

AULA 23

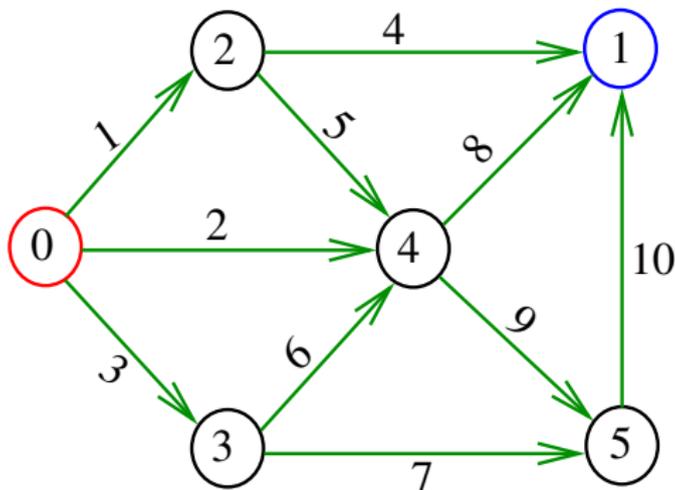
Fluxos em redes

S 22.1

Fluxos em arcos

Seja f uma função dos arcos de um digrafio G em \mathbb{Z}_{\geq} .
Diremos o valor de f num arco é o **fluxo no arco**.

Exemplo: o fluxo no arco 2-4 é 5

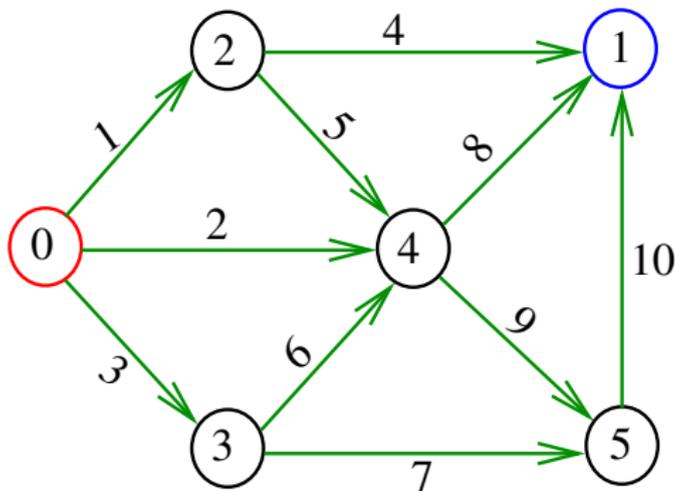


Influxos e efluxos

O **influxo** em v ($=$ *inflow into v*) é a soma dos fluxos nos arcos que entram em v .

O **efluxo** de v ($=$ *outflow from v*) é a soma dos fluxos nos arcos que saem de v .

Exemplo: em 4 o influxo é 13 e o efluxo é 17



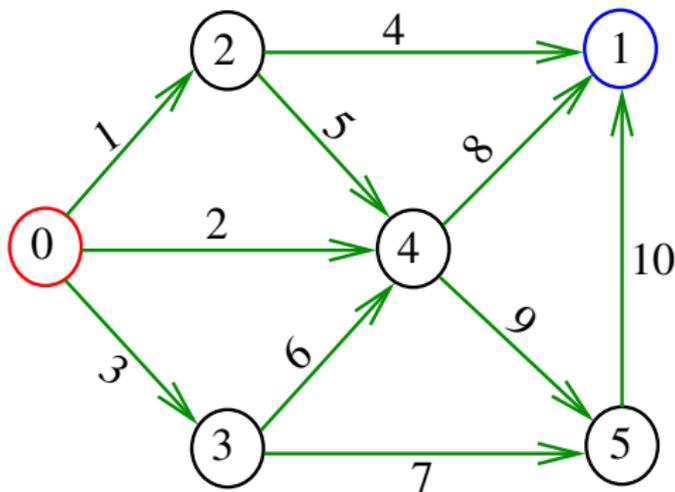
Saldos

O **saldo** em v é a diferença

$$ef(v) - inf(v)$$

entre o efluxo de v e o influxo em v .

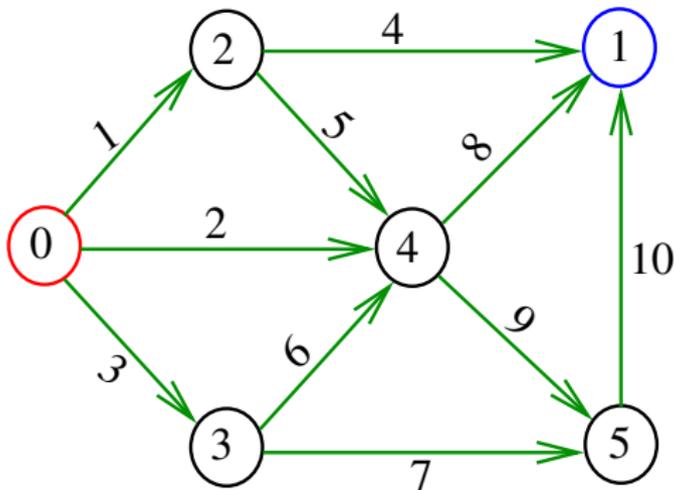
Exemplo: o saldo do vértice 4 é $17-13=4$



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **fluxo** (= *flow*) é uma função f que atribui valores em \mathbb{Z}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

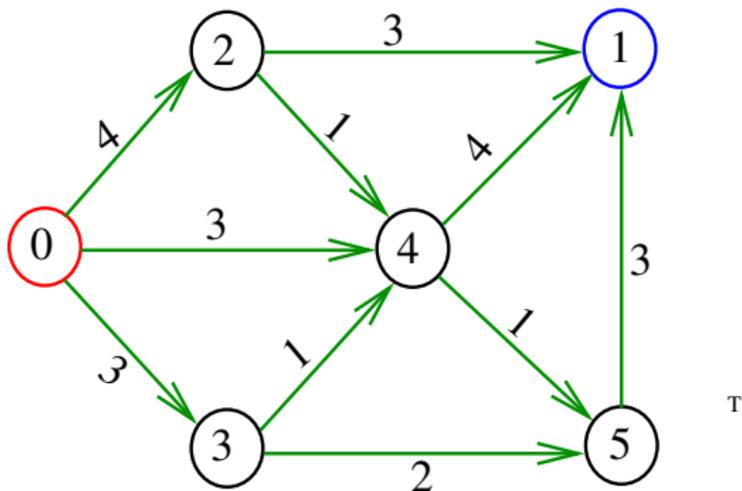
Exemplo: não é um fluxo



Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial** s e **vértice final** t , um **fluxo** (= *flow*) é uma função f que atribui valores em \mathbb{Z}_{\geq} aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é **nulo** e em s é ≥ 0 .

