Melhores momentos

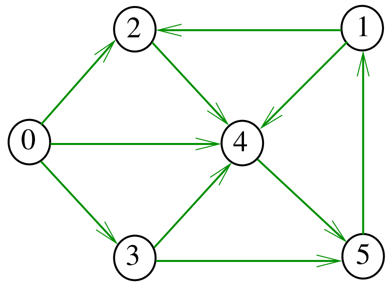
AULA 12

Calculando distâncias

Problema: dados um digrafo G e um vértice s, determinar a distância de s aos demais vértices do digrafo

Exemplo: para s = 0

v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Busca em largura

A **busca em largura** (=*breadth-first search search* = *BFS*) começa por um vértice, digamos s, especificado pelo usuário.

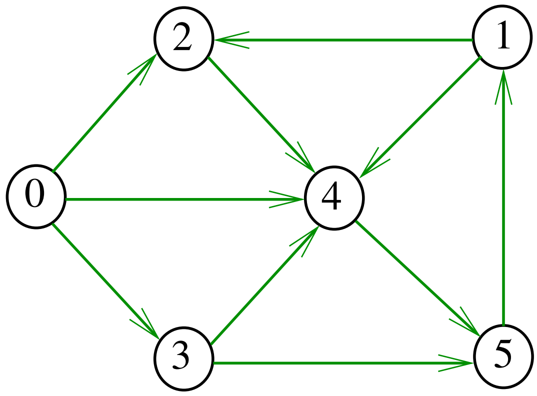
O algoritmo

visita s,
depois visita vértices à distância 1 de s,
depois visita vértices à distância 2 de s,
depois visita vértices à distância 3 de s,
e assim por diante

Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

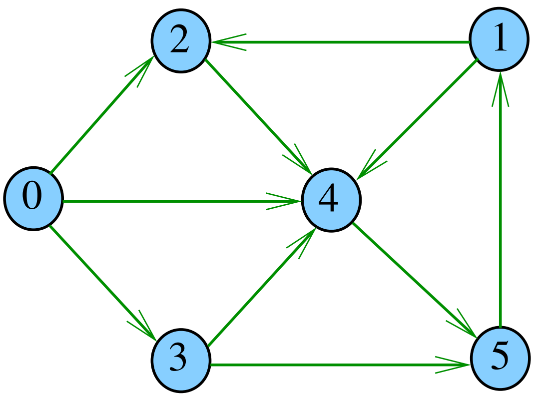
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]						



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

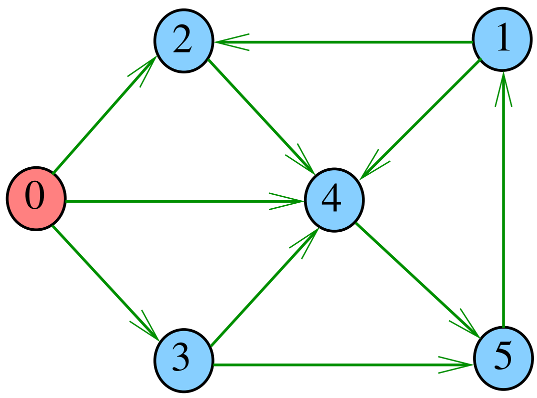
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					

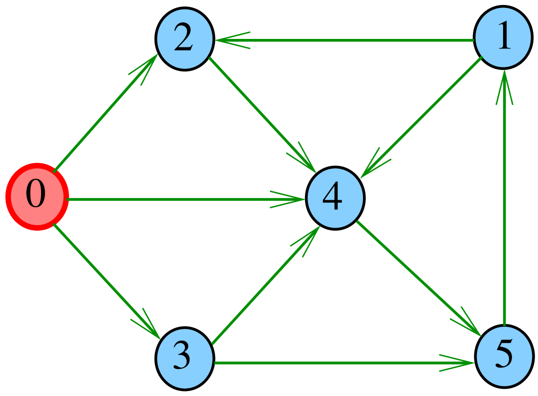
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					

