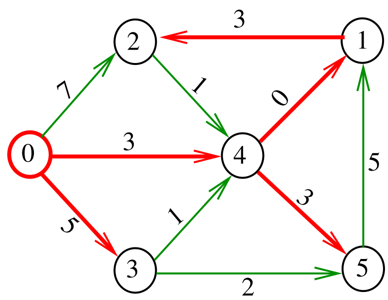
Melhores momentos

AULA 14

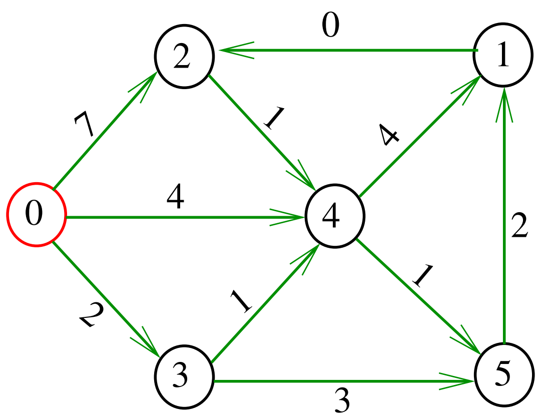
Problema

O **algoritmo de Dijkstra** resolve o problema da SPT:

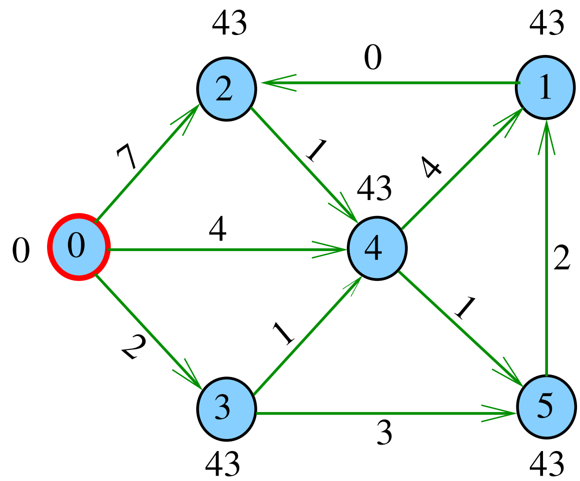
> *Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s*



