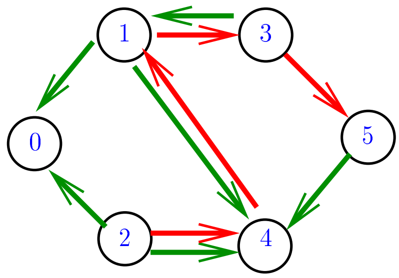
Melhores momentos

AULA 13

Distância

A **distância** de um vértice s a um vértice t é o menor comprimento de um caminho de s a t. Se não existe caminho de s a t a distância é **infinita**

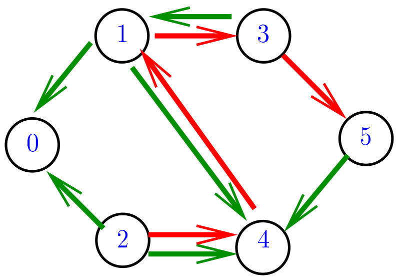
Exemplo: a distância de 2 a 5 é 4



Distância

A **distância** de um vértice s a um vértice t é o menor comprimento de um caminho de s a t. Se não existe caminho de s a t a distância é **infinita**

Exemplo: a distância de 0 a 2 é infinita

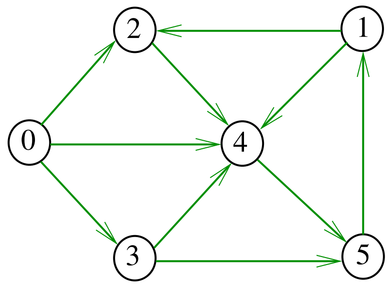


Calculando distâncias

Problema: dados um digrafo G e um vértice s, determinar a distância de s aos demais vértices do digrafo

Exemplo: para $s = 0$

v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Busca em largura

A **busca em largura** (=*breadth-first search search* = *BFS*) começa por um vértice, digamos s, especificado pelo usuário.

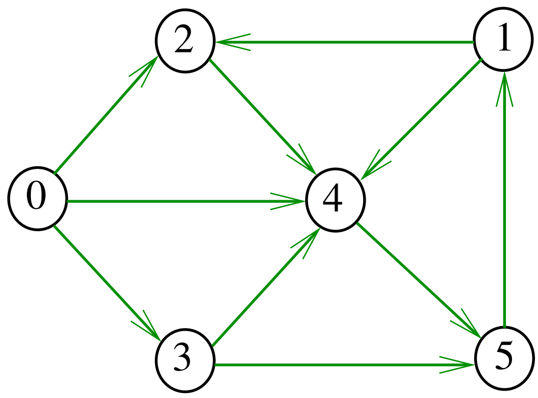
O algoritmo

visita s,
depois visita vértices à distância 1 de s,
depois visita vértices à distância 2 de s,
depois visita vértices à distância 3 de s,
e assim por diante

Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

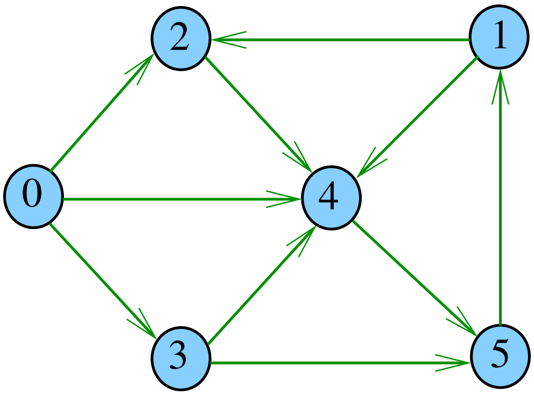
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]						



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

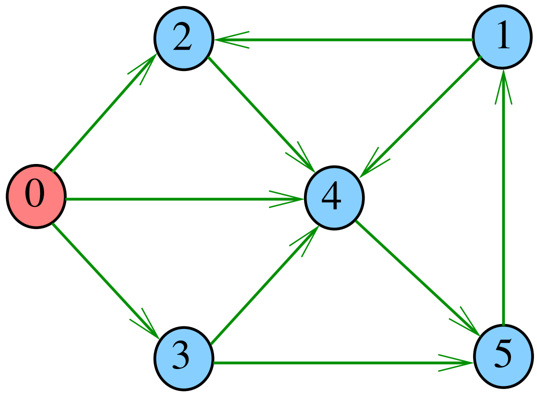
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					

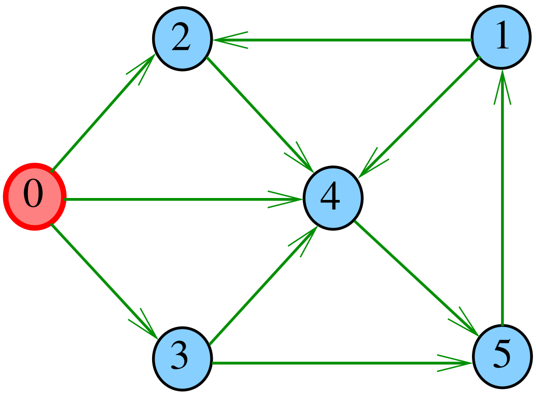
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**					

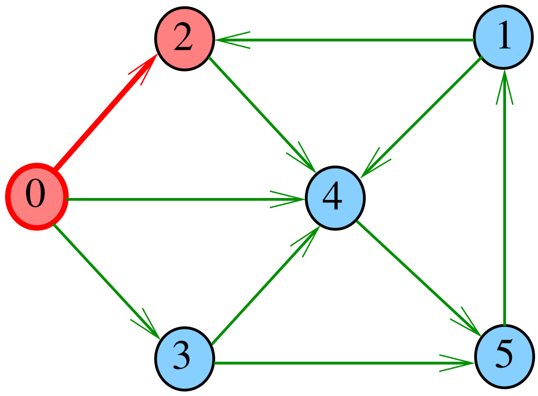
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	**0**	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	2				

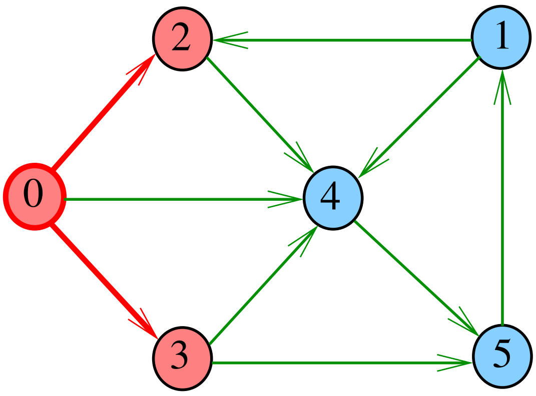
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	**1**	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	2	3			

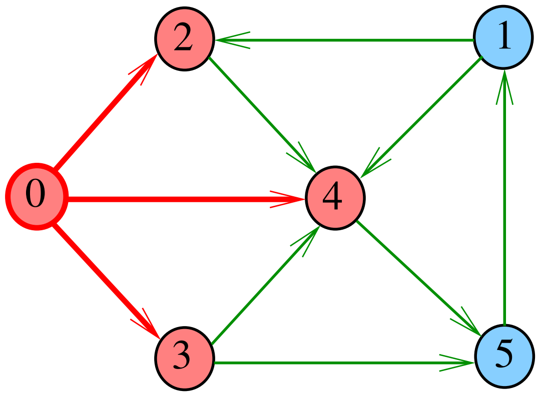
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	**1**	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	2	3	4		