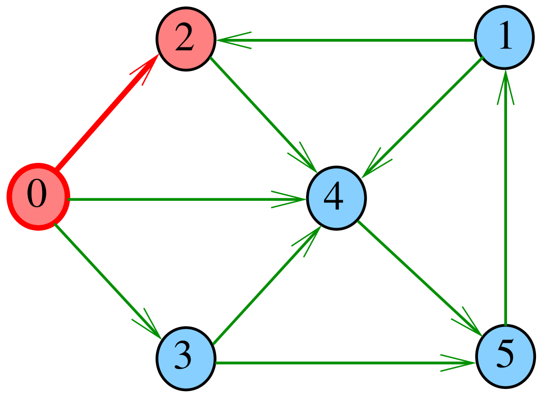
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2				

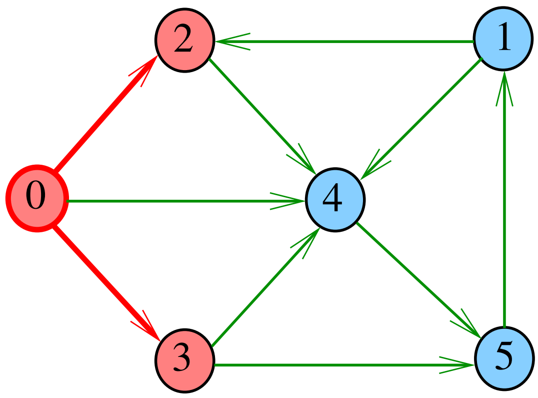
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3			

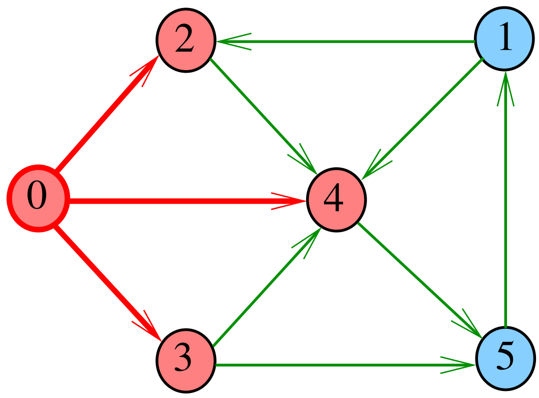
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

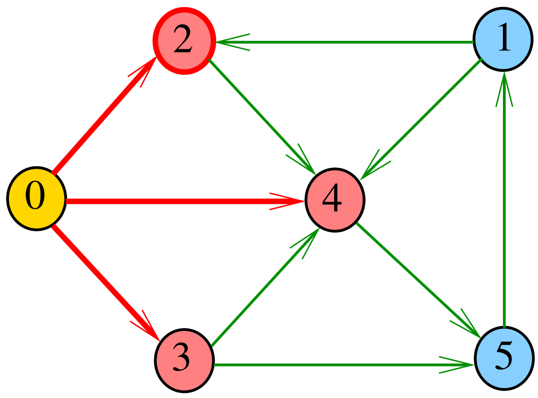
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

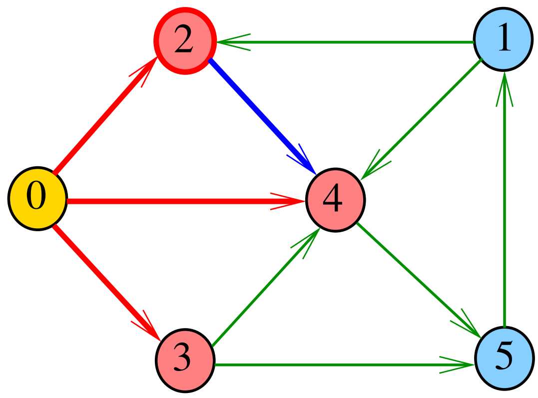
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

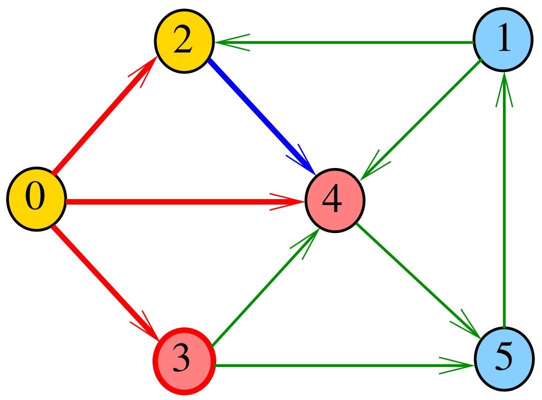
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