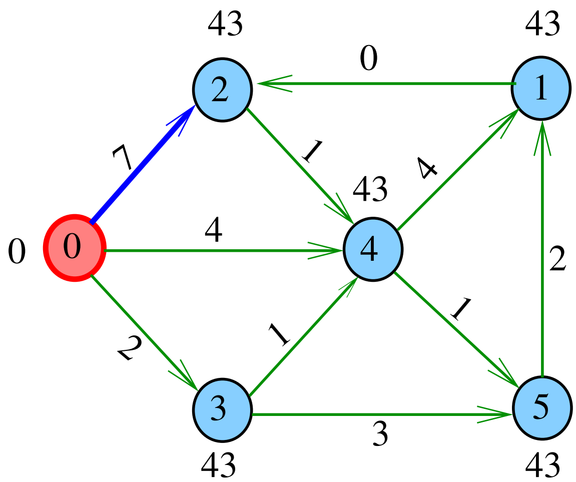
Simulação



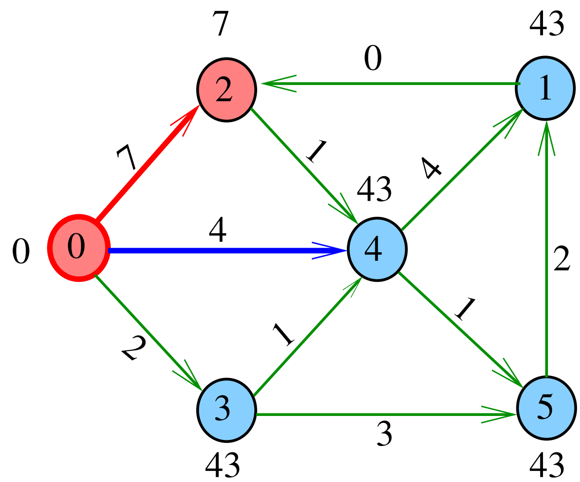
Simulação



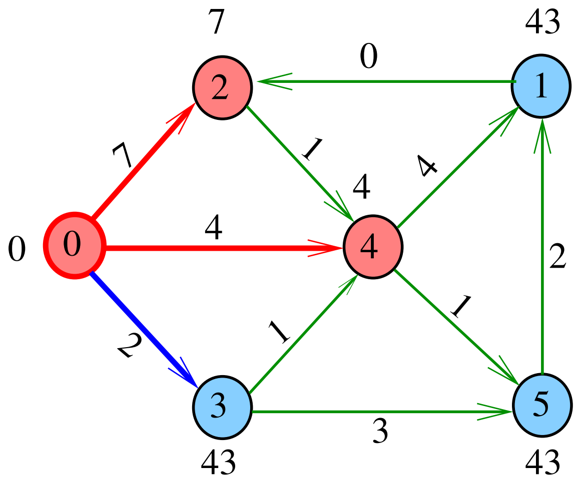
Simulação



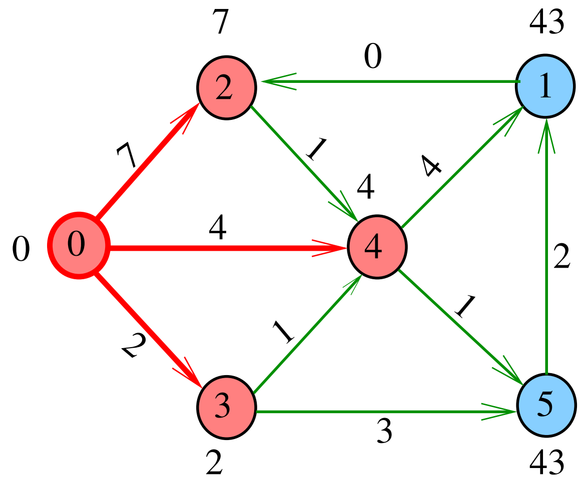
Simulação



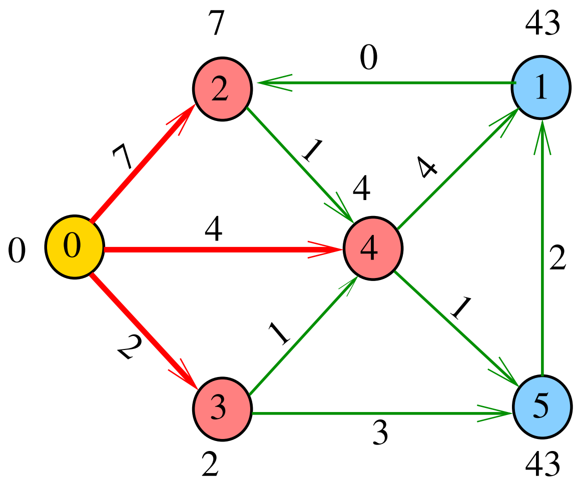
Simulação



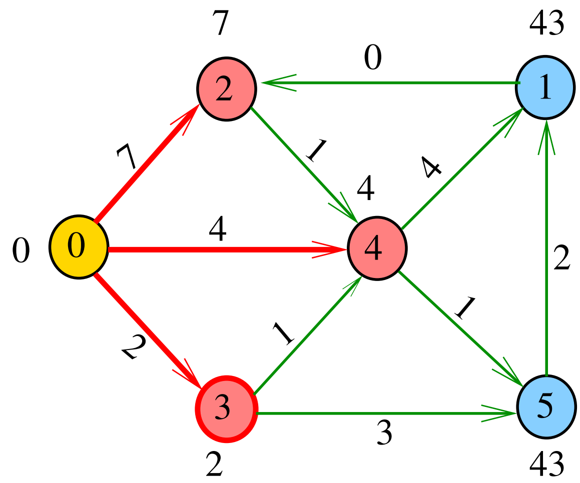
Simulação



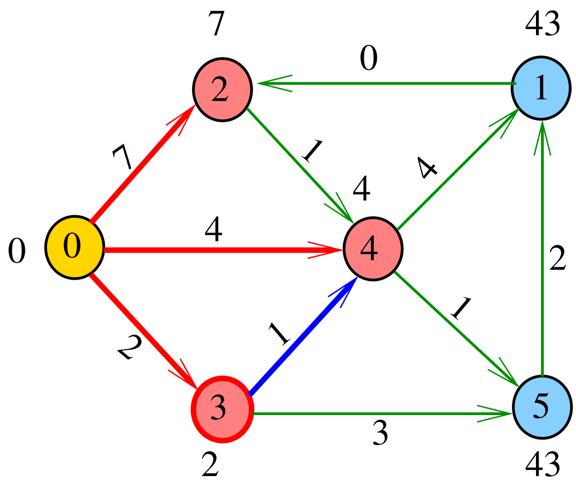
Simulação



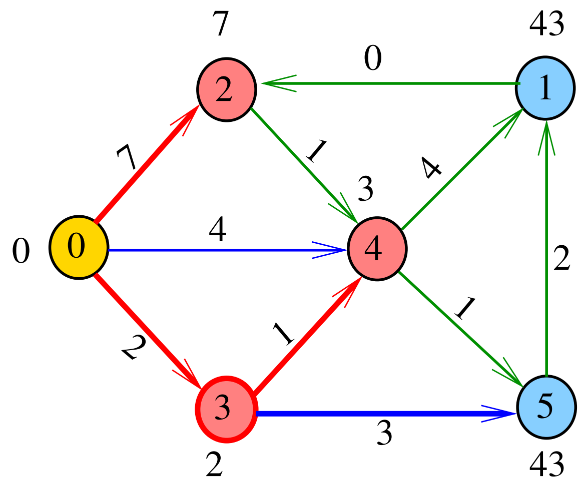