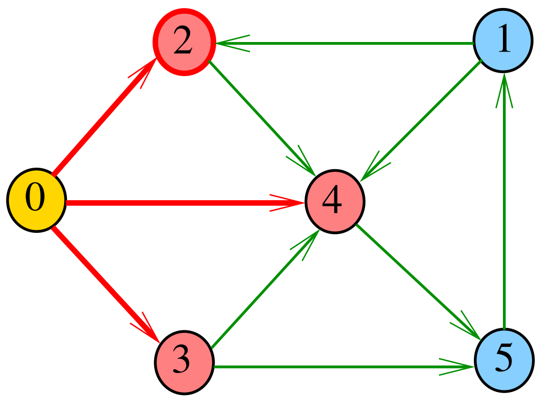
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	**1**	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

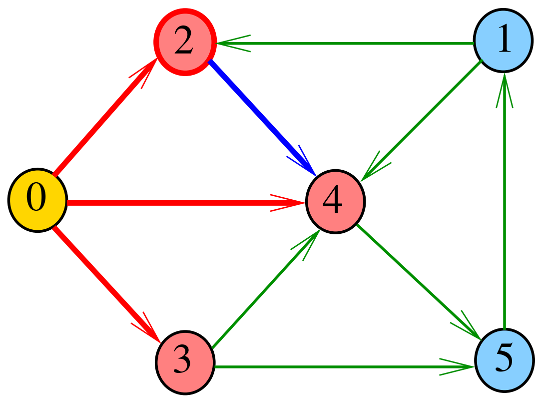
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

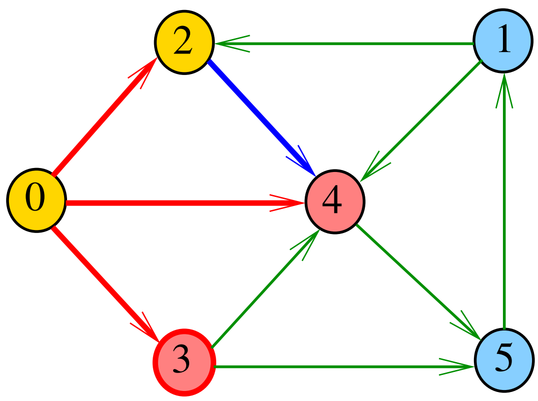
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

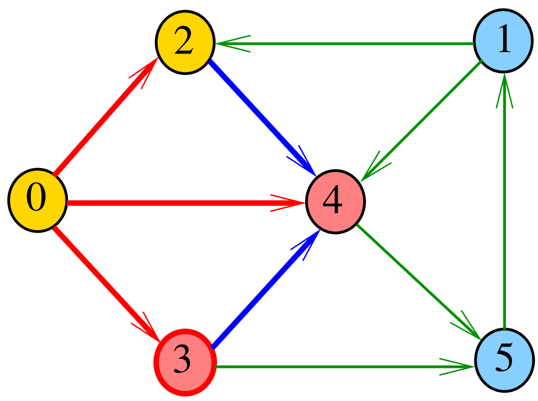
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

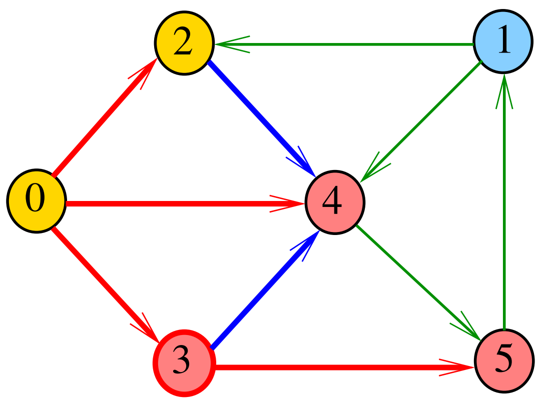
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

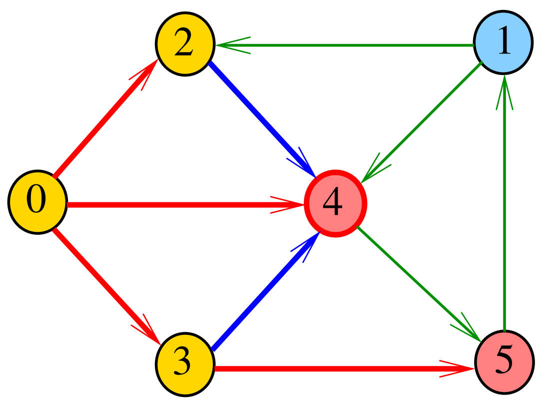
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

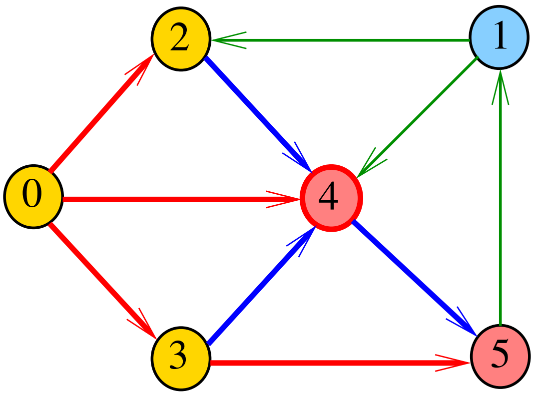
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

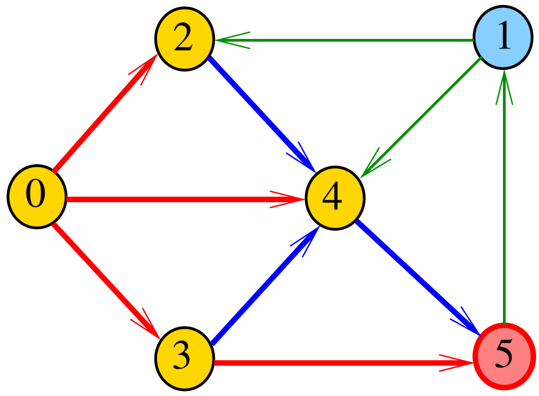
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

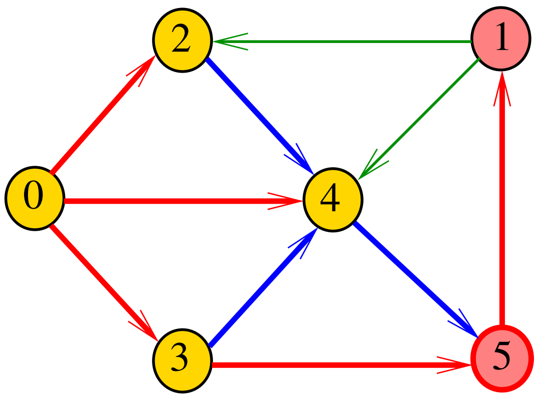
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

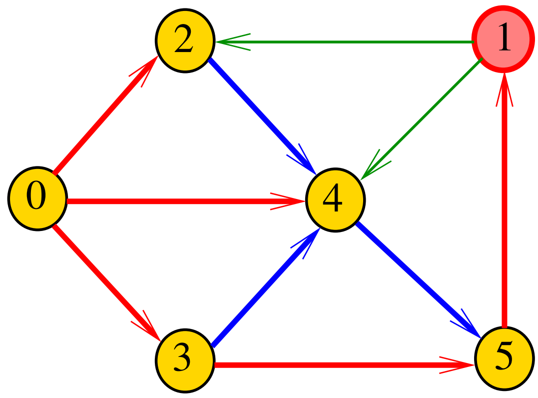
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