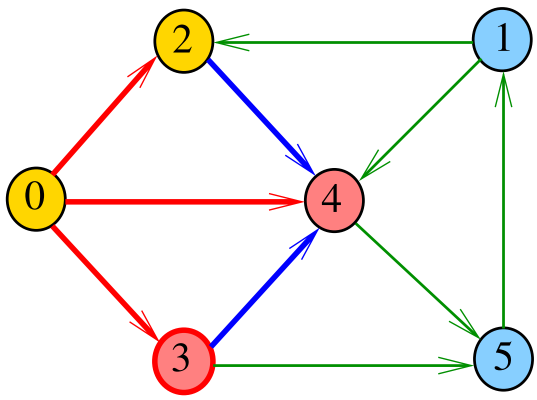
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

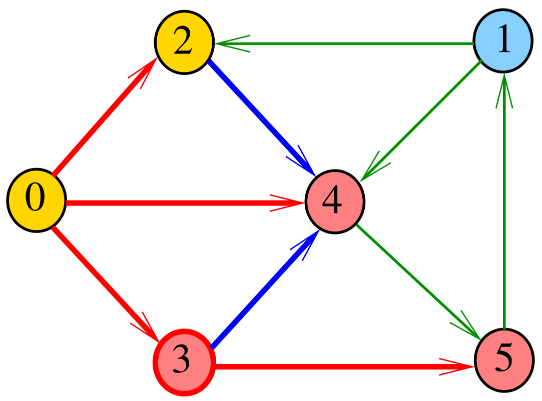
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

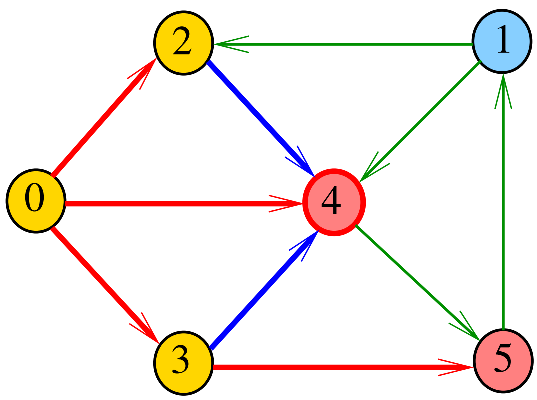
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

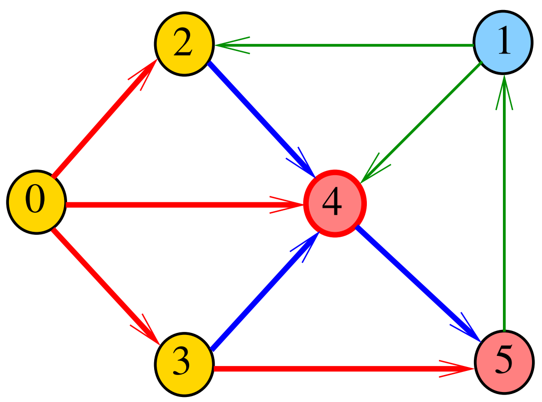
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

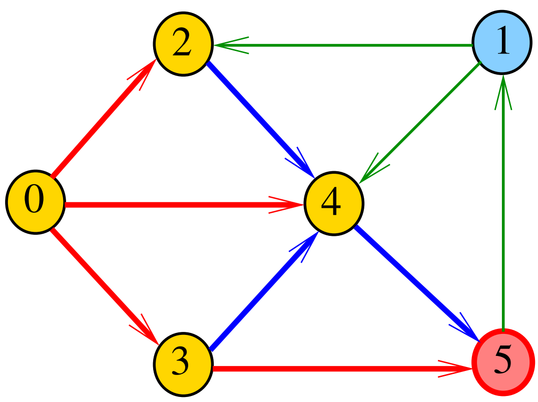
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

