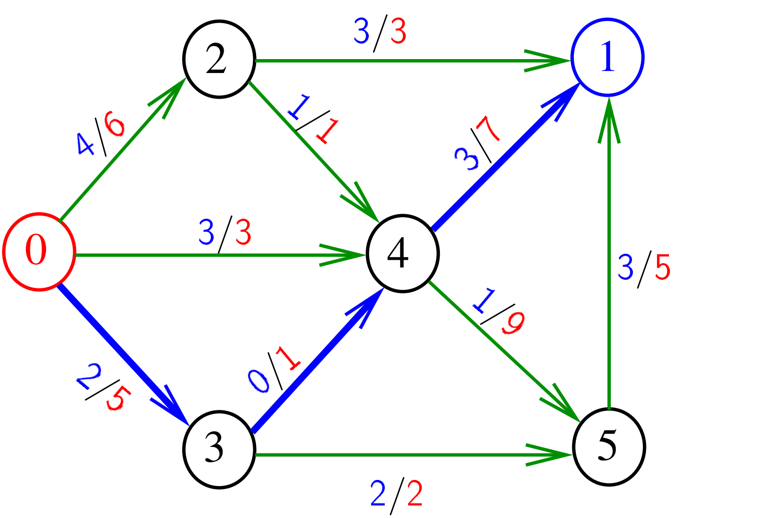
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\texttt{f}) = 9$



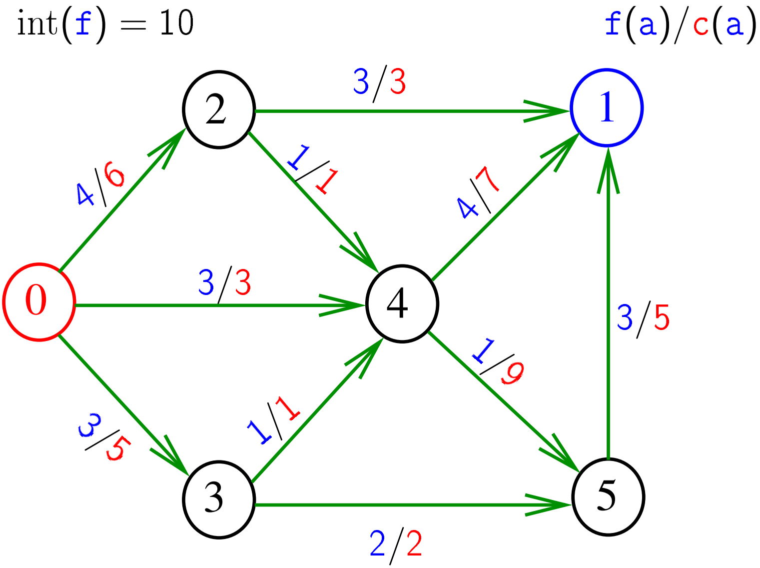
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\texttt{f}) = 9$



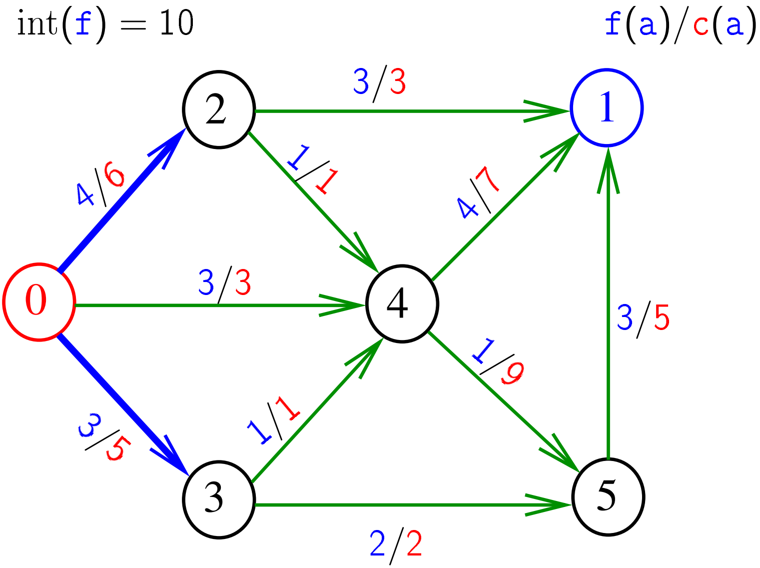
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(\texttt{f}) = 10$



Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 10$



Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento
Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P
Seja f' o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P
Comece nova iteração com f' no papel de f

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

(i0) f é inteiro;

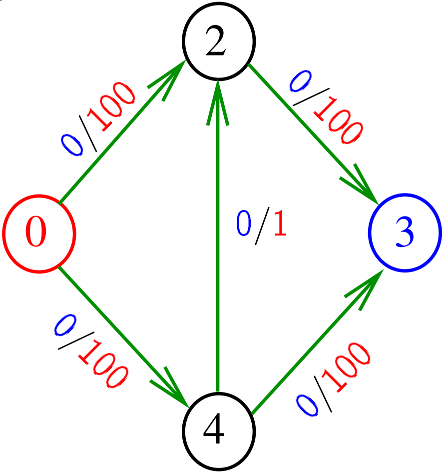
(i1) f é um fluxo;

(i2) f respeita c.

Número de iterações

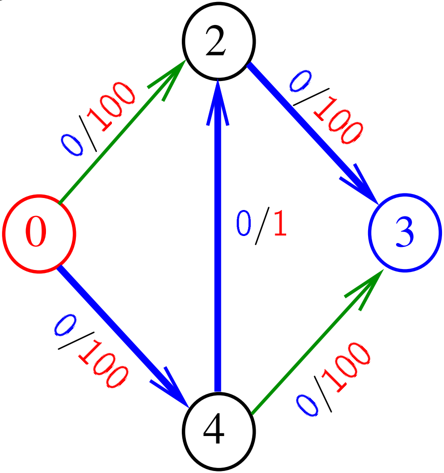
$\text{int}(\mathtt{f}) = 0$

$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

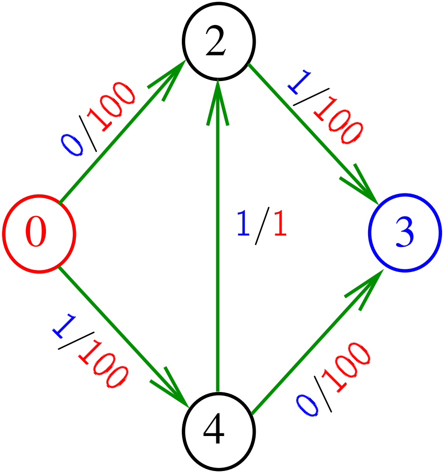
$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 0$ $\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

$\text{int}(\mathtt{f}) = 1$

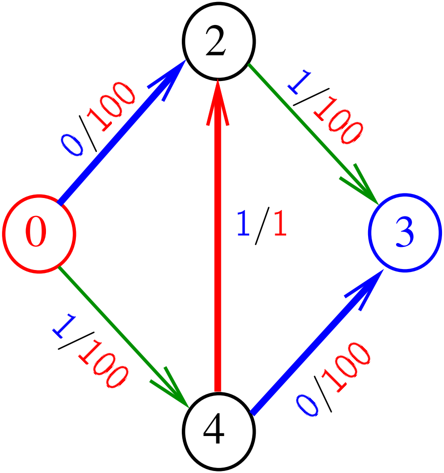
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