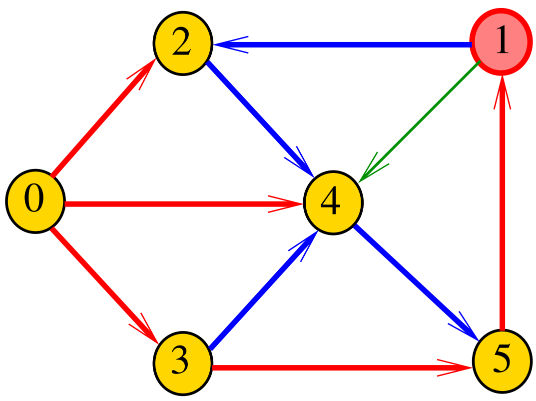
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

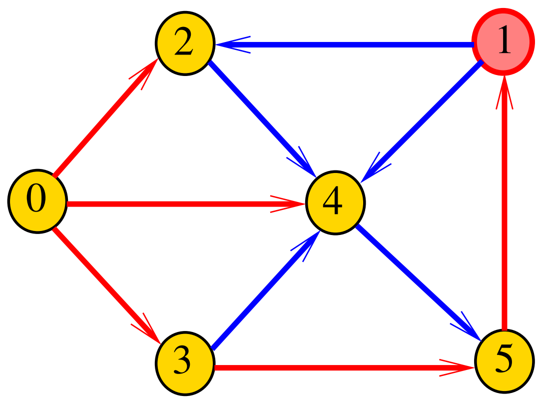
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

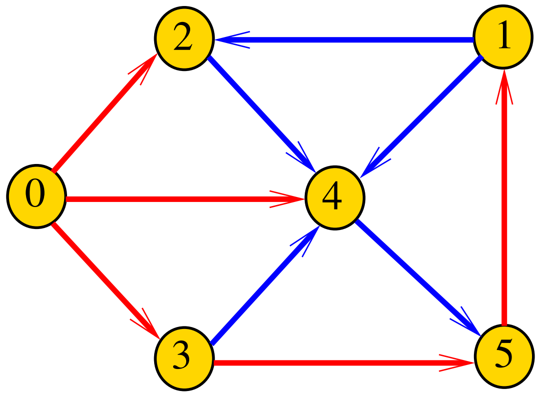
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



DIGRAPHdist

```
#define INFINITO maxV
static int dist[maxV];
static Vertex parnt[maxV];
void DIGRAPHbfs (Digraph G, Vertex s) {
    Vertex v, w; link p;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        dist[v] = INFINITO;
        parnt[v] = -1;
    }
    QUEUEinit(G->V);
    dist[s] = 0;
    parnt[s] = s;
```

DIGRAPHdist

```
    QUEUEput(s);
    while (!QUEUEempty()) {
        v = QUEUEget();
        for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
            if (dist[w=p->w] == INFINITO) {

                dist[w] = dist[v] + 1;
                parnt[w] = v;
                QUEUEput(w);
            }
    }
    QUEUEfree();
}
```