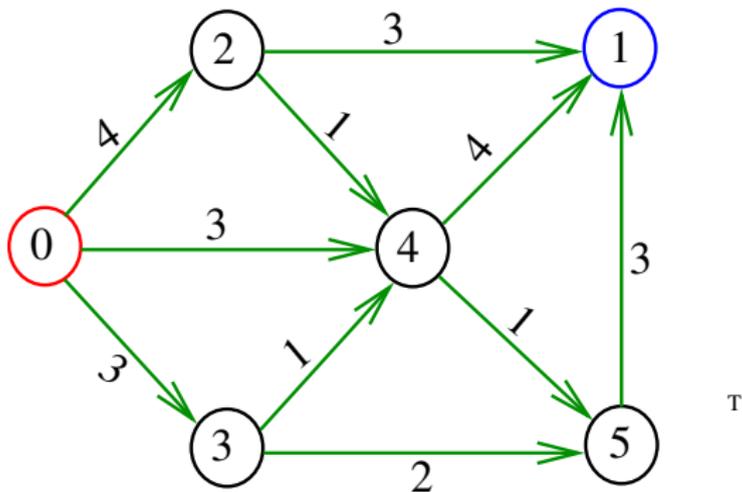
Exemplo: é um fluxo onde $s=0$ e $t=1$



Fontes e sorvedouros

Chamamos **s** de **fonte** e **t** de **sorvedouro**.

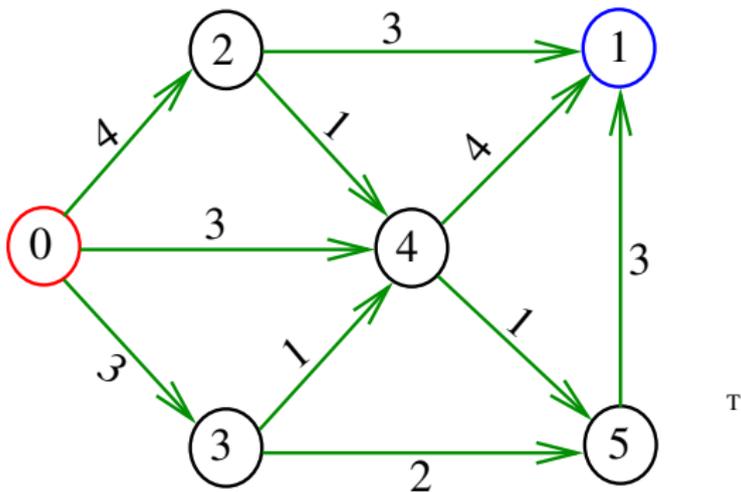
Exemplo: fluxo com fonte **0** e sorvedouro **1**



Propriedade de Fluxos

Para qualquer fluxo num digrafo com fonte **s** e sorvedouro **t**, o saldo em **t** é igual ao saldo em **s** com sinal trocado.

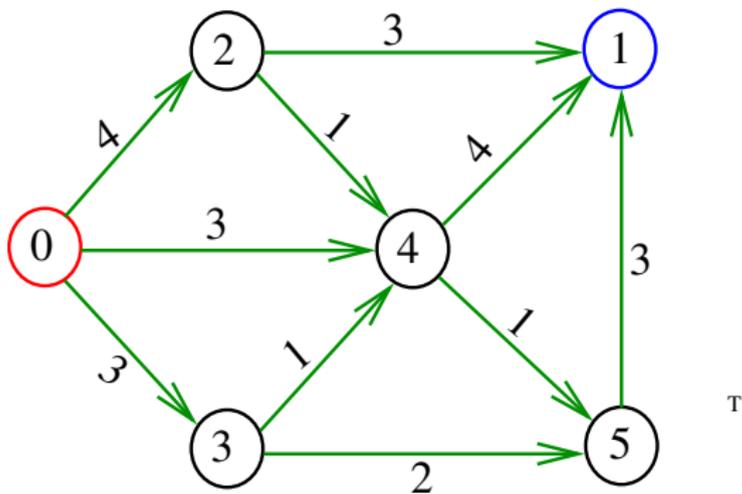
Exemplo: saldo em **0** = 10 = -10 = saldo em **1**



Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo f é o saldo de f em s .
Em geral (mas nem sempre) o influxo em s é nulo e o efluxo de t é nulo.