Simulação



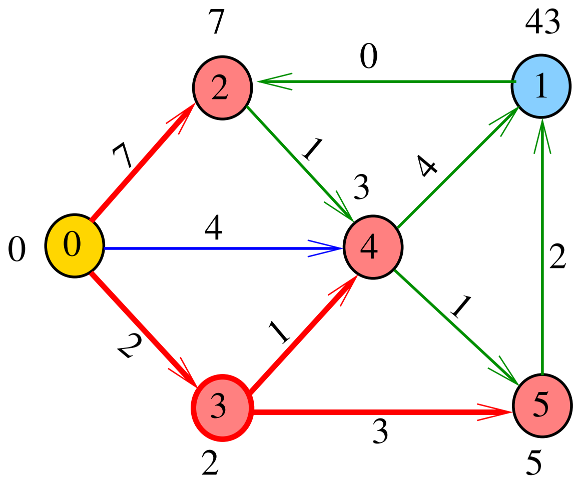
Simulação



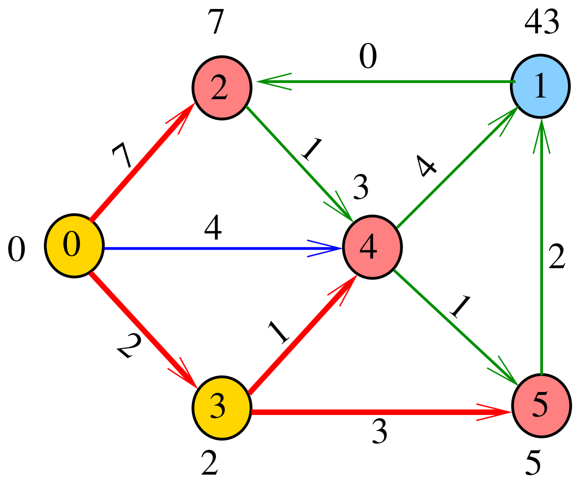
Simulação



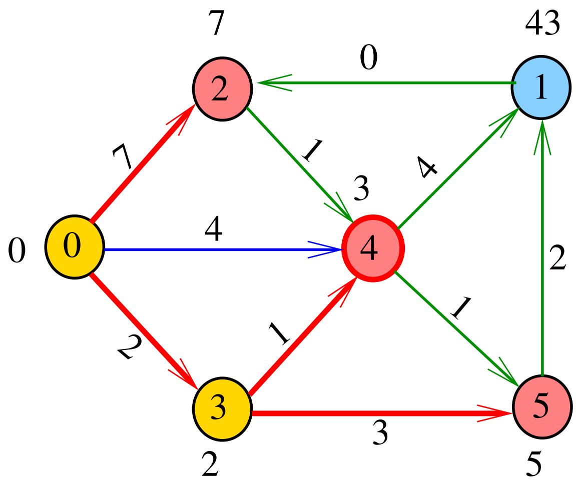
Simulação



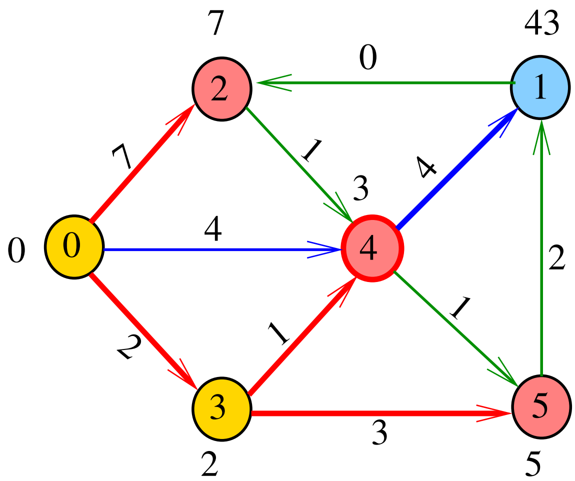
Simulação



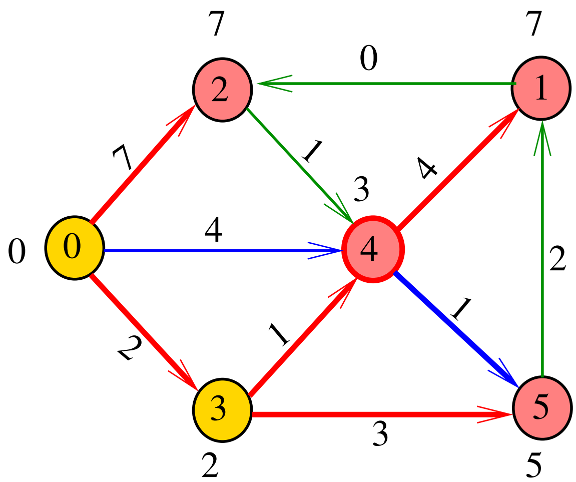
Simulação



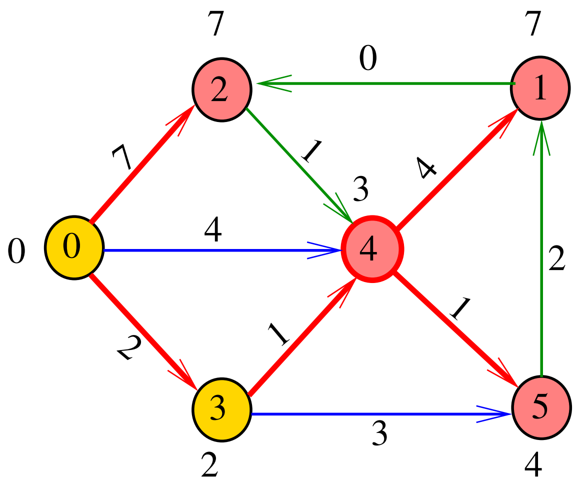
Simulação



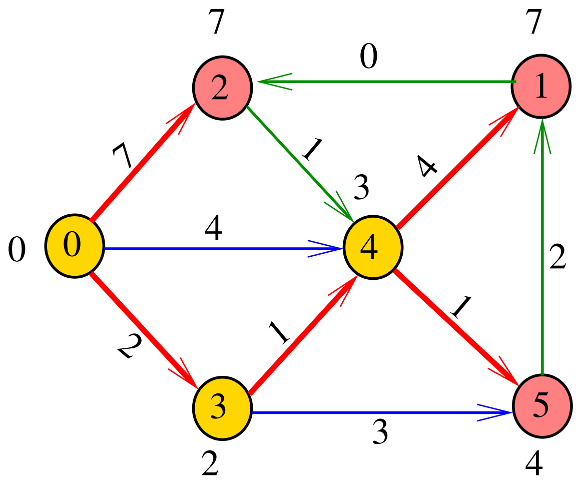
Simulação