Digrafos com custos nos arcos

Muitas aplicações associam um número a cada arco de um digrafo

Diremos que esse número é o custo da arco

Vamos supor que esses números são do tipo **double**

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
    double cst;
} Arc;
```

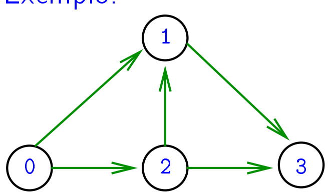
Matriz de adjacência

Matriz de adjacência indica a presença ausência e custo dos arcos:

se v-w é um arco, adj[v][w] é seu custo

se v-w não é arco, adj[v][w] = maxCST

Exemplo:

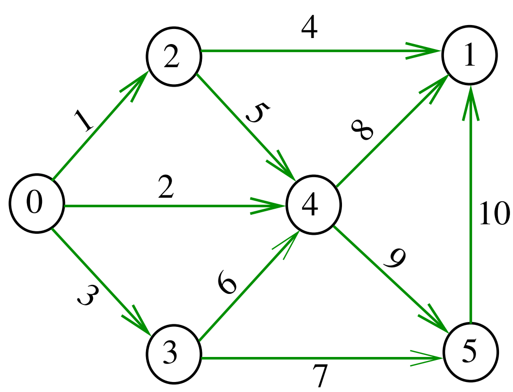


	0	1	2	3
0	*	.3	2	*
1	*	*	*	.42
2	*	1	*	.12
3	*	*	*	*

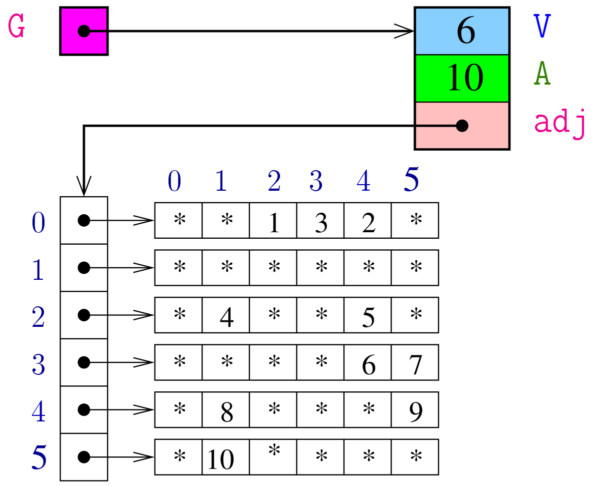
* indica maxCST = INFINITO

Digrafo

Digraph G



Estruturas de dados



Vetor de listas de adjacência

A lista de adjacência de um vértice `v` é composta por nós do tipo `node`

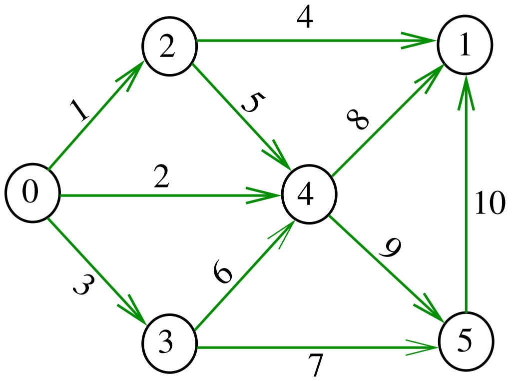
Um `link` é um ponteiro para um `node`

Cada nó da lista contém um vizinho `w` de `v`, **o custo** do arco `v-w` e o endereço do nó seguinte da lista

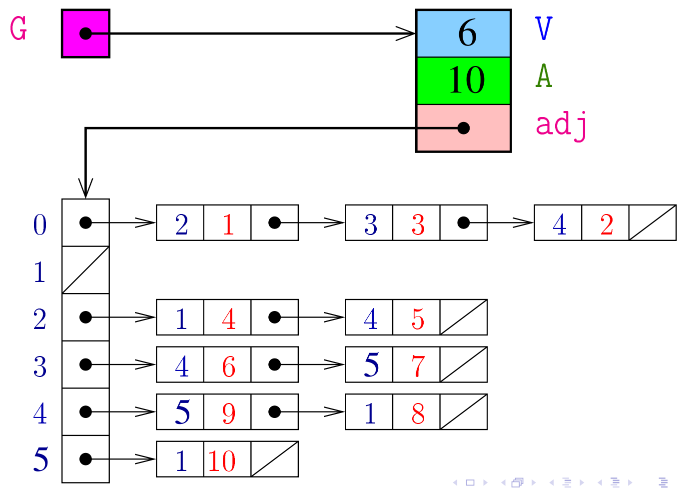
```
typedef struct node *link;
struct node {
    Vertex w;
    double cst;