Exemplo: fluxo de intensidade 10



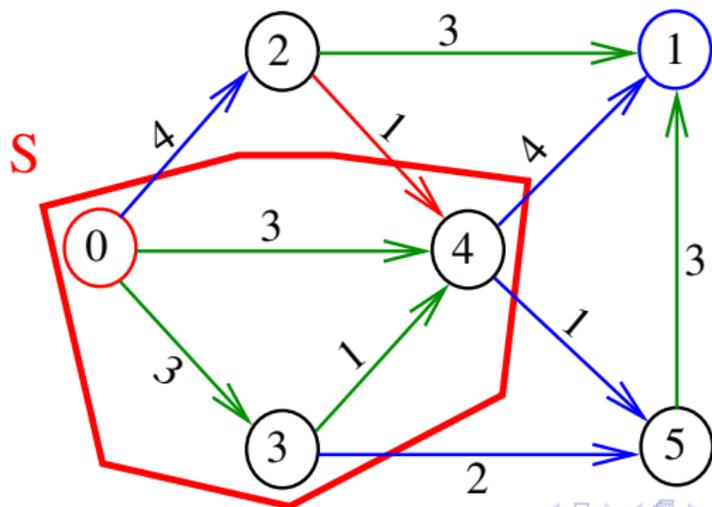
Saldo de fluxo num conjunto de vértices

Dado um conjunto S que contém s mas não contém t , o saldo em S é a diferença

$$ef(S) - inf(S),$$

entre o efluxo de S e o influxo em S

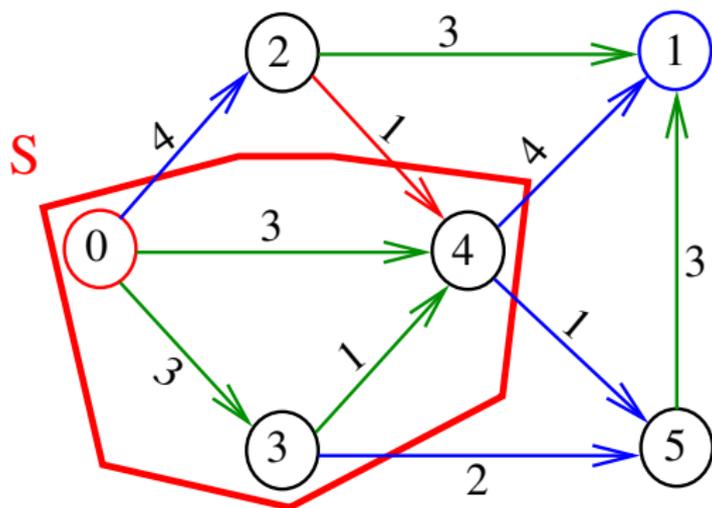
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Propriedade do Saldos

Para qualquer fluxo num digrafo com vértice inicial s e vértice final t e para qualquer conjunto S que contém s mas não contém t , o saldo em S é igual ao saldo em s .

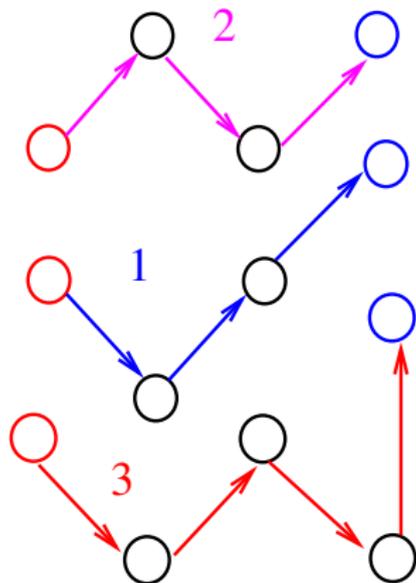
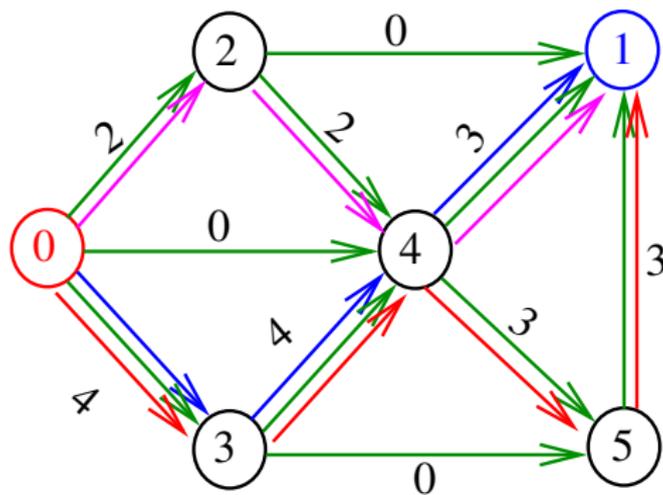
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Fluxos versus coleção de caminhos

Fluxos podem ser representados por caminhos de **s** a **t**. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

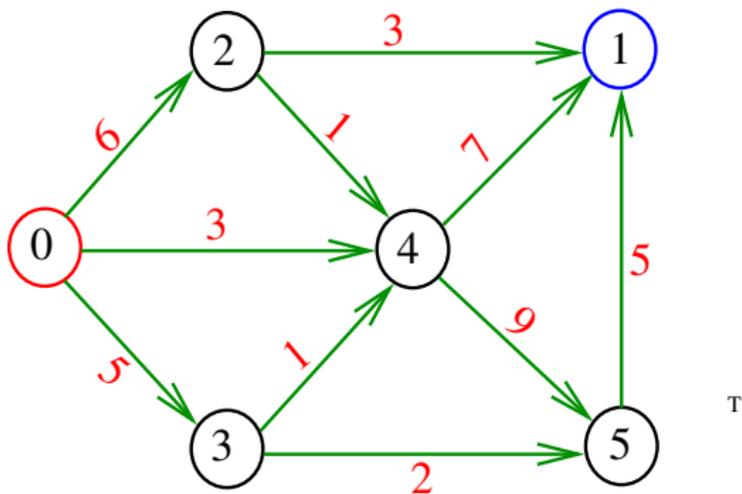
Exemplo:



Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com **vértice inicial** e **vértice final** em que a cada um arcos está associado um número em \mathbb{Z}_{\geq} que chamaremos **capacidade do arco**.

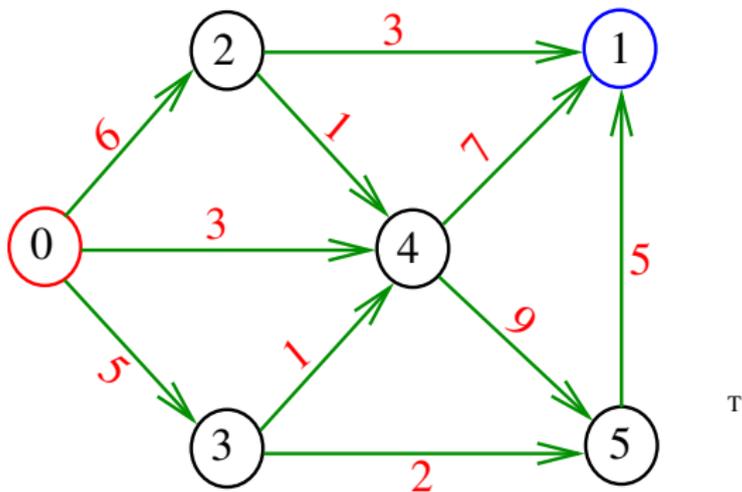
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