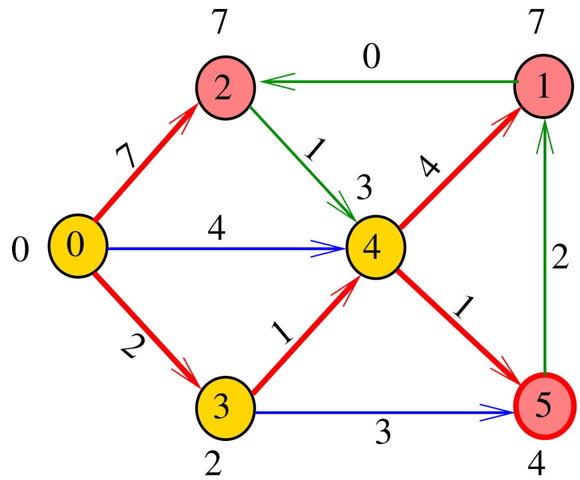
Simulação



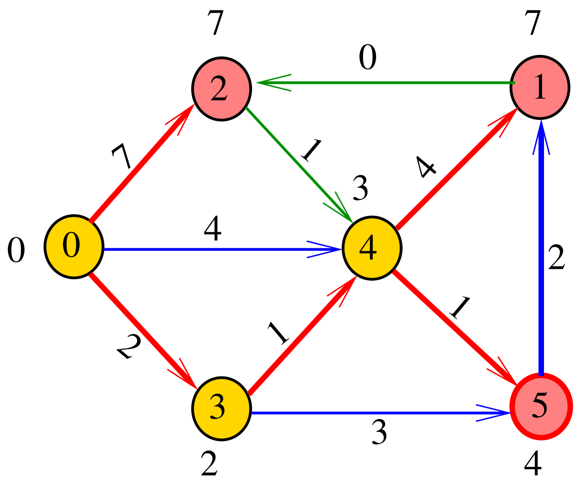
Simulação



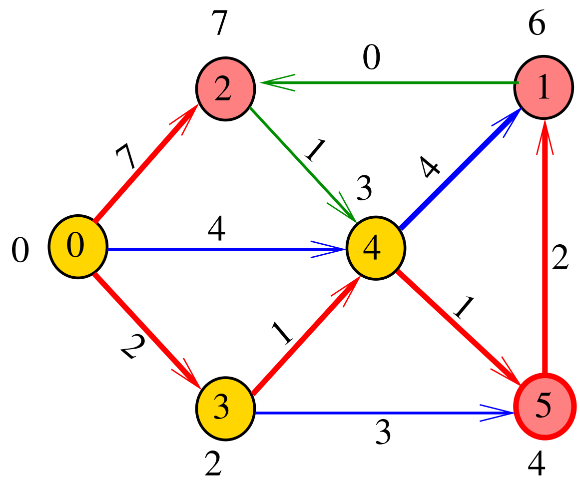
Simulação



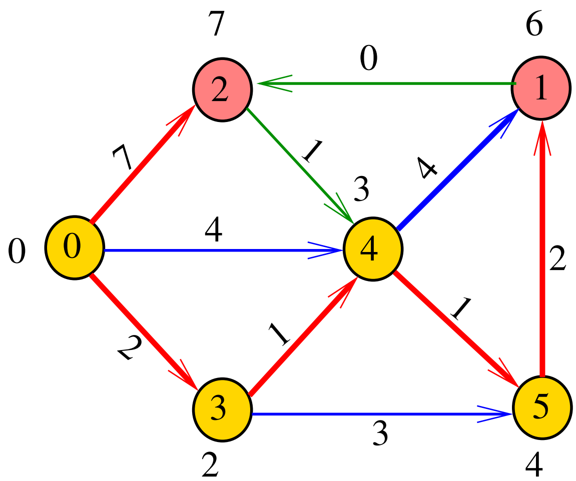
Simulação



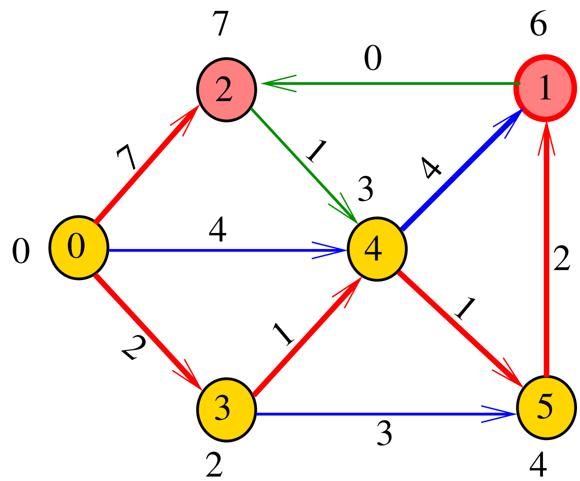
Simulação



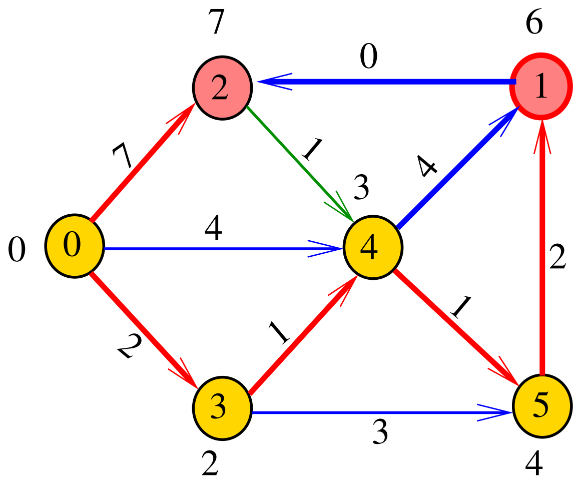
Simulação



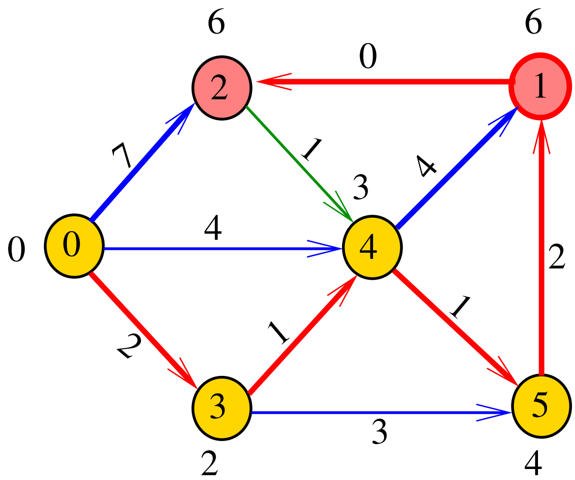
Simulação



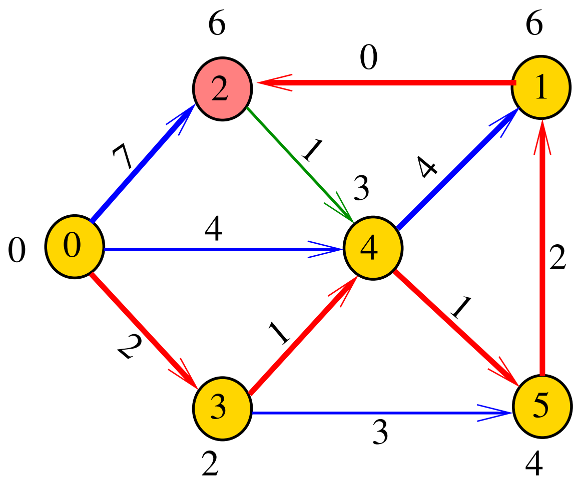