    link next;
};
```

Digrafo

`Digraph G`



Estruturas de dados



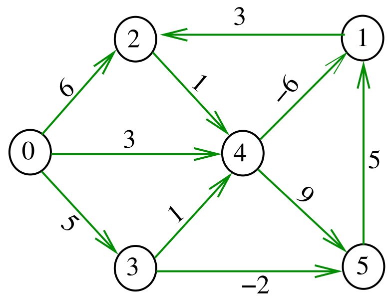
Custo de um caminho

Custo de um caminho é soma dos custos de seus arcos

Custo do caminho 0-2-4-5 é 16.

Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-5 é 14.

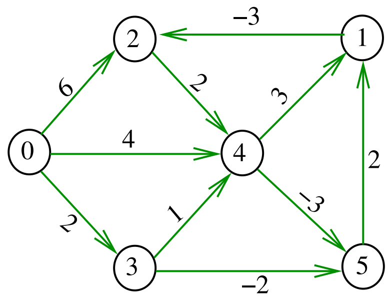
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-1-2-4-5 é 12.



Caminho mínimo

Um caminho `P` tem **custo mínimo** se o custo de `P` é menor ou igual ao custo de todo caminho com a mesma origem e término

O caminho 0-3-4-5-1-2 é mínimo, tem custo -1



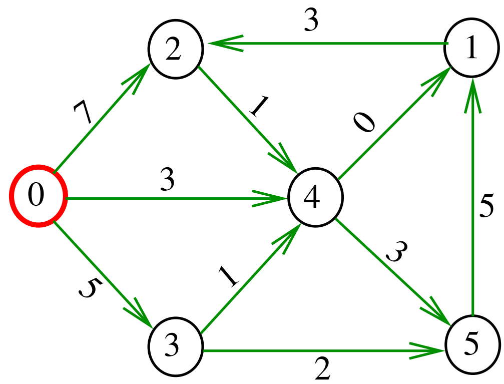
Problema

Problema dos Caminhos Mínimos com Origem Fixa
(*Single-source Shortest Paths Problem*):

> *Dado um vértice s de um digrafo com custos* ***não-negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um* ***caminho mínimo simples*** *de s a t.*

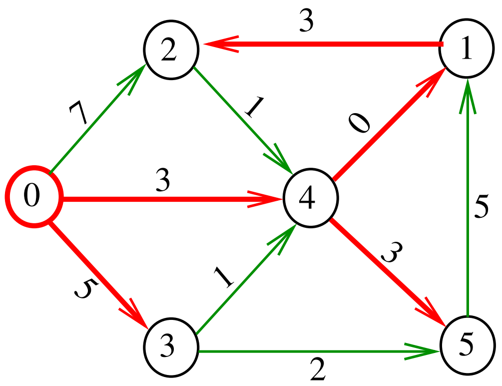
Exemplo

Entra:



Exemplo

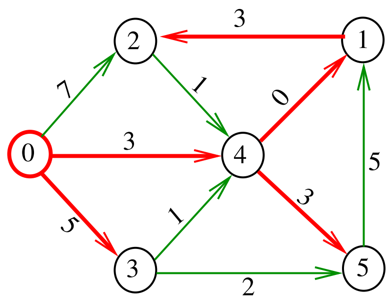
Sai:



Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

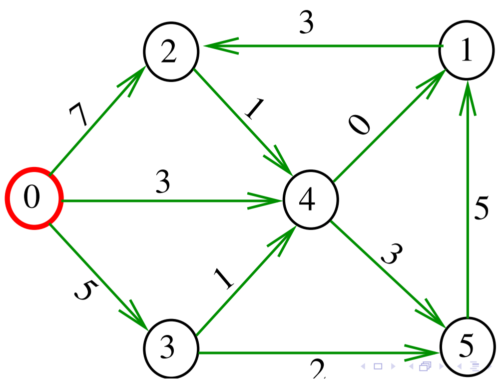
> *o único caminho de s a t na arborescência é um caminho mínimo*