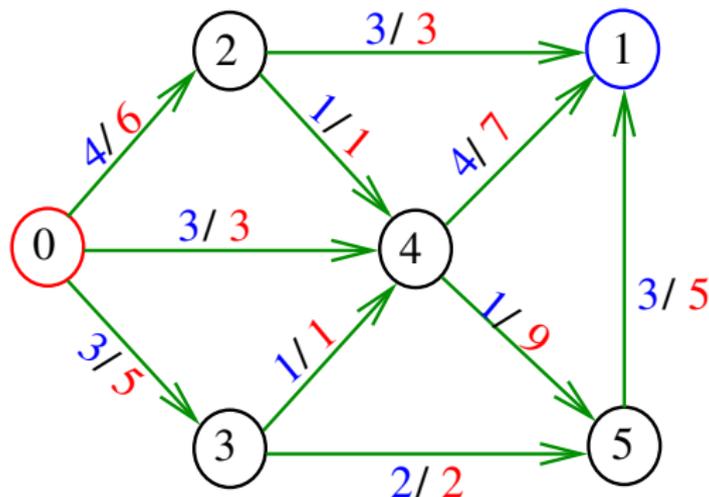
Exemplo: rede capacitada



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: fluxo que respeita as capacidades



Fluxo máximo (problema primal)

Podemos supor que a rede possui um arco b de t a s de capacidade $+\infty$.

O problema do fluxo máximo é **equivalente** ao seguinte programa linear, que chamamos de **primal**: encontrar um vetor x indexado por A que

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x(b) \\ \text{sob as restrições} & \text{ef}(v) - \text{inf}(v) = 0 \quad \forall v, \\ & x(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A, \\ & x(a) \geq 0 \quad \forall a \in A. \end{array}$$

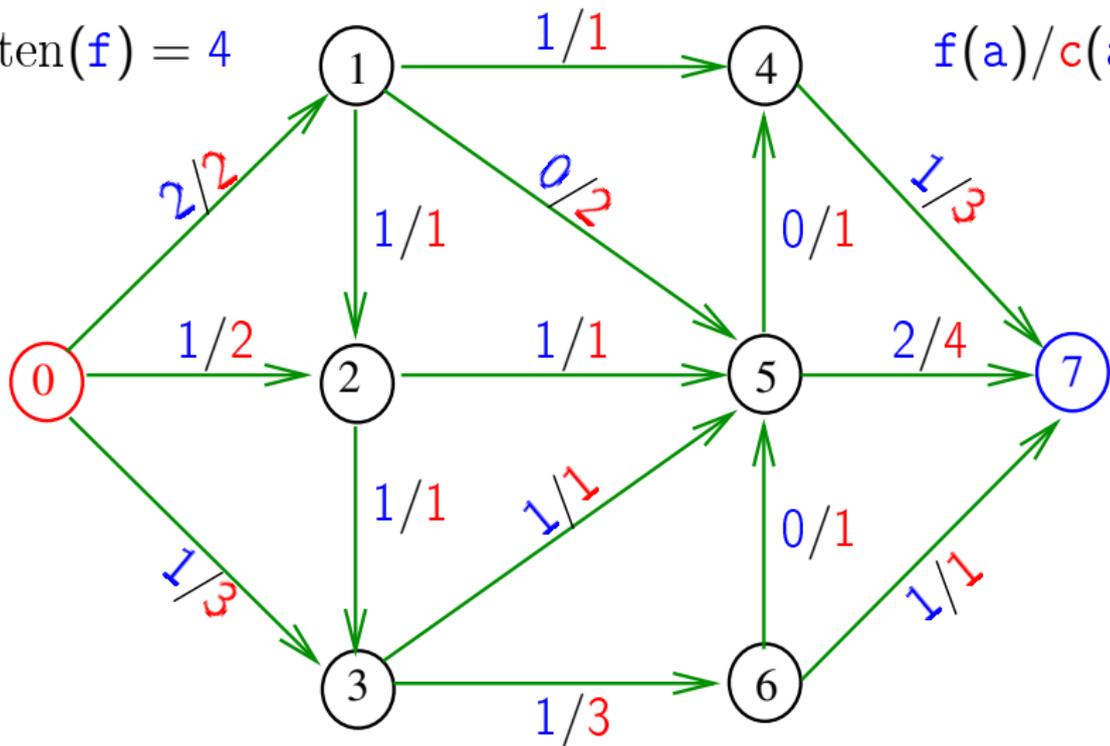
Caminhos de aumento

S 22.2

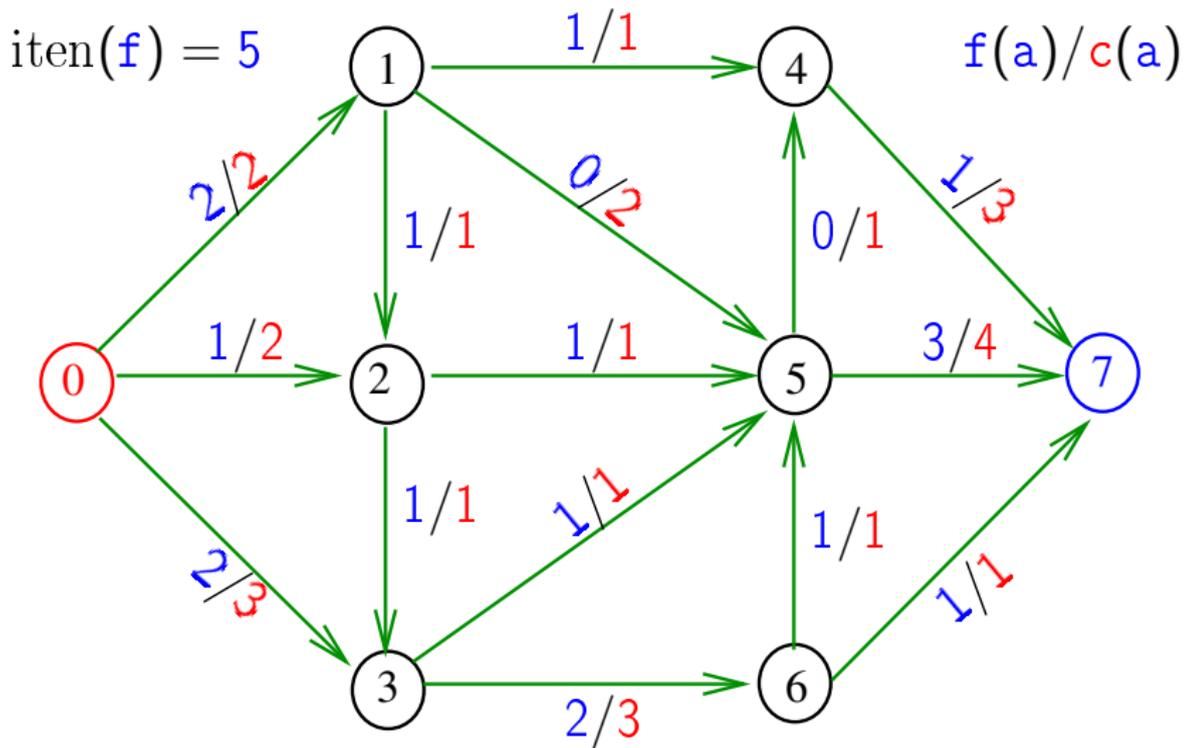
Fluxo é máximo?