Simulação



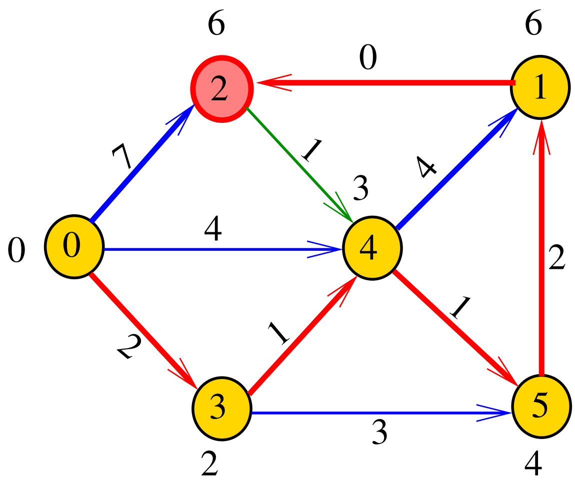
Simulação



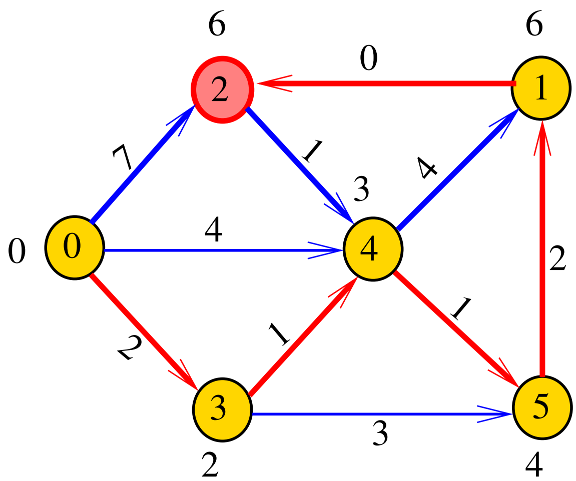
Simulação



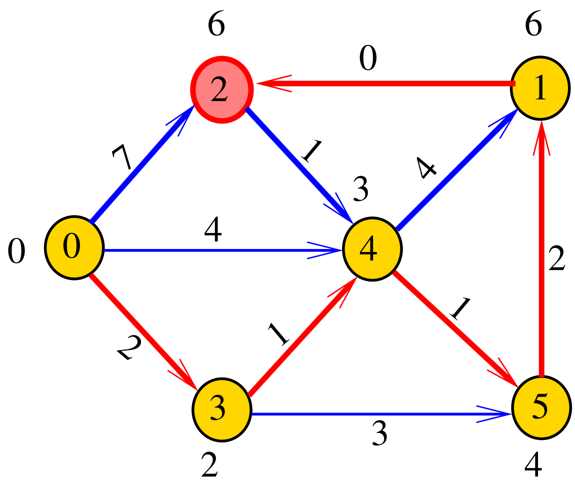
Simulação



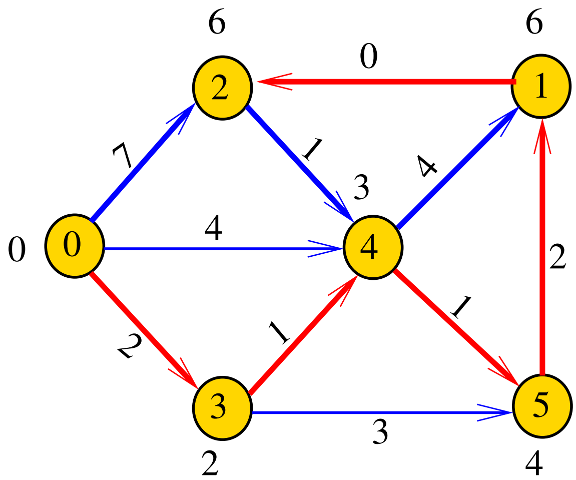
Simulação



Simulação



Simulação



dijkstra

Recebe digrafo G com custos não-negativos nos arcos e um vértice s

Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz s.