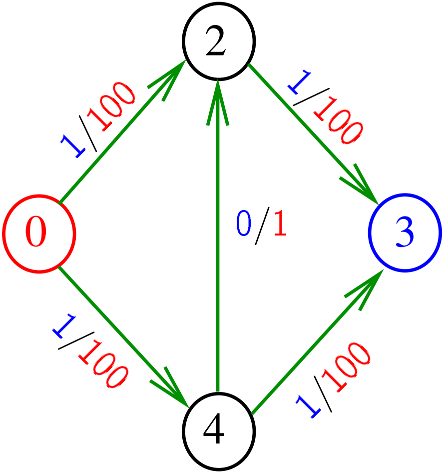
$\text{int}(\mathtt{f}) = 1$

$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

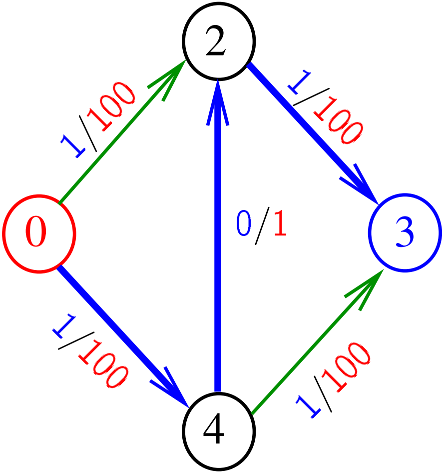
$\text{int}(\texttt{f}) = 2$ $\qquad\qquad$ $\texttt{f}(\texttt{a})/\texttt{c}(\texttt{a})$



Número de iterações

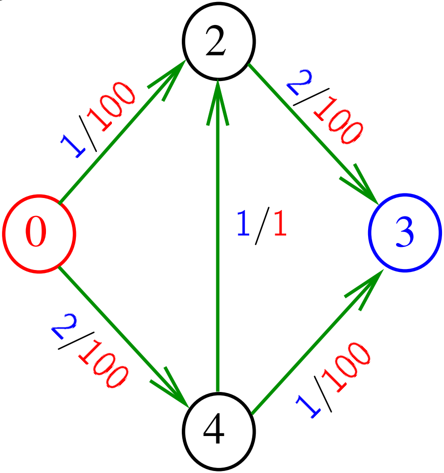
$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 2$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

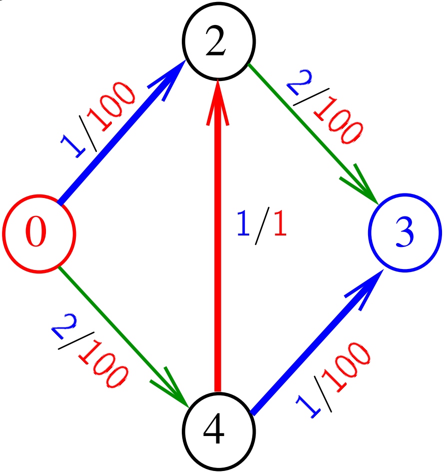
$\text{int}(f) = 3$ $\qquad$ $f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 3$

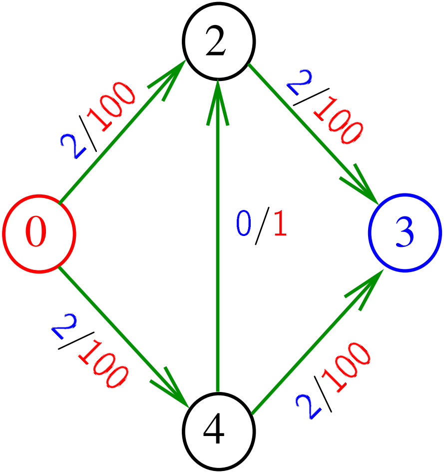
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

$\text{int}(\texttt{f}) = 4$

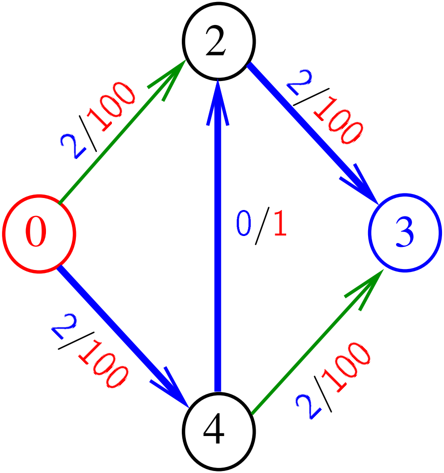
$\texttt{f}(\texttt{a})/\texttt{c}(\texttt{a})$



Número de iterações

$\mathrm{int}(f) = 4$

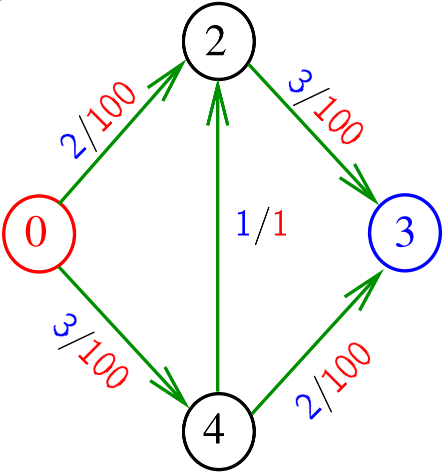
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(f) = 5$