iten(f) = 4

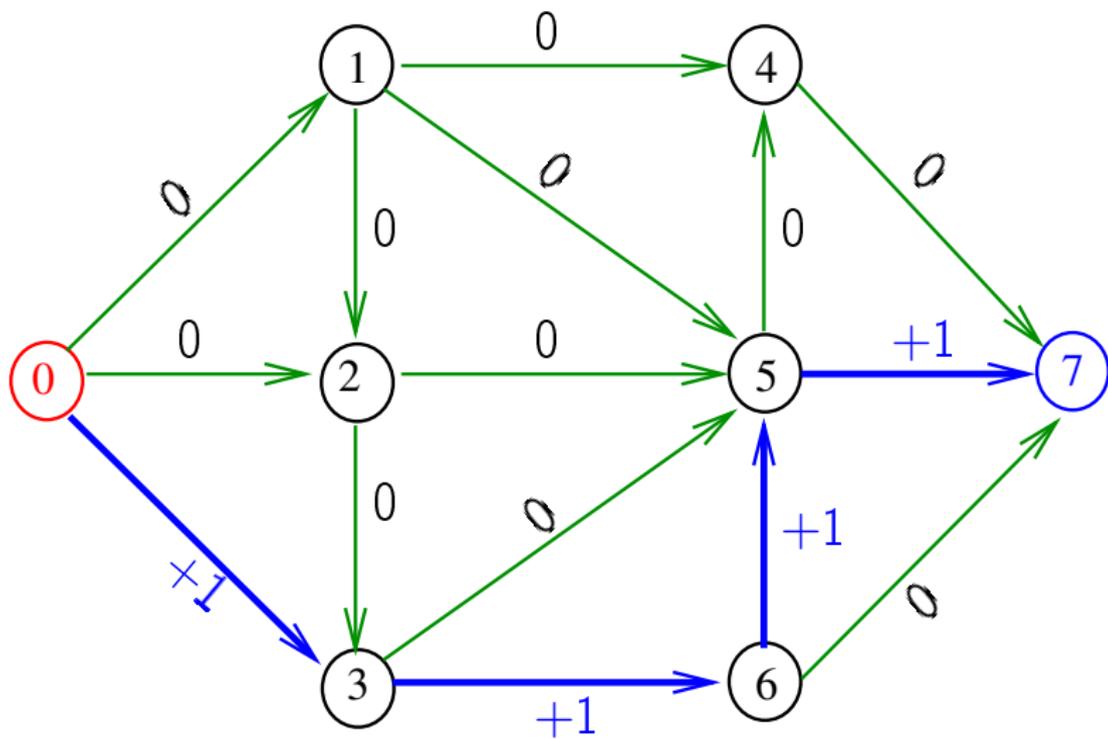
f(a)/c(a)



E agora? Fluxo é máximo?



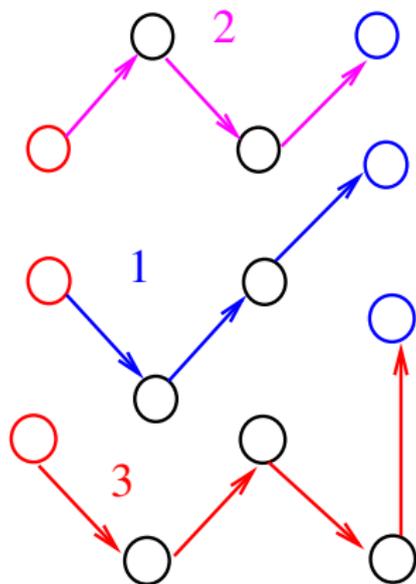
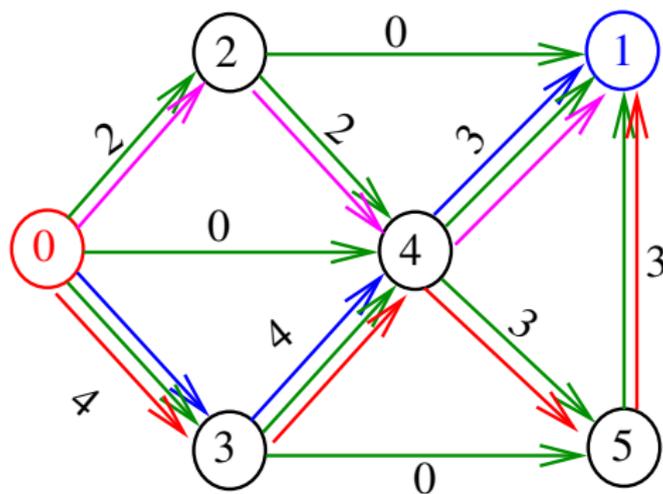
Onde mudou?