A arborescência é armazenada no vetor `parnt`

As distâncias em relação a s são armazenadas no vetor `cst`

```
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
        Vertex parnt[], double cst[]);
```

Fila com prioridades

A função `dijkstra` usa uma fila com prioridades

A fila é manipulada pelas seguintes funções:

- `PQinit()`: inicializa uma fila de vértices em que cada vértice v tem prioridade `cst[v]`
- `PQempty()`: devolve 1 se a fila estiver vazia e 0 em caso contrário
- `PQinsert(v)`: insere o vértice `v` na fila
- `PQdelmin()`: retira da fila um vértice de prioridade mínima.
- `PQdec(w)`: reorganiza a fila depois que o valor de `cst[w]` foi decrementado.

dijkstra

```
#define INFINITO maxCST
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
        Vertex parnt[], double cst[]);
{
    Vertex v, w; link p;
    for (v = 0; v < G->V; v++) {
        cst[v] = INFINITO;
        parnt[v] = -1;
    }
    PQinit(G->V);
    cst[s] = 0;
    parnt[s] = s;
```

dijkstra

```
    PQinsert(s);
    while (!PQempty()) {
        v = PQdelmin();
        for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
            if (cst[w=p->w]==INFINITO) {
                cst[w]=cst[v]+p->cst;
                parnt[w]=v;
                PQinsert(w);
            }
```

dijkstra

```
            else
            if(cst[w]>cst[v]+G->adj[v][w])
                cst[w]=cst[v]+G->adj[v][w];
                parnt[w] = v;
                PQdec(w);
            }
    }
}
```

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V + A)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	`PQinit` e `PQfree`,
$\leq$ V	execuções de	`PQinsert`,
$\leq$ V + 1	execuções de	`PQempty`,
$\leq$ V	execuções de	`PQdelmin`, e
$\leq$ A	execuções de	`PQdec`.

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V^2)$.

Este consumo de tempo é ótimo para **digrafos densos**.

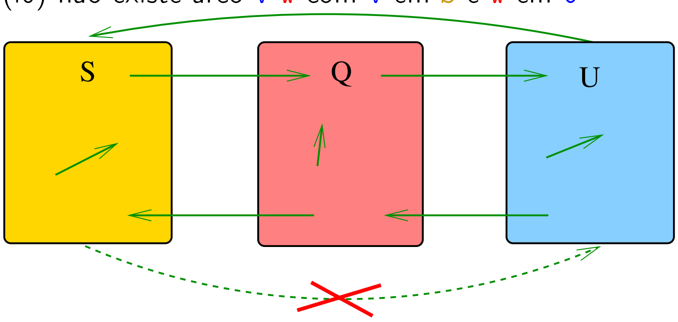
AULA 15

Mais algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

Relações invariantes

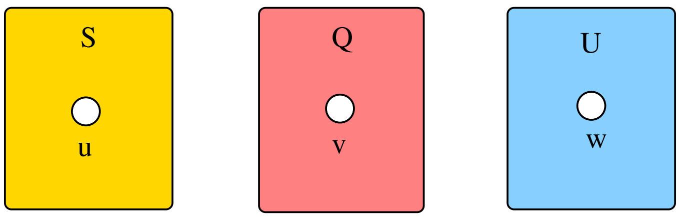
S = vértices examinados
Q = vértices visitados = vértices na fila
U = vértices ainda não visitados
(i0) não existe arco `v-w` com `v` em S e `w` em U



Relações invariantes

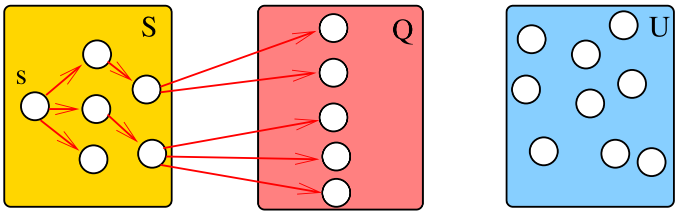
(i1) para cada `u` em S, `v` em Q e `w` em U

$$\texttt{cst[u]} \leq \texttt{cst[v]} \leq \texttt{cst[w]}$$



Relações invariantes

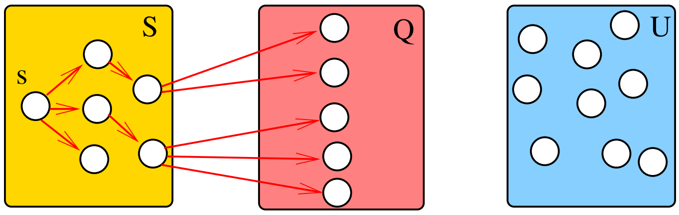
(i2) O vetor `parnt` restrito aos vértices de S e Q determina um árborescência com raiz `s`



Relações invariantes

(i3) Para arco `v-w` na arborescência vale que

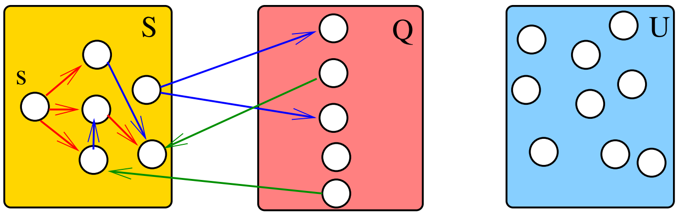
`cst[w]` = `cst[v]` + custo do arco `vw`



Relações invariantes

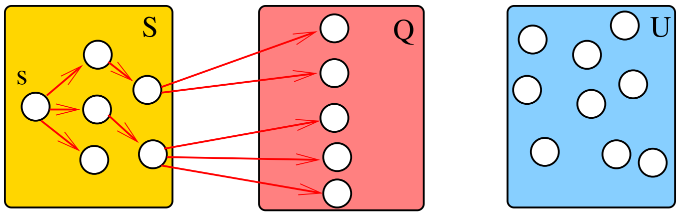
(i4) Para cada arco `v-w` com `v` **ou** `w` em S vale que