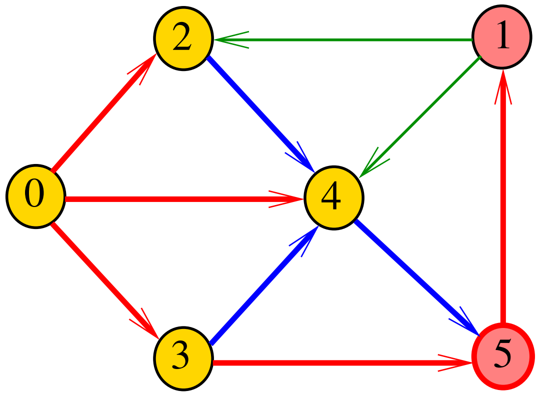
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

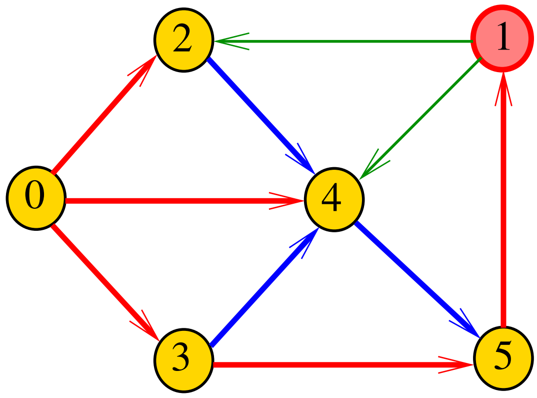
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

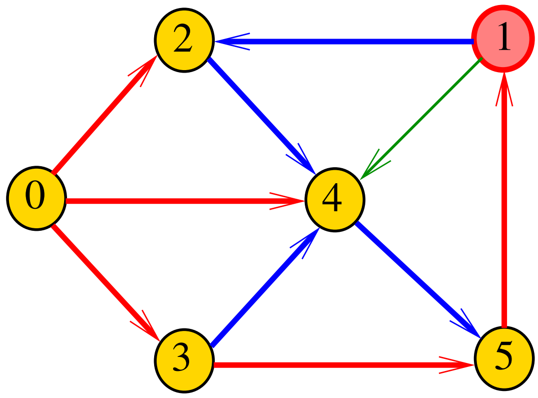
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

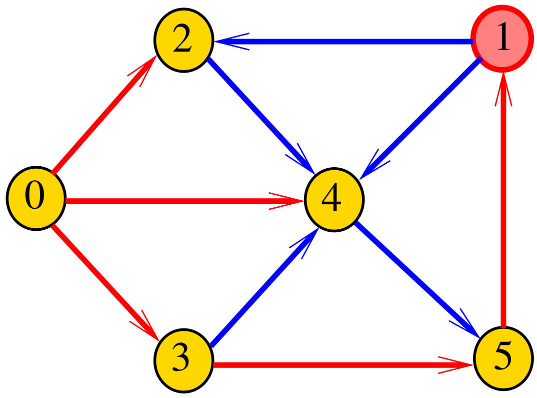
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

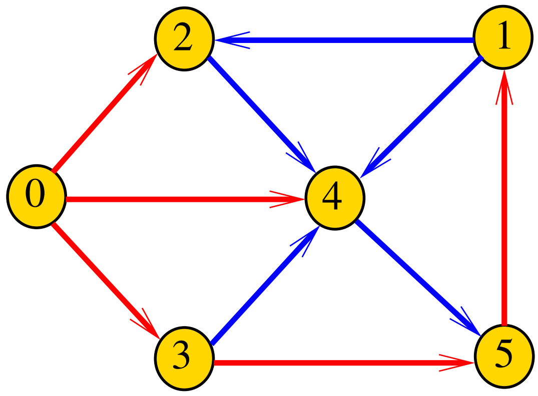
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



DIGRAPHdist

```
#define INFINITO G->V   /* ou maxV */
static int dist[maxV];
static Vertex parnt[maxV];
void DIGRAPHdist (Digraph G, Vertex s) {
  Vertex v, w; link p;
  for (v = 0; v < G->V; v++)
      dist[v] = INFINITO;
      parnt[v] = -1;
  }
  QUEUEinit(G->V);
  dist[s] = 0;
  parnt[s] = s;
```

DIGRAPHdist

```
QUEUEput(s);
while (!QUEUEempty()) {
    v = QUEUEget();
    for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
        if (dist[w=p->w] == INFINITO){
            dist[w] = dist[v] + 1;
            parnt[w] = v;
            QUEUEput(w);
        }
}
QUEUEfree();
}
```