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

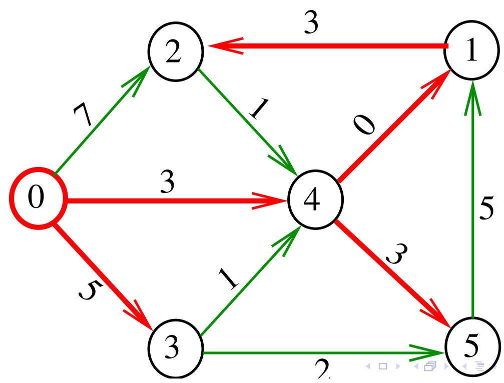
Entra:



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Sai:



AULA 14

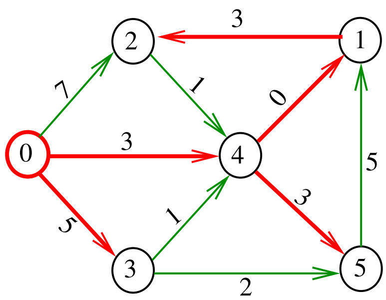
Algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

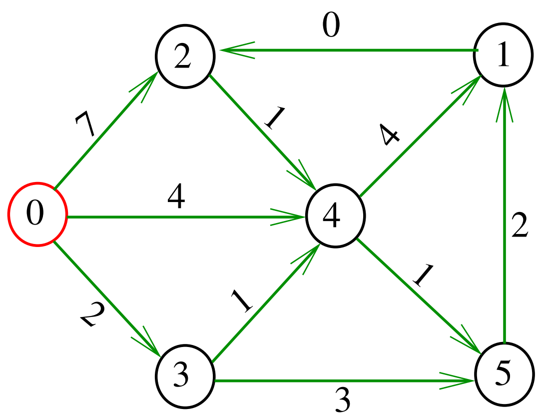
Problema

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema da SPT:

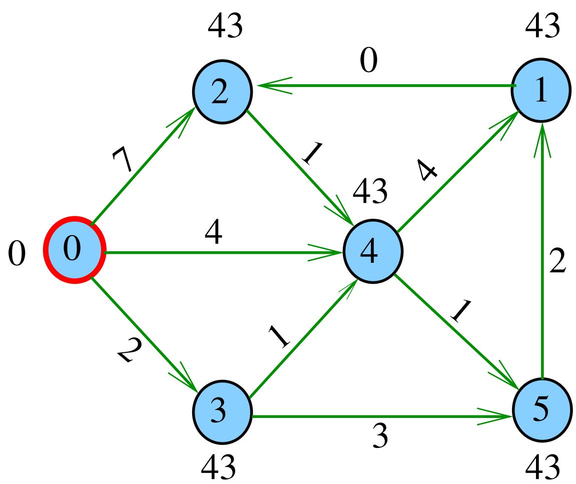
Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s



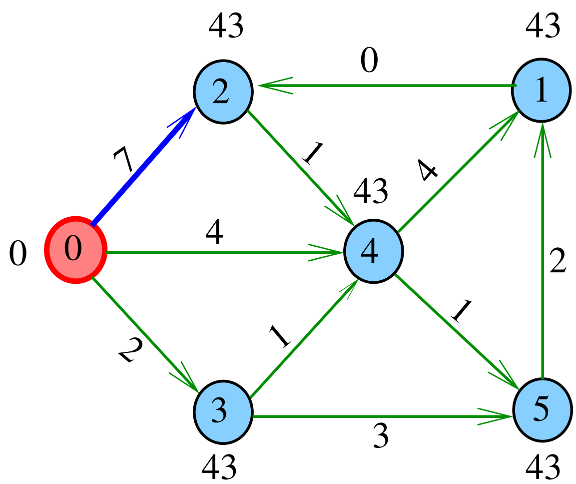
Simulação



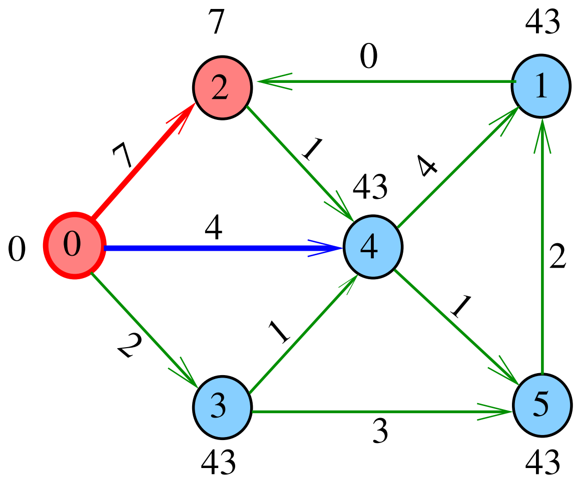
Simulação



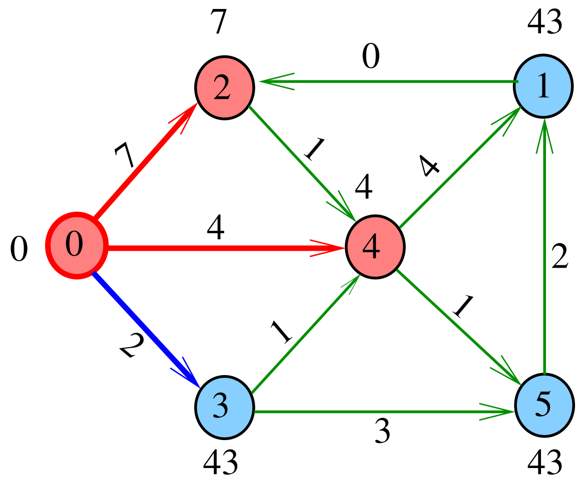
Simulação



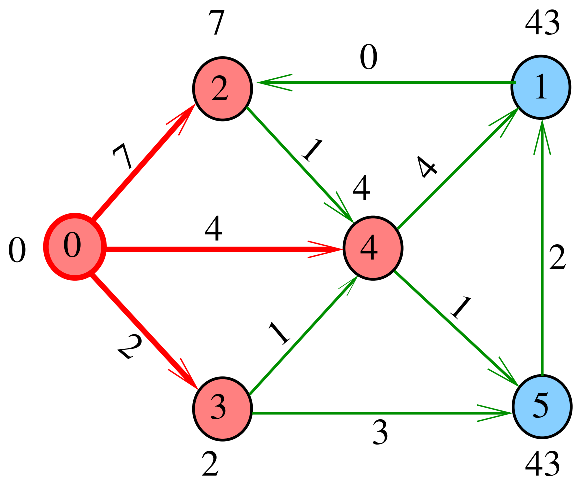
Simulação



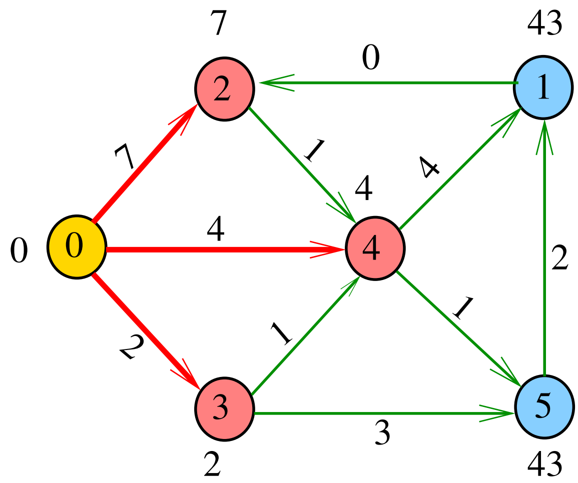
Simulação



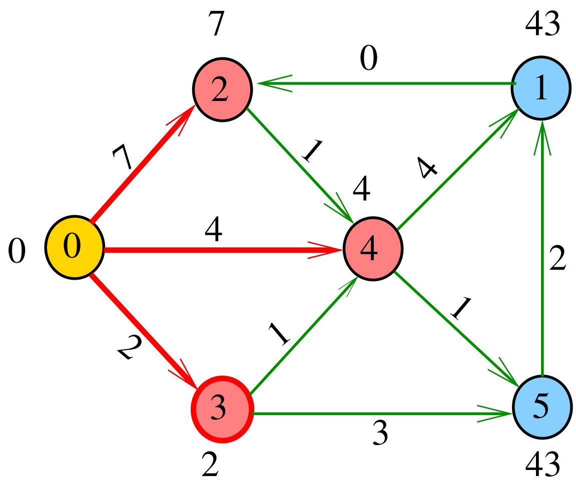
Simulação



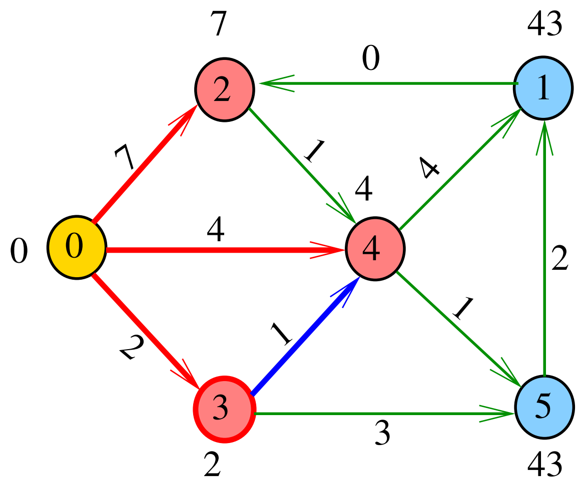
Simulação



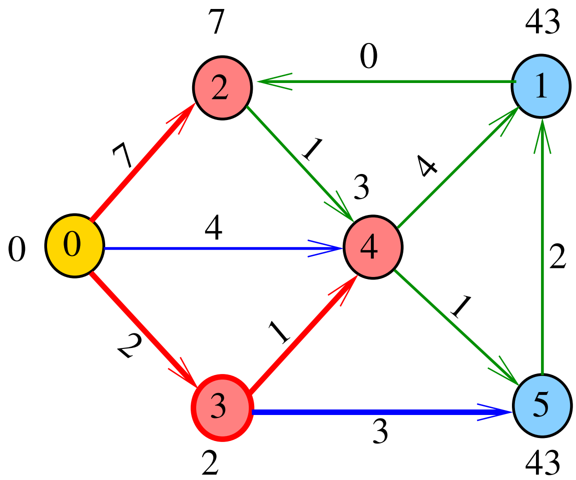
Simulação



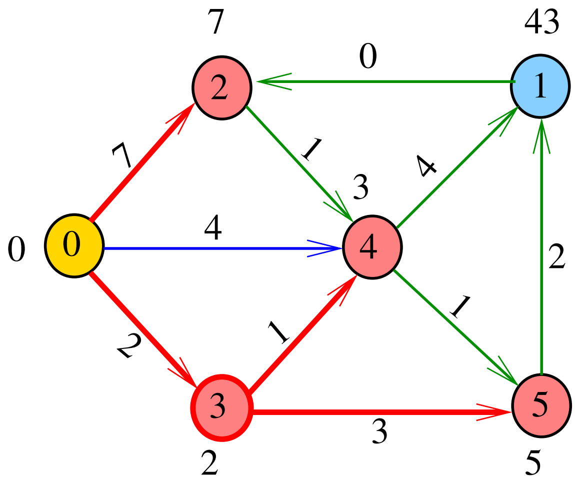
Simulação



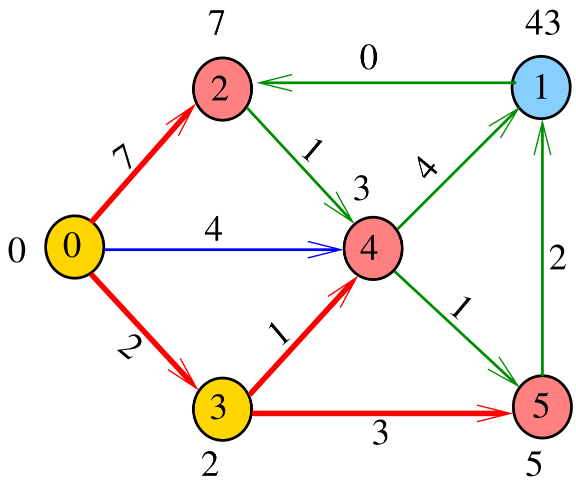
Simulação



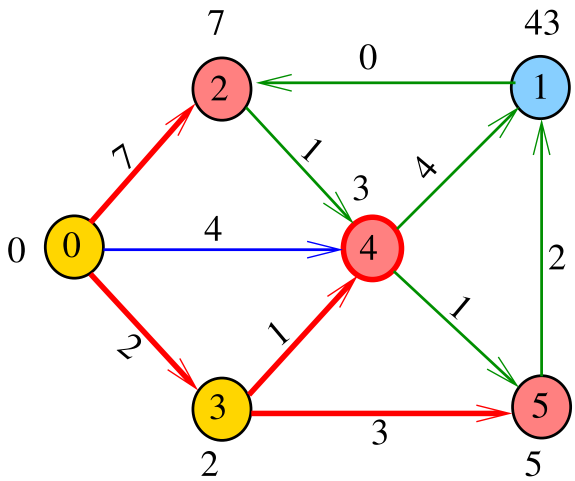
Simulação