Decomposição de fluxos

Fluxos podem ser representados por caminhos de **s** a **t**. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

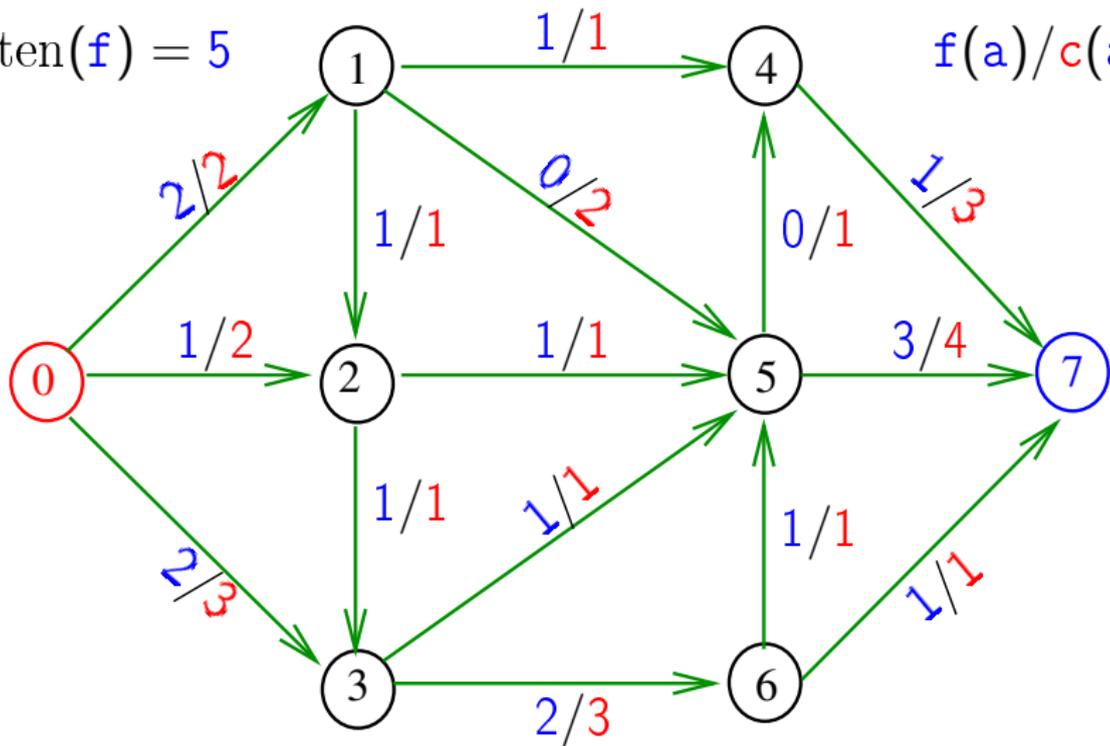
Exemplo:



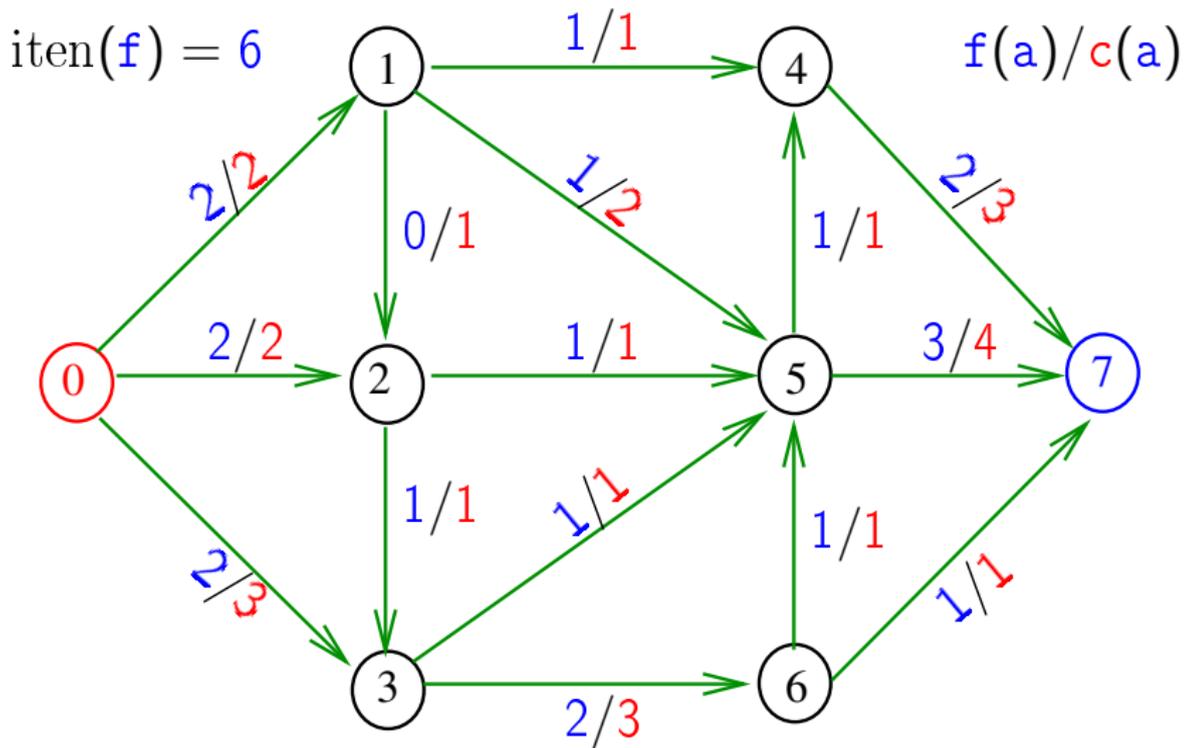
Fluxo é máximo?

iten(f) = 5

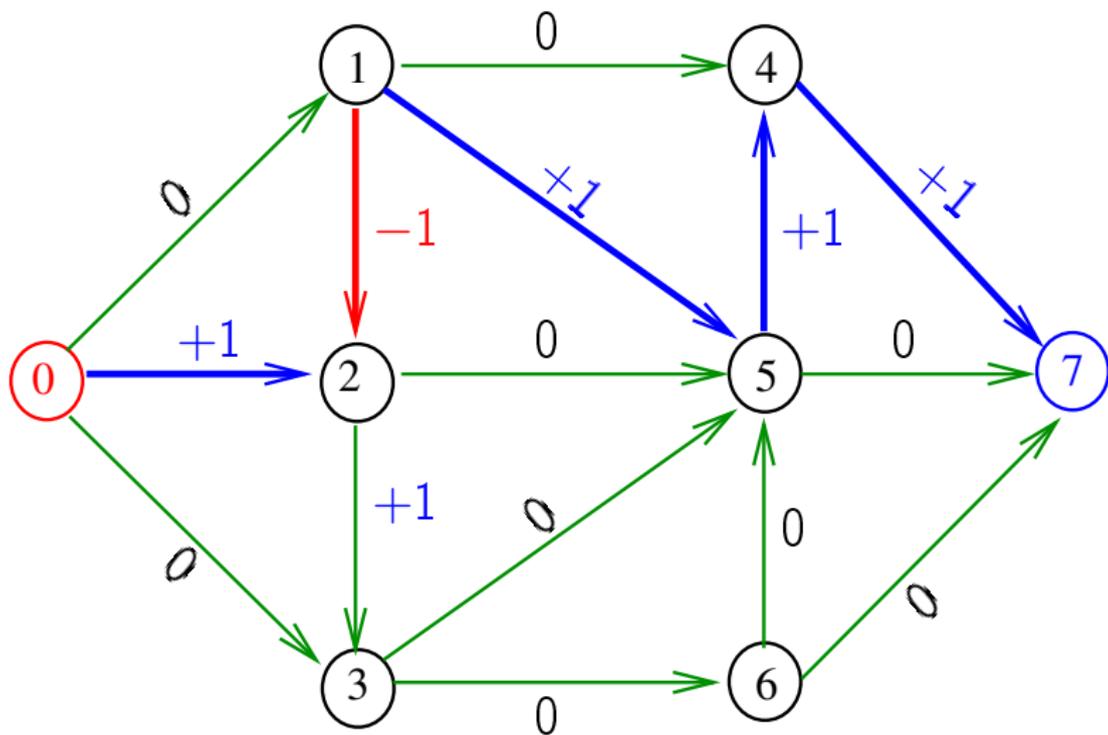
f(a)/c(a)



E agora? Fluxo é máximo?



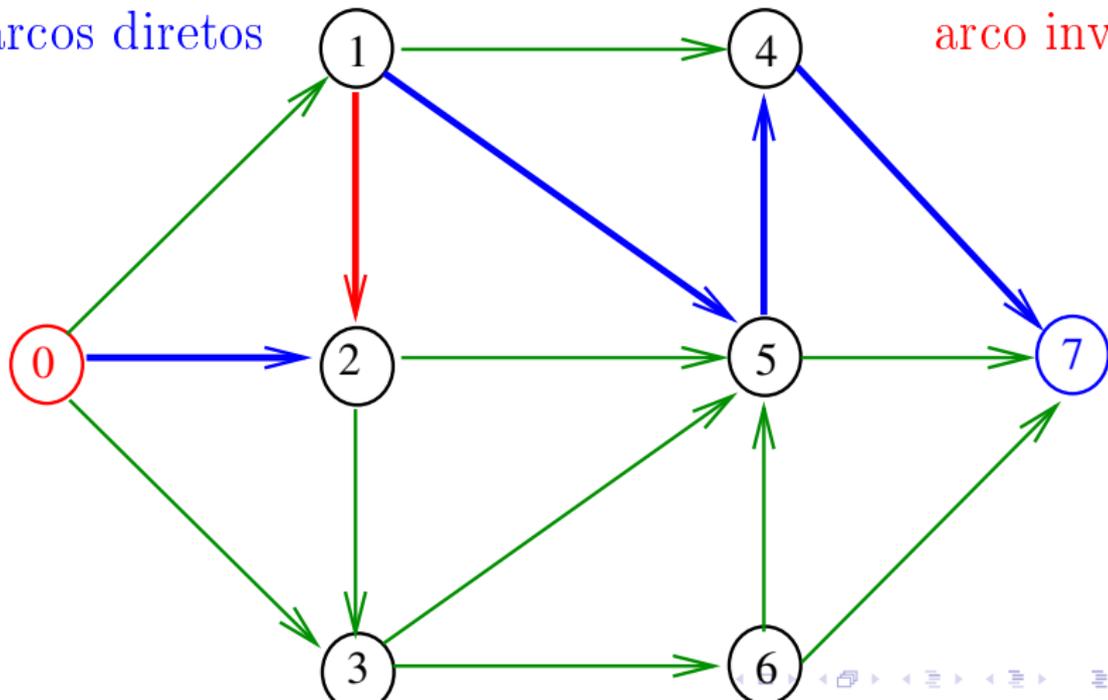
Onde mudou?



Pseudo-caminhos

Um **pseudo-caminho** num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, $u-v$ ou $v-u$ é um arco do digrafo.

arcos diretos

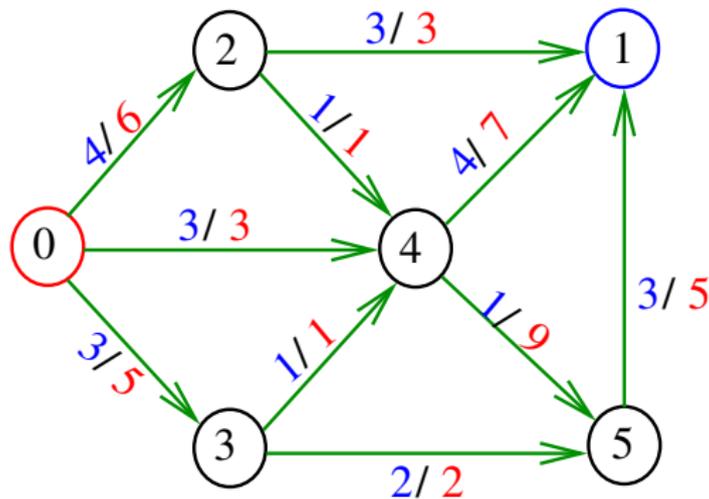


arco inverso

Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco $u-v$ está **cheio** se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco $u-v$ está **vazio** se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio