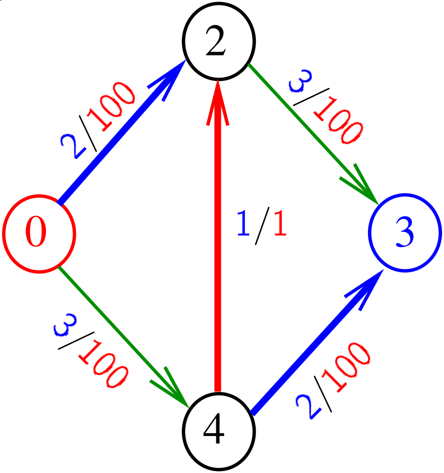
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(f) = 5$

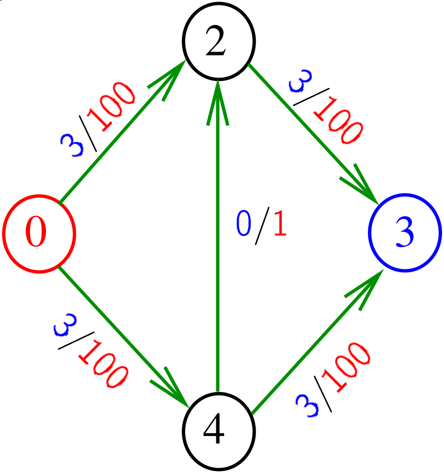
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\texttt{f}) = 6$

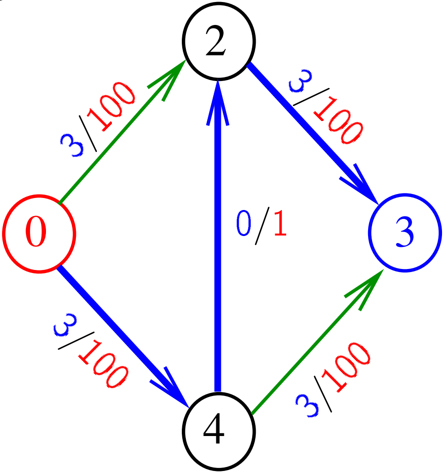
$\texttt{f}(\texttt{a})/\texttt{c}(\texttt{a})$



Número de iterações

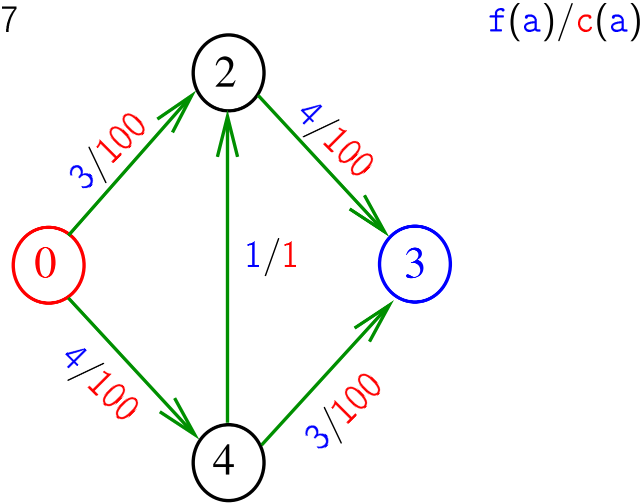
$\text{int}(\mathtt{f}) = 6$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