AULA 13

1-Potenciais

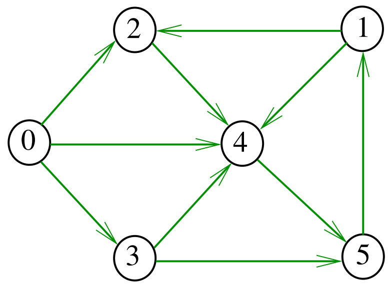
1-potenciais

Um **1-potencial** é um vetor y indexado pelos vértices do digrafo tal que

$$y[w] - y[v] \leq 1 \text{ para todo arco } v\text{-}w$$

Exemplo:

v	0	1	2	3	4	5
y[v]	1	1	1	1	1	1



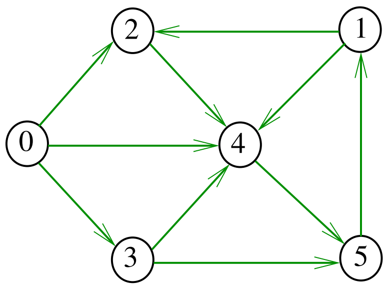
1-potenciais

Um **1-potencial** é um vetor y indexado pelos vértices do digrafo tal que

$$y[w] - y[v] \leq 1 \text{ para todo arco } v\text{-}w$$

Exemplo:

v	0	1	2	3	4	5
y[v]	1	2	2	1	1	2



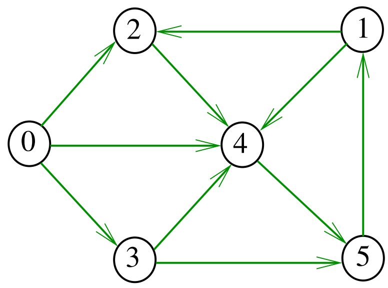
Propriedade dos 1-potencias

Lema da dualidade. Se y é um 1-potencial e P é um caminho de s a t, então

$$y[t] - y[s] \leq |P|$$

Exemplo:

v	0	1	2	3	4	5
y[v]	6	6	6	7	7	7



Conseqüência

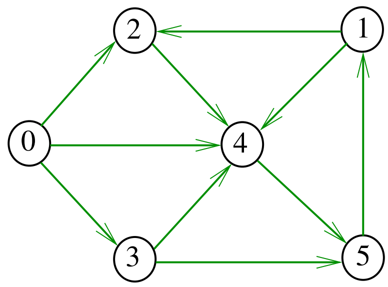
Se P é um caminho de s a t e y é um 1-potencial tais que

$$|P| = y[t] - y[s],$$

então P é um caminho **mínimo** e y é um 1-potencial tal que y[t] − y[s] é **máximo**

Exemplo

v	0	1	2	3	4	5
y[v]	0	2	1	1	1	2



Invariantes

Abaixo está escrito y no papel de dist

Na linha 9 da função DIGRAPHdist valem as seguintes invariantes:

(i0) para cada arco v-w na arborescência BFS tem-se que y[w] − y[v] = 1;

(i1) parnt[s] = s e y[s] = 0;

(i2) para cada vértice v, y[v] $\neq$ G->V $\Leftrightarrow$ parnt[v] $\neq -1$;

(i3) para cada vértice v, se parnt[v] $\neq -1$ então existe um caminho de s a v na arborescência BFS.

Invariantes (continuação)

Abaixo está escrito y no papel de dist

Na linha 9 da função DIGRAPHdist vale a seguinte relação invariante:

(i4) para cada arco v-w se

$$y[w] - y[v] > 1$$

então v está na fila.

Correção de DIGRAPHdist

Início da última iteração:

- y é um 1-potencial, por (i4)
- se y[t] $\neq$ G->V, então parnt[t] $\neq -1$ [(i2)]. Logo, de (i3), segue que existe um st-caminho P na arborescência BFS. (i0) e (i1) implicam que

$$|P| = y[t] - y[s] = y[t].$$

  Da propriedade dos 1-potencias, concluímos que P é um st-caminho de comprimento mínimo
- se y[t] = G->V, então (i1) implica que y[t] − y[s] = G->V e da propriedade dos 1-potencias concluímos que não existe caminho de s a t no grafo