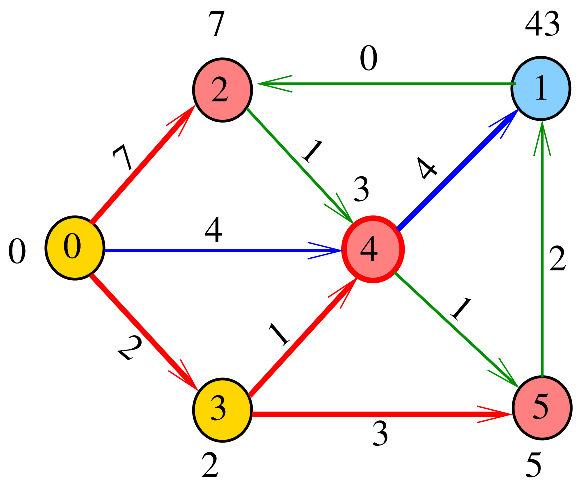
Simulação



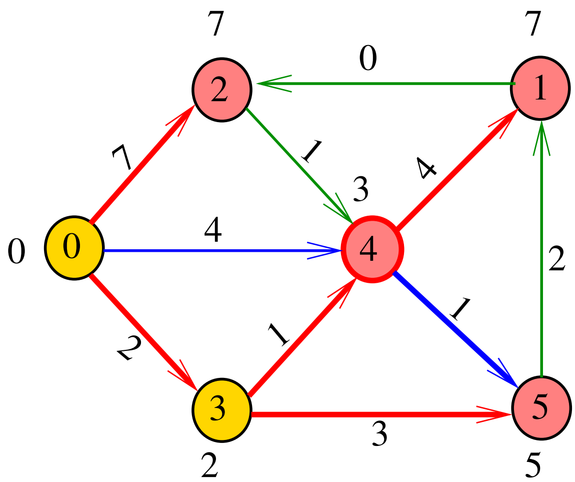
Simulação



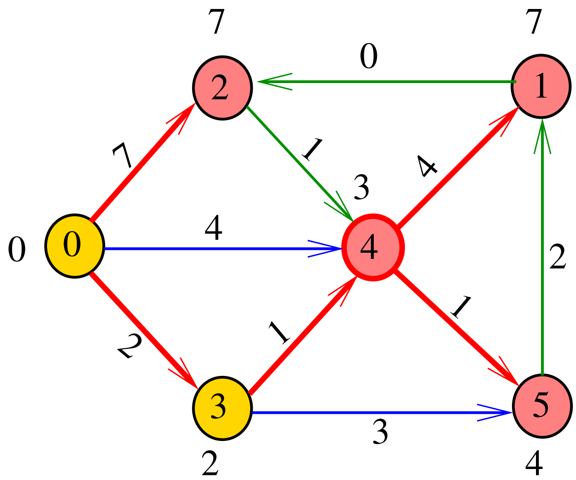
Simulação



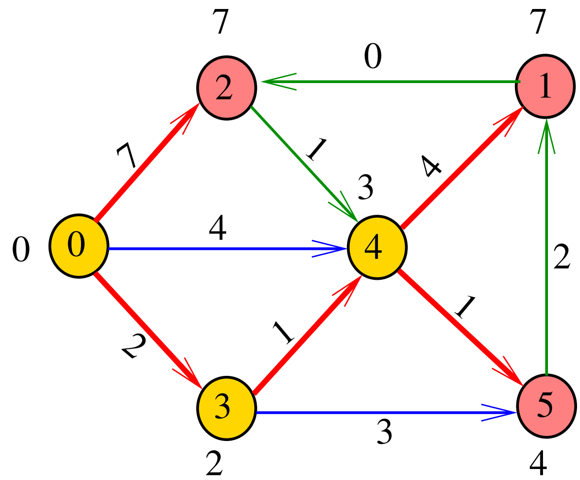
Simulação



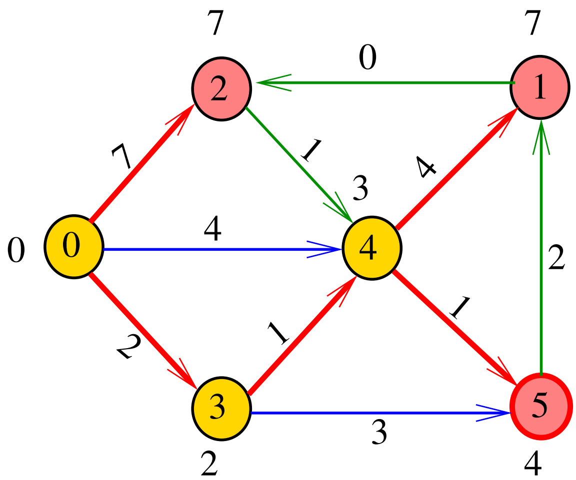
Simulação



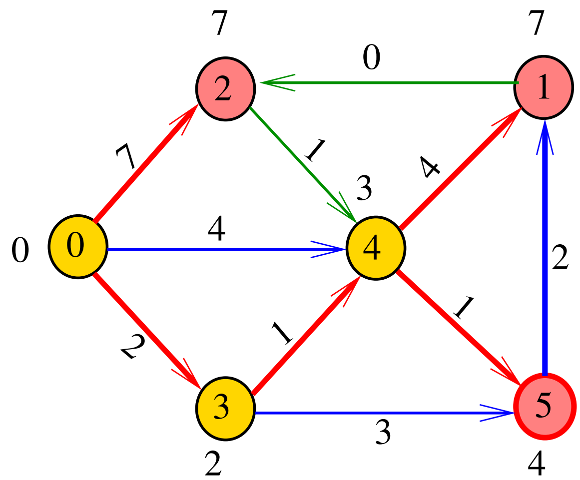
Simulação



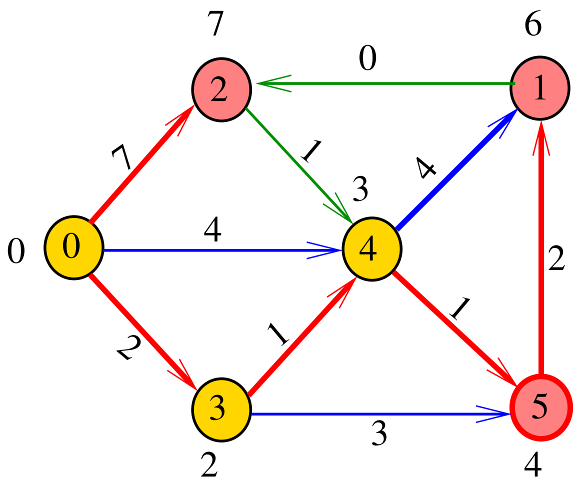
Simulação



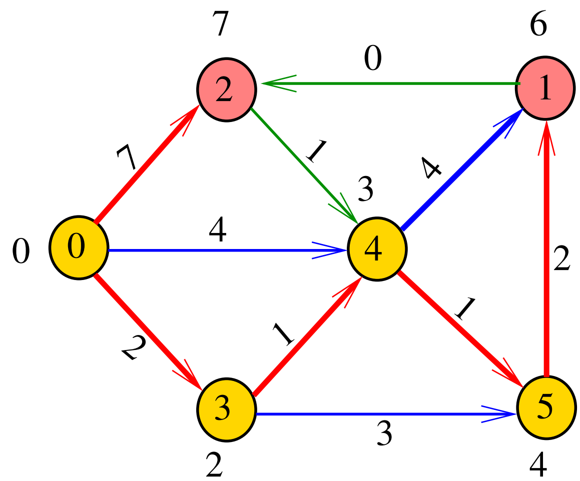
Simulação



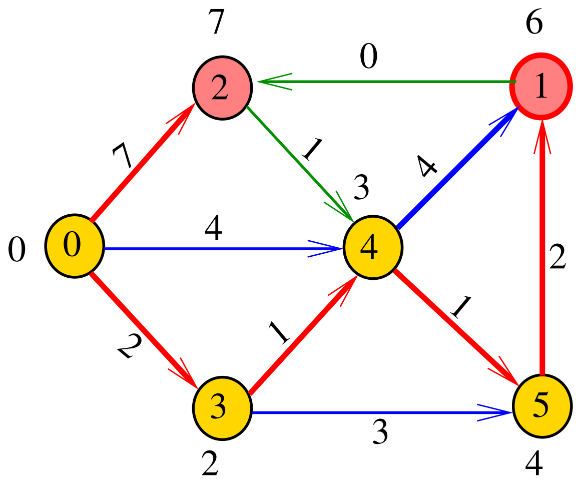
Simulação



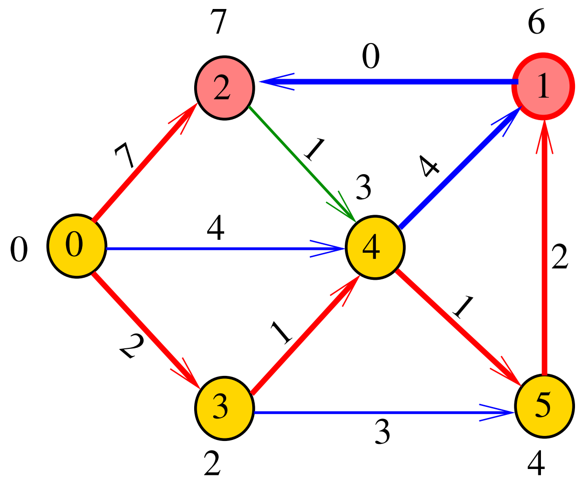
Simulação



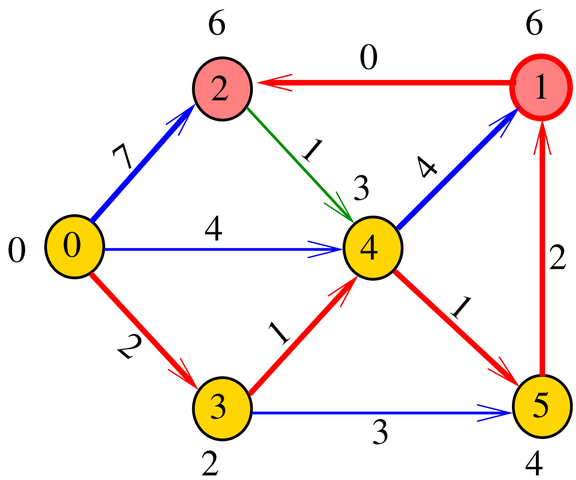
Simulação



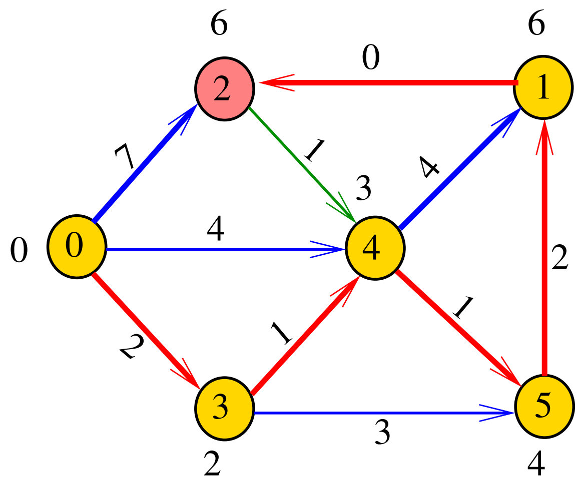
Simulação



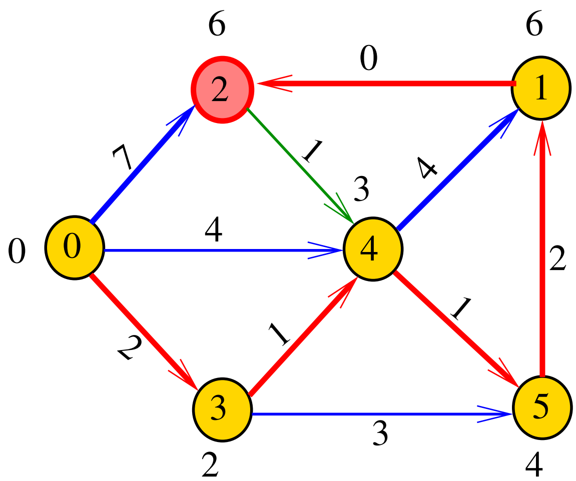
Simulação



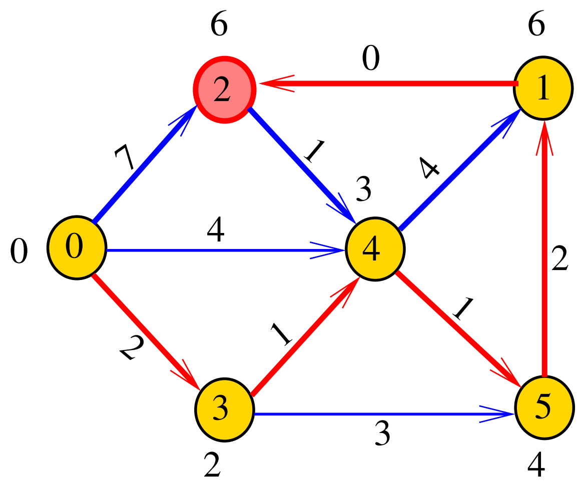
Simulação



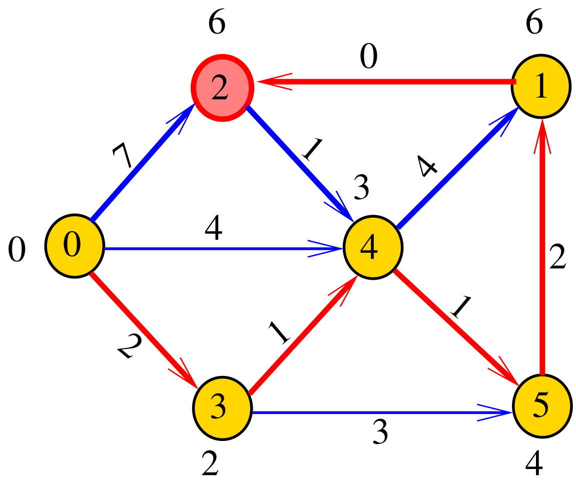
Simulação



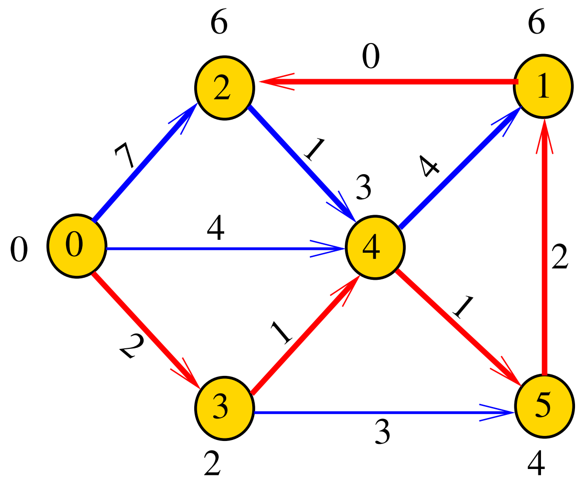
Simulação



Simulação



Simulação



`dijkstra`

Recebe digrafo `G` com custos não-negativos nos arcos e um vértice `s`

Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz `s`.

A arborescência é armazenada no vetor `parnt`

As distâncias em relação a `s` são armazenadas no vetor `cst`

```
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
      Vertex parnt[], double cst[]);
```

Fila com prioridades

A função `dijkstra` usa uma fila com prioridades

A fila é manipulada pelas seguintes funções:

- `PQinit()`: inicializa uma fila de vértices em que cada vértice v tem prioridade `cst[v]`
- `PQempty()`: devolve 1 se a fila estiver vazia e 0 em caso contrário
- `PQinsert(v)`: insere o vértice `v` na fila
- `PQdelmin()`: retira da fila um vértice de prioridade mínima.
- `PQdec(w)`: reorganiza a fila depois que o valor de `cst[w]` foi decrementado.

`dijkstra`

```
#define INFINITO maxCST
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
      Vertex parnt[], double cst[]);
{
   Vertex v, w; link p;
   for (v = 0; v < G->V; v++) {
      cst[v] = INFINITO;
      parnt[v] = -1;
   }
   PQinit(G->V);
   cst[s] = 0;
   parnt[s] = s;
```

`dijkstra`

```
   PQinsert(s);
   while (!PQempty()) {
      v = PQdelmin();
      for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
         if (cst[w=p->w]==INFINITO) {
            cst[w]=cst[v]+p->cst;
            parnt[w]=v;
            PQinsert(w);
         }
```

dijkstra

```
16          else
17          if(cst[w]>cst[v]+p->cst)
18              cst[w]=cst[v]+p->cst
19              parnt[w] = v;
20              PQdec(w);
            }
21    PQfree();
      }
}
```

Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha
2–4	$\Theta(V)$
5	$= 1$ PQinit
6–7	$= 1$
8	$= 1$ PQinsert
9–10	$O(V)$ PQempty e PQdelmin
11	$O(A)$
12–14	$O(V)$
15	$O(V)$ PQinsert
16–19	$O(A)$
20	$O(A)$ PQdec
21	$= 1$ PQfree
total	$= O(V + A) + ???$

Conclusão

O consumo de tempo da função dijkstra é $O(V + A)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	PQinit e PQfree,
$O(V)$	execuções de	PQinsert,
$O(V)$	execuções de	PQempty,
$O(V)$	execuções de	PQdelmin, e
$O(A)$	execuções de	PQdec.

Implementação para digrafos densos

```
/* Item.h */
typedef Vertex Item;

/* QUEUE.h */
void PQinit(int);
int PQempty();
void PQinsert(Item);
Item PQdelmin();
void PQdec(Item);
void PQfree();
```

PQinit e PQempty

```
Item *q;
int  inicio, fim;

void PQinit(int maxN) {
   q=(Item*)malloc(maxN*sizeof(Item));
   inicio = 0;
   fim = 0;
}

int PQempty() {
   return inicio==fim;
}
```

PQinsert e PQdelmin

```
void PQinsert(Item item){
   q[fim++] = item;
}

Item PQdelmin() {
   int i, j; Item x;
   i= inicio;
   for (j=i+1; j < fim; j++)
      if (cst[q[i]] > cst[q[j]]) i = j;
   x = q[i];
   q[i] = q[--fim];
   return x;
}
```

PQdec e PQfree

```
void PQdec(Vertexv) {
/* faz nada */
}

void PQfree() {
  free(q);
}
```

Conclusão

O consumo de tempo da função dijkstra é $O(V^2)$.

Este consumo de tempo é ótimo para **digrafos densos**.

Consumo de tempo Min-Heap

	bucket heap	radix heap
PQinsert	$O(1)$	$O(\lg(VC)R$
PQdelmin	$O(C)$	$O(\lg(VC)$
PQdec	$O(1)$	$O(A + V \lg(VC))$
dijkstra	$O(A + VC)$	$O(A + V \lg(VC))$

C = maior custo de um arco.

Consumo de tempo Min-Heap

PQinit	$\Theta(1)$
PQempty	$\Theta(1)$
PQinsert	$\Theta(1)$
PQdelmin	$O(V)$
PQdec	$\Theta(1)$
PQfree	$\Theta(1)$

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
PQinsert	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
PQdelmin	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
PQdec	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
dijkstra	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
Insert	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
Extract-Min	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
Decrease-Key	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
dijkstra	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$

Consumo de tempo Min-Heap

	bucket heap	radix heap
INSERT	$\mathrm{O}(1)$	$\mathrm{O}(\lg(\mathtt{V}\mathtt{C})\mathrm{R}$
EXTRACT-MIN	$\mathrm{O}(\mathtt{C})$	$\mathrm{O}(\lg(\mathtt{V}\mathtt{C})$
DECREASE-KEY	$\mathrm{O}(1)$	$\mathrm{O}(\mathtt{A} + \mathtt{V} \lg(\mathtt{V}\mathtt{C}))$
`dijkstra`	$\mathrm{O}(\mathtt{A} + \mathtt{V}\mathtt{C})$	$\mathrm{O}(\mathtt{A} + \mathtt{V} \lg(\mathtt{V}\mathtt{C}))$

$\mathtt{C}$ = maior custo de um arco.