`cst[w]` − `cst[v]` ≤ custo do arco `vw`

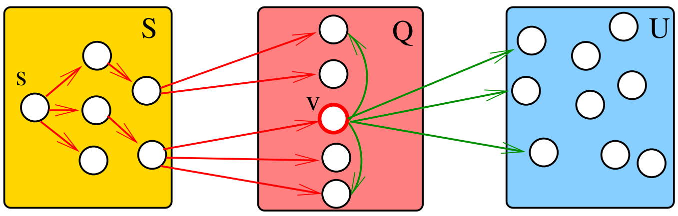


Relações invariantes

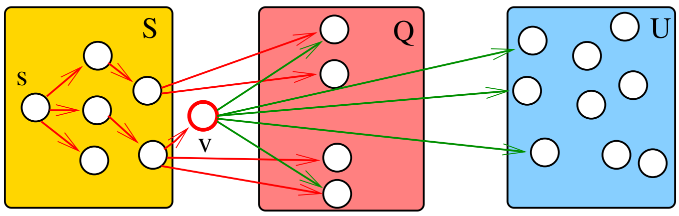
(i5) Para cada vértice `v` em S vale que `cst[v]` é o custo de um caminho mínimo de `s` a `v`.



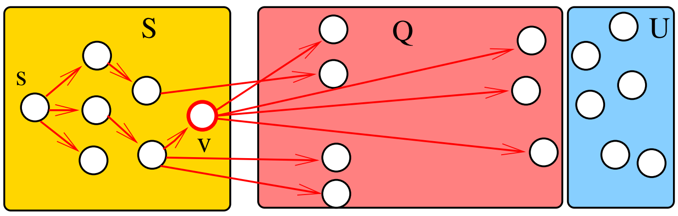
Iteração



Iteração



Iteração



Outra implementação para digrafos densos

```
#define INFINITO maxCST

void
DIGRAPHsptD1 (Digraph G, Vertex s,
              Vertex parnt[], double cst[]) {
  Vertex w, w0, fr[maxV];
  for (w = 0; w < G->V; w++) {
      parnt[w] = -1;
      cst[w] = INFINITO;
  }
  fr[s] = s;
  cst[s] = 0;
```

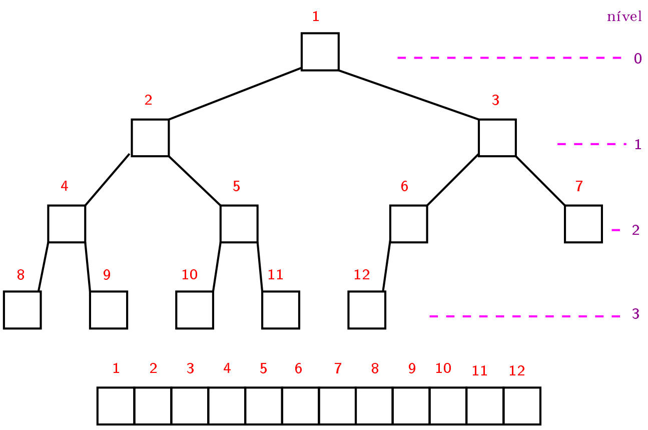
```
 while (1) {
  double mincst = INFINITO;
  for (w = 0; w < G->V; w++)
      if (parnt[w]==-1 && mincst>cst[w])
          mincst = cst[w0=w];
  if (mincst == INFINITO) break;
  parnt[w0] = fr[w0];
  for (w = 0; w < G->V; w++)
      if(cst[w]>cst[w0]+G->adj[w0][w]) {

          cst[w] = cst[w0]+G->adj[w0][w];
          fr[w] = w0;
      }
  }
}
```

Dijkstra para digrafos esparços

S 21.1 e 21.2

Representação de árvores em vetores



Pais e filhos

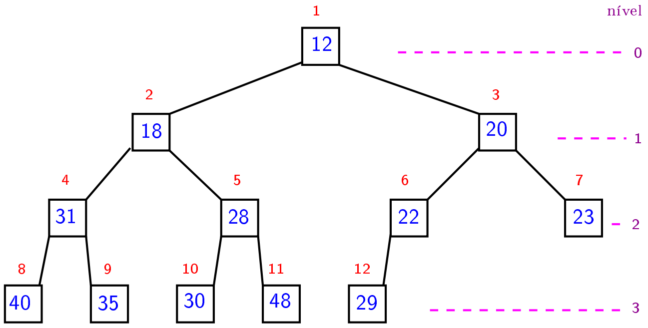
$A[1 \mathinner{..} m]$ é um vetor representando uma árvore.
Diremos que para qualquer índice ou **nó** i,

- $\lfloor i/2 \rfloor$ é o **pai** de i;
- $2\,i$ é o **filho esquerdo** de i;
- $2\,i+1$ é o **filho direito**.

Todo nó i é raiz da subárvore formada por

$$A[i, 2i, 2i+1, 4i, 4i+1, 4i+2, 4i+3, 8i, \ldots, 8i+7, \ldots]$$

Min-heap

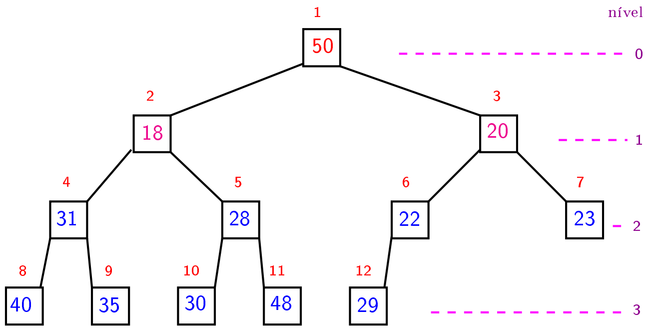


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	18	20	31	28	22	23	40	35	30	48	29