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

Teorema da dualidade

Da propriedade dos 1-potenciais (lema da dualidade) e da correção de DIGRAPHdist concluímos o seguinte:

> Se s e t são vértices de um digrafo e t está ao alcance de s então
>
> $$\min\{|P| : P \text{ é um st-caminho}\}$$
> $$= \max\{y[t] - y[s] : y \text{ é um 1-potencial}\}.$$

Custos nos arcos

S 20.1

Digrafos com custos nos arcos

Muitas aplicações associam um número a cada arco de um digrafo
Diremos que esse número é o custo da arco
Vamos supor que esses números são do tipo **double**

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
    double cst;
} Arc;
```

ARC

A função ARC recebe dois vértices v e w e um valor cst e devolve um arco com ponta inicial v e ponta final w e custo cst

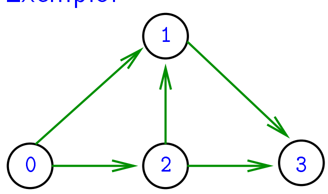
```
Arc ARC (Vertex v, Vertex w, double cst)
{
    Arc e;
    e.v = v;   e.w = w;
    e.cst = cst;
    return e;
}
```

Matriz de adjacência

Matriz de adjacência indica a presença ausência e custo dos arcos:

se v-w é um arco, adj[v][w] é seu custo
se v-w não é arco, adj[v][w] = maxCST

Exemplo:



	0	1	2	3
0	*	.3	2	*
1	*	*	*	.42
2	*	1	*	.12
3	*	*	*	*

* indica maxCST

Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo
- adj é um ponteiro para a matriz de adjacência
- V contém o número de vértices
- A contém o número de arcos do digrafo.

```
struct digraph {
    int V;
    int A;
    double **adj;
};
```

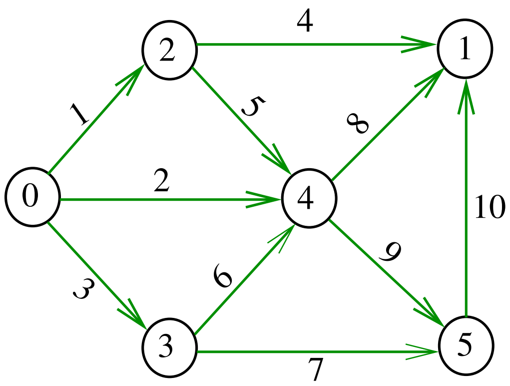
Estrutura Digraph

Um objeto do tipo Digraph contém o endereço de um digraph

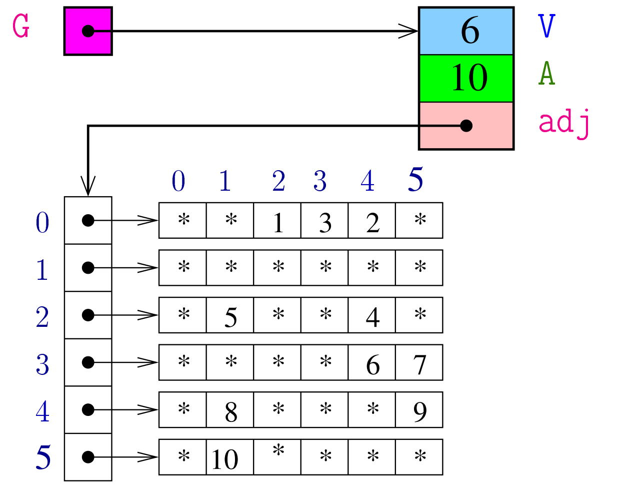
```
typedef struct digraph *Digraph;
```

Digrafo

`Digraph G`



Estruturas de dados



MATRIXdouble

Aloca uma matriz com linhas `0..r-1` e colunas `0..c-1`, cada elemento da matriz recebe valor `val`

```
double **
MATRIXdouble(int r, int c, double val) {
    Vertex i, j;
    double **m = malloc(r*sizeof(double*));
    for (i = 0; i < r; i++)
        m[i] = malloc(c*sizeof(double));
    for (i = 0; i < r; i++)
        for (j = 0; j < c; j++)
            m[i][j] = val;
    return m;
}
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices `0,..,V-1` e nenhum arco.