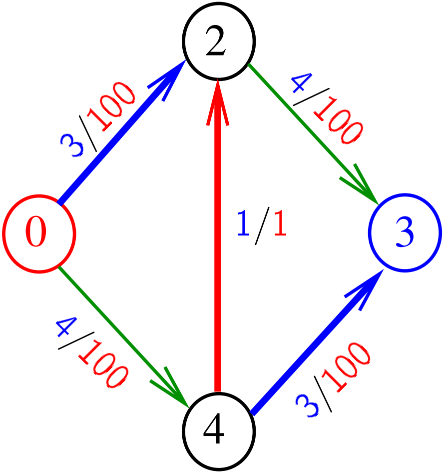
$\mathrm{int}(f) = 7$



Número de iterações

$\text{int}(\mathtt{f}) = 7$

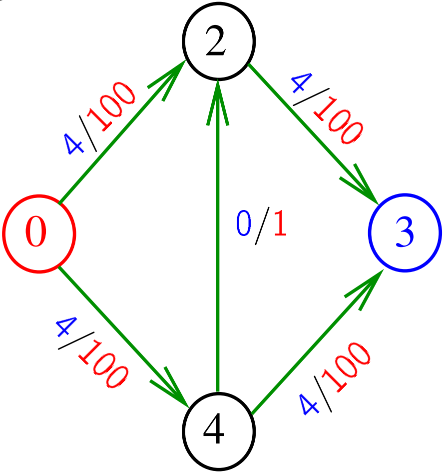
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\text{int}(\texttt{f}) = 8$

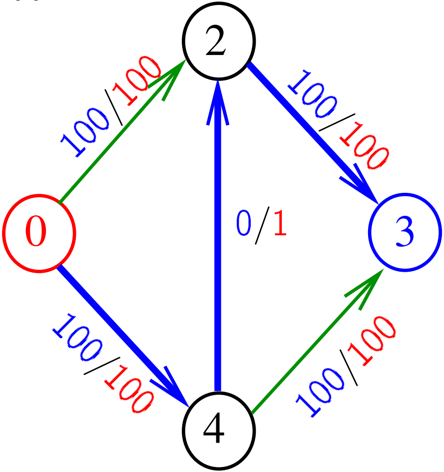
$\texttt{f}(\texttt{a})/\texttt{c}(\texttt{a})$



Fluxo máximo

$\mathrm{int}(f) = 100$

$f(a)/c(a)$



Conclusão

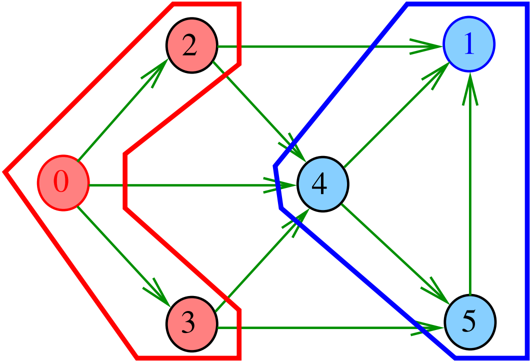
Se todos os arcos da rede têm capacidade menor que `M` então o número de caminhos de aumento necessário para atingir o fluxo máximo é menor que `V` $\times$ `M`, sendo `V` o número de vértices da rede.

Cortes

Um **corte** (= *st-cut*) é qualquer partição (S, T) do conjunto de vértices tal que

> *s está em S e t está em T.*

Exemplo:

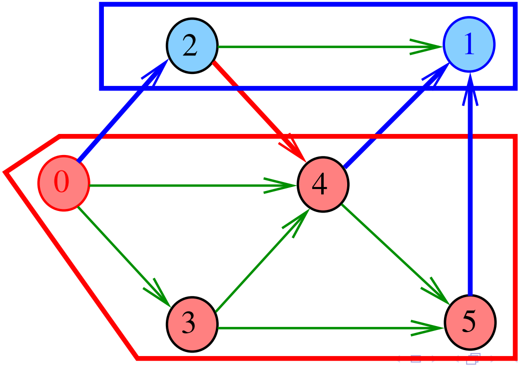


Arcos diretos e arcos inversos

Um **arco direto** de um corte (S,T) é qualquer arco que vai de S para T.

Um **arco inverso** do corte é qualquer arco que vai de T para S.

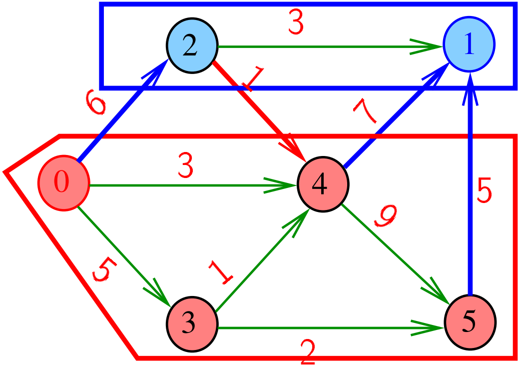
Exemplo: arcos azuis são diretos e vermelho é inverso



Capacidade de um corte

Numa rede capacitada, a capacidade de um corte (S,T) é a soma das capacidades dos arcos diretos do corte.

Exemplo: corte de capacidade 18

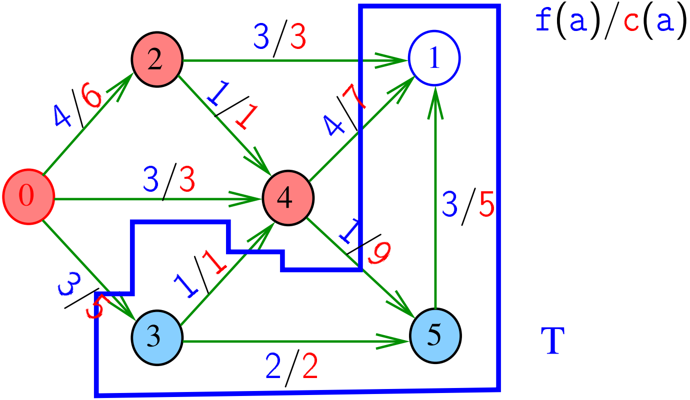


Lema da dualidade

Se $\mathtt{f}$ é um fluxo que respeita $\mathtt{c}$ e $(\mathtt{S}, \mathtt{T})$ é um corte então

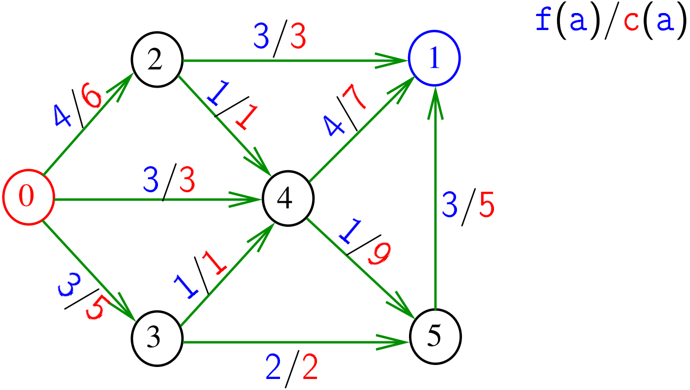
intensidade de $f \leq$ *capacidade de* (S, T).

Exemplo: $\text{int}(\mathtt{f}) = 10 \leq 24 = \mathtt{c}(\mathtt{S}, \mathtt{T})$.



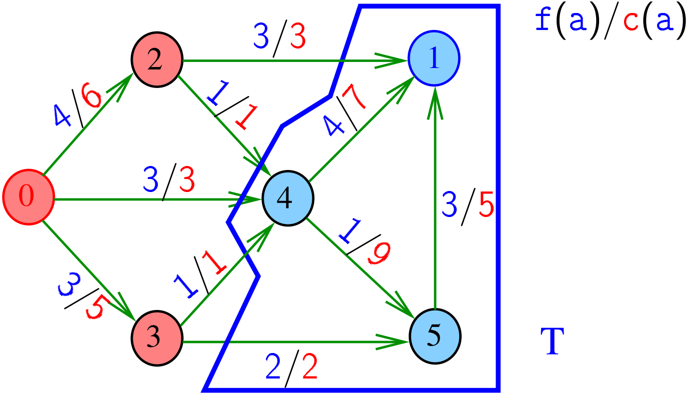
Conseqüência

Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de f $=$ capacidade de (S,T). então f é um fluxo de máximo e (S, T) é um corte de capacidade mínima.

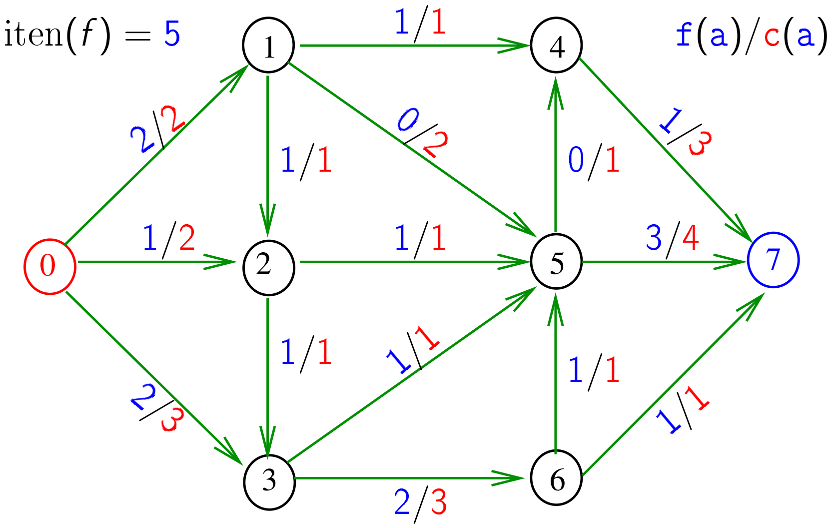


Conseqüência

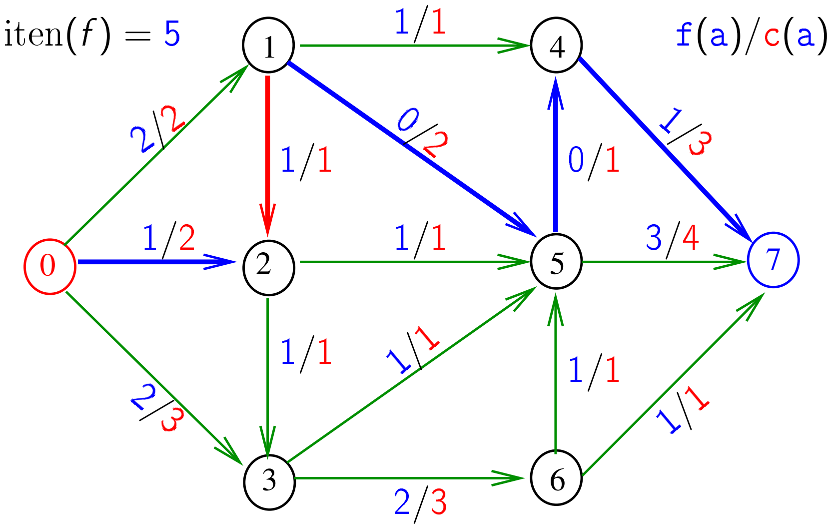
Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de f = capacidade de (S,T). então f é um fluxo de máximo e (S, T) é um corte de capacidade mínima.



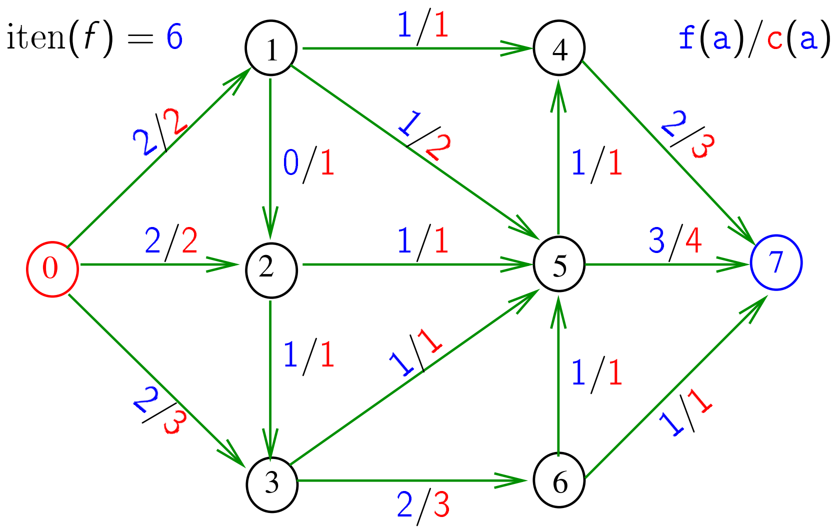
Fluxo é máximo?



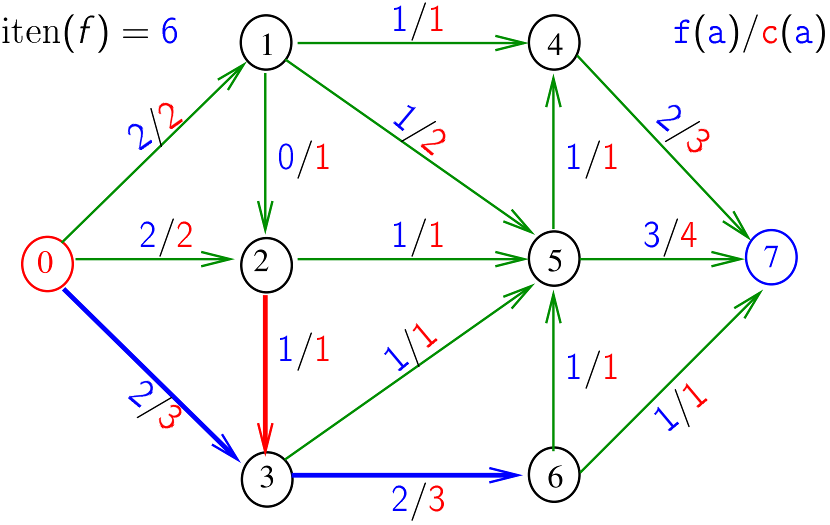
Caminho de aumento



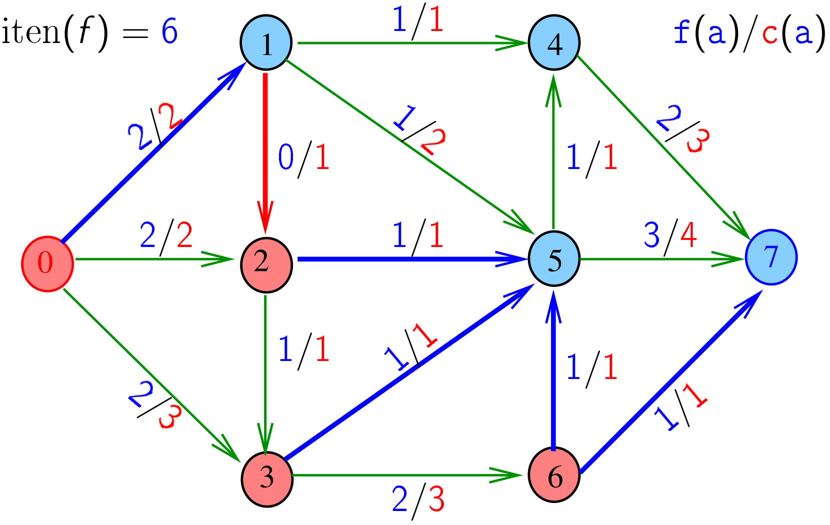
E agora? Fluxo é máximo?



Fluxo é máximo!



Fluxo é máximo!



Correção do método

Para mostrar que a correção do método dos caminhos de aumento basta mostrar que:

> *se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.*

Correção do método

Para mostrar que a correção do método dos caminhos de aumento basta mostrar que:

> *se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.*

Seja $\mathtt{S}$ o conjunto de todos os vértices que são término de um "caminho de aumento".
Seja $\mathtt{T}$ o conjunto dos demais vértices do digrafo.

É claro que $\mathtt{s}$ está em $\mathtt{S}$ e $\mathtt{t}$ está em $\mathtt{T}$. Portanto, $(\mathtt{S},\mathtt{T})$ é um corte.

Todos os arcos diretos desse corte estão cheios
Todos os arcos inversos estão vazios.

Portanto, o fluxo através desse corte é igual à capacidade do corte.

Logo, pelo lema da dualidade, nosso fluxo tem intensidade máxima.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois vértices $\texttt{s}$ e $\texttt{t}$ em uma rede capacidade com função-capacidade $\texttt{c}$ tem-se que

$$\begin{aligned} &\max\{\text{int}(\texttt{f}) : \texttt{f} \text{ é fluxo que respeita } \texttt{c}\} \\ = &\min\{\texttt{c}(\texttt{S}, \texttt{T}) : (\texttt{S}, \texttt{T}) \text{ é um corte}\}. \end{aligned}$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

> Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.