Rotina básica de manipulação de max-heap

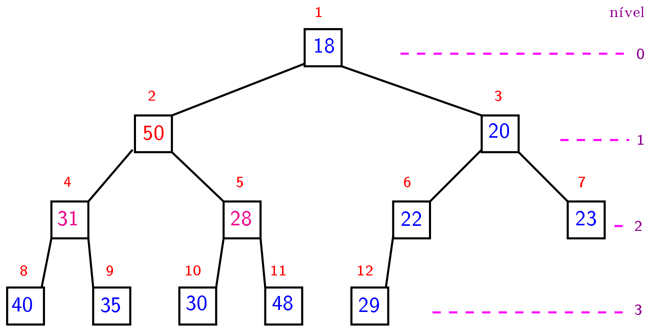
Recebe $A[1\,..\,m]$ e $i \geq 1$ tais que subárvores com raiz $2i$ e $2i+1$ são min-heaps e rearranja A de modo que subárvore com raiz i seja min-heap.

Rotina básica de manipulação de min-heap



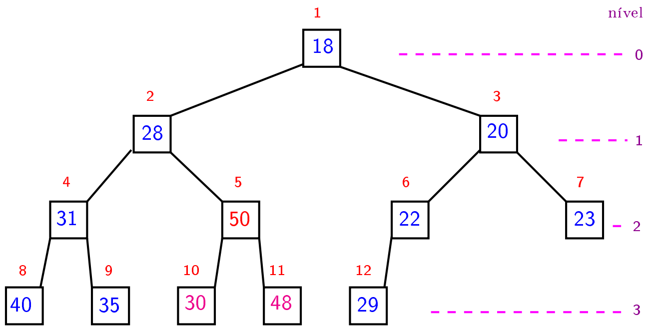
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	18	20	31	28	22	23	40	35	30	48	29

Rotina básica de manipulação de min-heap



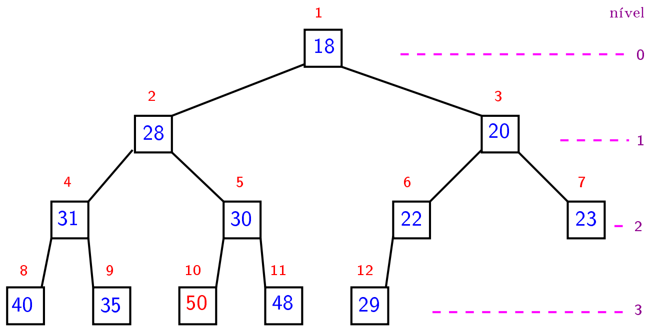
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	50	20	31	28	22	23	40	35	30	48	29

Rotina básica de manipulação de min-heap



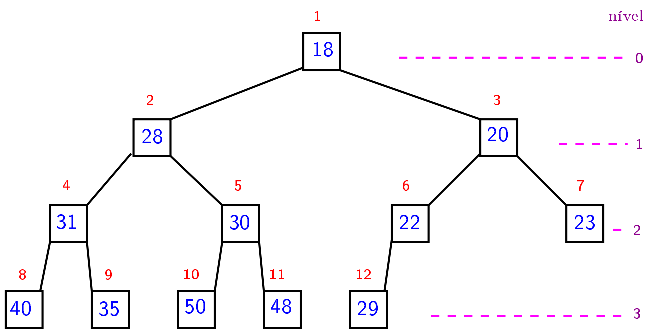
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	28	20	31	50	22	23	40	35	30	48	29

Rotina básica de manipulação de min-heap



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	28	20	31	30	22	23	40	35	50	48	29

Rotina básica de manipulação de min-heap



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	28	20	31	30	22	23	40	35	50	48	29

Implementação clássica Min-Heap

O vetor qp é o "inverso" de pq:

para cada vértice v, qp[v] é o único índice tal que pq[qp[v]] == v.

É claro que qp[pq[i]]==i para todo i.

```
static Vertex pq[maxV+1];
static int N;
static int qp[maxV];
```

PQinit, PQempty, PQinsert

```
void PQinit(void) {
   N = 0;
}
int PQempty(void) {
   return N == 0;
}
void PQinsert(Vertex v) {
   qp[v] = ++N;
   pq[N] = v;
   fixUp(N);
}
```

PQdelmin e PQdec

```
Vertex PQdelmin(void) {
   exch(1, N);
   --N;
   fixDown(1);
   return pq[N+1];
}
void PQdec(Vertex w) {
   fixUp(qp[w]);
}
```

exch e fixUp

```
static void exch(int i, int j) {
   Vertex t;
   t = pq[i]; pq[i] = pq[j]; pq[j] = t;
   qp[pq[i]] = i;
   qp[pq[j]] = j;
}
static void fixUp(int i) {
   while (i>1 && cst[pq[i/2]]>cst[pq[i]]){
      exch(i/2, i);
      i = i/2;
   }
}
```

fixDown

```
static void fixDown(int i) {
   int j;
   while (2*i <= N) {
      j = 2*i;
      if (j< N && cst[pq[j]] > cst[pq[j+1]])
         j++;
      if (cst[pq[i]] <= cst[pq[j]]) break;
      exch(i, j);
      i = j;
   }
}
```

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
PQinsert	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
PQdelmin	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
PQdec	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
dijkstra	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$

Consumo de tempo Min-Heap

	bucket heap	radix heap
PQinsert	$O(1)$	$O(\lg(VC)R$
PQdelmin	$O(C)$	$O(\lg(VC)$
PQdec	$O(1)$	$O(A + V \lg(VC))$
dijkstra	$O(A + VC)$	$O(A + V \lg(VC))$

C = maior custo de um arco.

Conclusão

O consumo de tempo da função dijkstra implementada com um min-heap é $O(A \lg V)$.

Este consumo de tempo é ótimo para **digrafos esparsos**.