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {
    Digraph G = malloc(sizeof *G);
    G->V = V;
    G->A = 0;
    G->adj = MATRIXdouble(V, V, maxCST);
    return G;
}
```

DIGRAPHinsertA

Insere um arco `v-w` de custo `cst` no digrafo `G`
Se `v==w` ou o digrafo já tem arco `v-w`, não faz nada

```
void
DIGRAPHinsertA(Digraph G,Vertex v,Vertex w,
               double cst)
{
    if (v != w && G->adj[v][w] == maxCST) {
        G->adj[v][w] = cst;
        G->A++;
    }
}
```

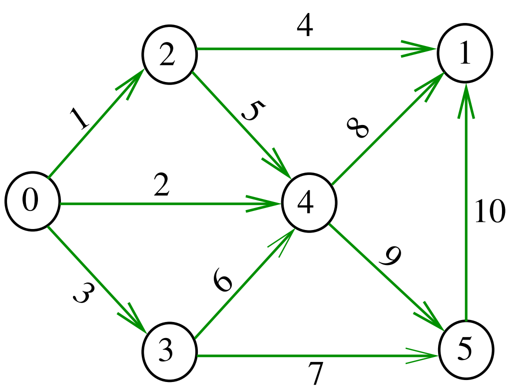
Vetor de listas de adjacência

A lista de adjacência de um vértice `v` é composta por nós do tipo `node`
Um `link` é um ponteiro para um `node`
Cada nó da lista contém um vizinho `w` de `v`, **o custo** do arco `v-w` e o endereço do nó seguinte da lista

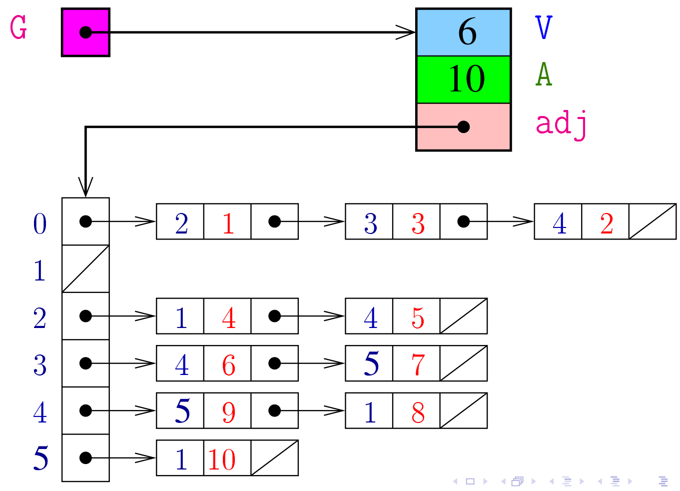
```
typedef struct node *link;
struct node {
    Vertex w;
    double cst;
    link next;
};
```

Digrafo

`Digraph G`



Estruturas de dados



Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo

- `V` contém o número de vértices
- `A` contém o número de arcos do digrafo
- `adj` é um ponteiro para vetor de listas de adjacência

```
struct digraph {
    int V;
    int A;
    link *adj;
};
```

Estrutura Digraph

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

```
typedef struct digraph *Digraph;
```

NEW

`NEW` recebe um vértice `w`, um custo `cst` e o endereço `next` de um nó e devolve o endereço `x` de um novo nó com `x->w=w`, e `x->cst=cst` e `x->next=next`

```
link NEW (Vertex w, double cst, link next)
{
    link x = malloc(sizeof *x);
    x->w = w;
    x->cst = cst;
    x->next = next;
    return x;
}
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices `0,..,V-1` e nenhum arco

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {
    Vertex v;
    Digraph G = malloc(sizeof *G);
    G->V = V;
    G->A = 0;
    G->adj = malloc(V * sizeof(link));
    for (v = 0; v < V; v++)
        G->adj[v] = NULL;
    return G;
}
```

DIGRAPHinsertA

Insere um arco v-w de custo cst no digrafo G.
Se v == w ou o digrafo já tem arco v-w; não faz nada