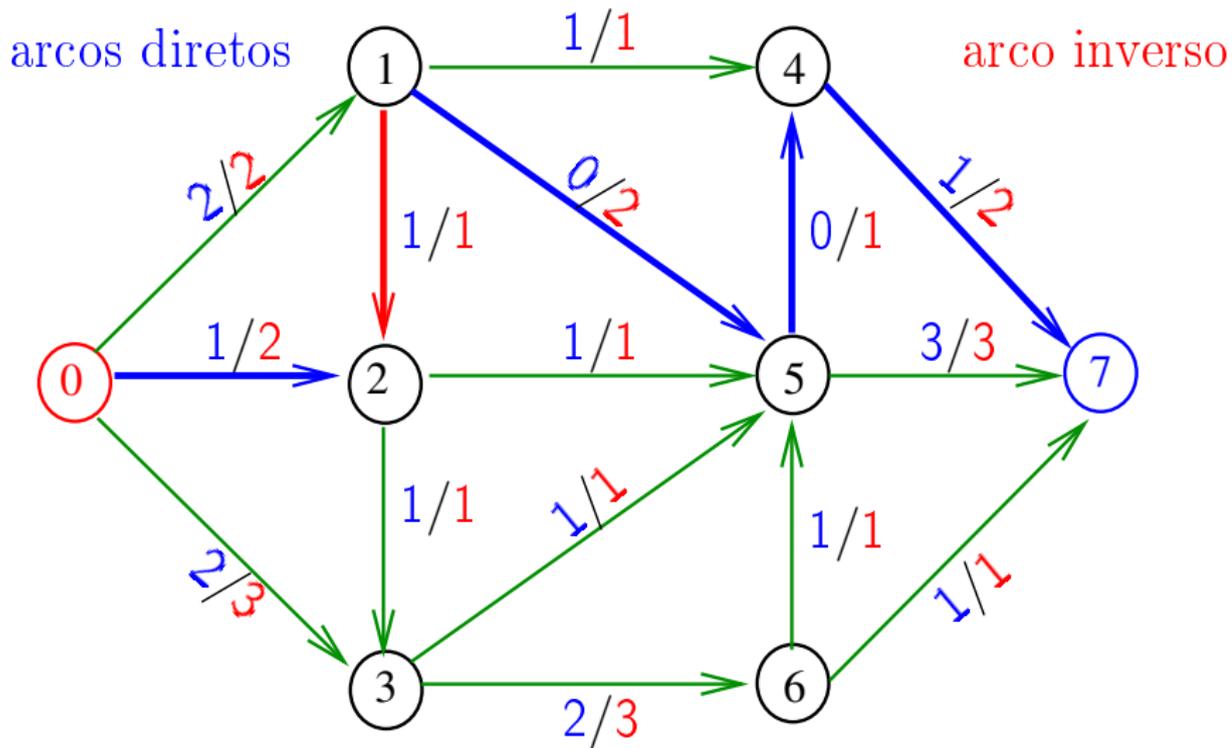


Caminhos de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- ▶ os **arcos diretos** não estão cheios e
- ▶ os **arcos inversos** não estão vazios.

Exemplo

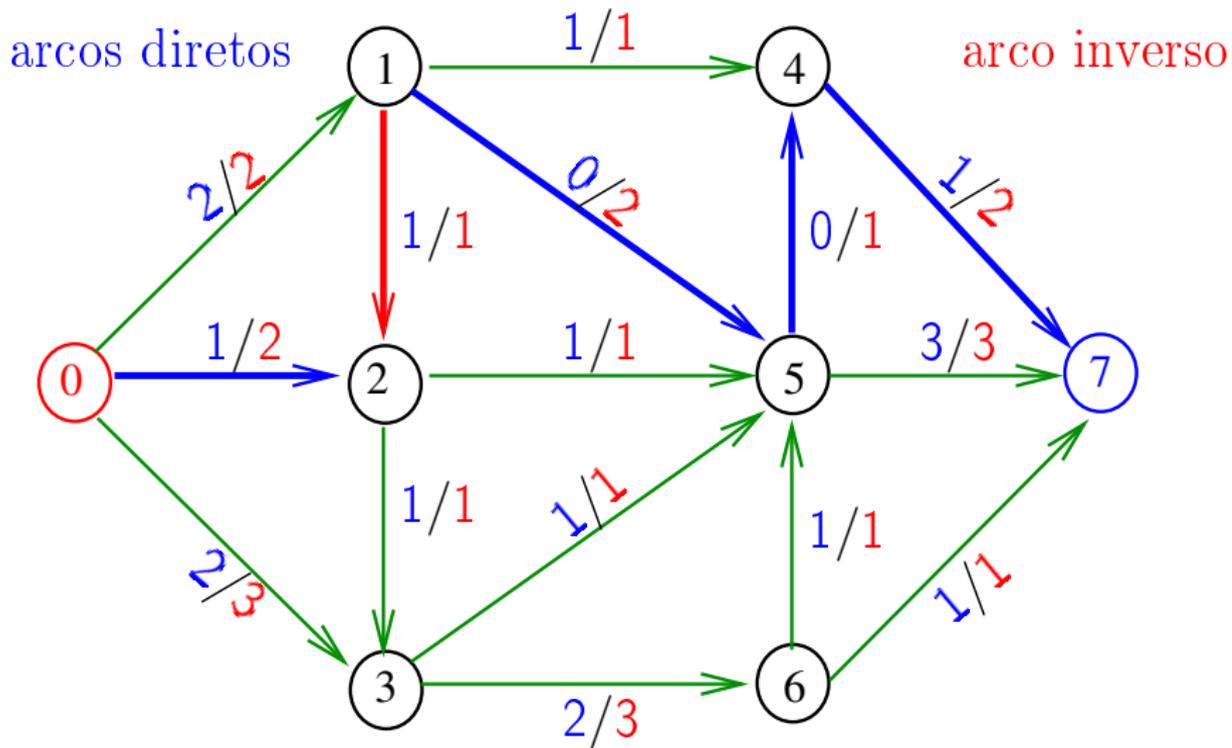


Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de **enviar** d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- ▶ para cada **arco direto**, some d ao fluxo
- ▶ para cada **arco inverso**, subtraia d do fluxo.

Exemplo



Exemplo