```
void
DIGRAPHinsertA(Digraph G, Vertex v, Vertex w,
                    double cst)
{
   link p;
   if (v == w) return;
   for (p = G->adj[v]; p != NULL; p = p->next)
       if (p->w == w) return;
   G->adj[v] = NEW(w, cst, G->adj[v]);
   G->A++;
}
```

DIGRAPHinsertA

O código abaixo transfere a responsabilidade de evitar laços e arcos paralelos ao cliente/usuário

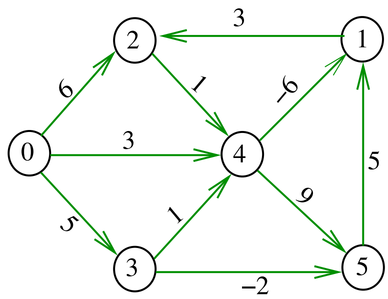
```
void
DIGRAPHinsertA (Digraph G, Vertex v, Vertex w,
                    double cst)
{
   G->adj[v] = NEW(w, cst, G->adj[v]);
   G->A++;
}
```

Caminhos de custo mínimo

S 21.0 e 21.1

Custo de um caminho

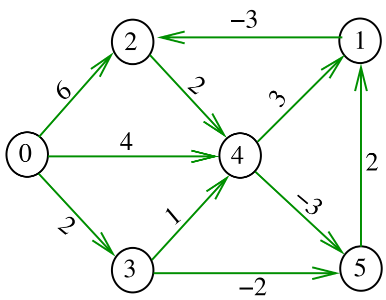
Custo de um caminho é soma dos custos de seus arcos
Custo do caminho 0-2-4-5 é 16.
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-5 é 14.
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-1-2-4-5 é 12.



Caminho mínimo

Um caminho P tem **custo mínimo** se o custo de P é menor ou igual ao custo de todo caminho com a mesma origem e término

O caminho 0-3-4-5-1-2 é mínimo, tem custo -1



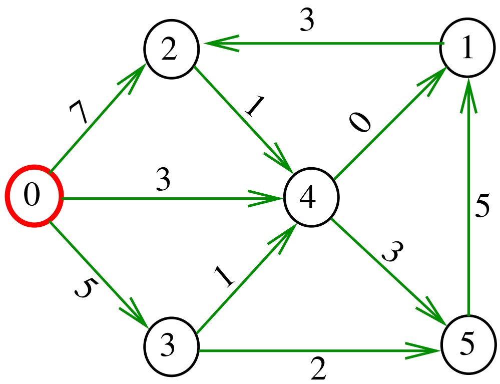
Problema

Problema dos Caminhos Mínimos com Origem Fixa (*Single-source Shortest Paths Problem*):

> *Dado um vértice s de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um caminho mínimo simples de s a t.*

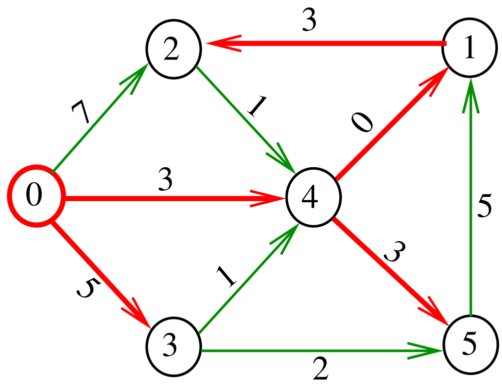
Exemplo

Entra:



Exemplo

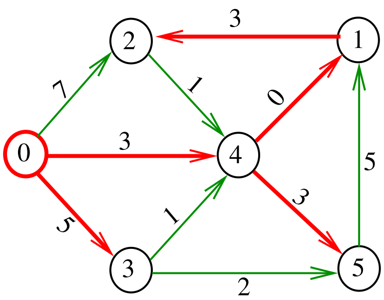
Sai:



Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

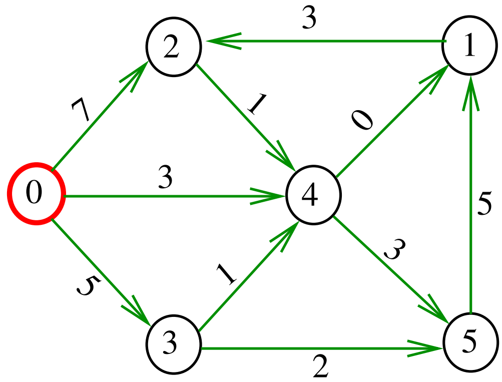
> *o único caminho de s a t na arborescência é um caminho mínimo*



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Entra:



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos **não-negativos** nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Sai: