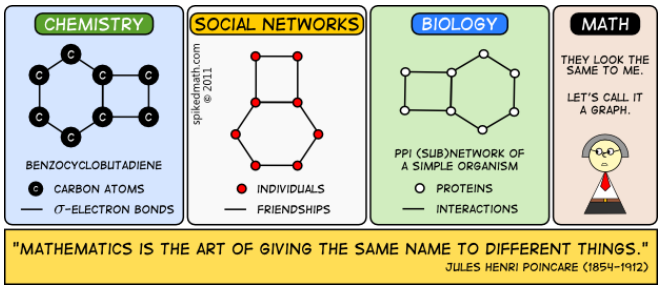
MAC0328 Algoritmos em Grafos

AULA 1

Edição 2011

MAC0328 Algoritmos em Grafos



http://spikedmath.com/250.html

Administração

Página da disciplina: aulas, cadastro, fórum, ...
http://paca.ime.usp.br/

Livro:

- PF = Paulo Feofiloff,
  Algoritmos para Grafos em C via Sedgewick
  www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/
- S = Robert Sedgewick,
  Algorithms in C (part 5: Graph Algorithms)
- CLRS = Cormen-Leiserson-Rivest-Stein,
  Introductions to Algorithms

MAC0328

MAC0328 Algoritmos em grafos é:

- uma disciplina introdutória em projeto e análise de algoritmos sobre grafos
- um laboratório de algoritmos sobre grafos

MAC0328

MAC0328 combina técnicas de

- programação
- estruturas de dados
- análise de algoritmos
- teoria dos grafos

para resolver problemas sobre grafos.

Pré-requisitos

O pré-requisito oficial de MAC0328 é

- MAC0122 Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos.

No entanto, é recomendável que já tenham cursado

- MAC0211 Laboratório de programação; e
- MAC0323 Estruturas de dados

Costuma ser conveniente cursar MAC0328 simultaneamente com

- MAC0338 Análise de algoritmos.

Principais tópicos

- grafos dirigidos
- estruturas de dados para grafos
- construção de grafos aleatórios
- florestas e árvores
- caminhos e ciclos
- **busca em largura**
- caminhos mínimos
- grafos bipartidos
- **busca em profundidade**
- grafos dirigidos acíclicos
- ordenação topológica
- pontes e ciclos
- grafos conexos e componentes
- grafos biconexos
- árvores geradoras mínimas
- fluxo em redes

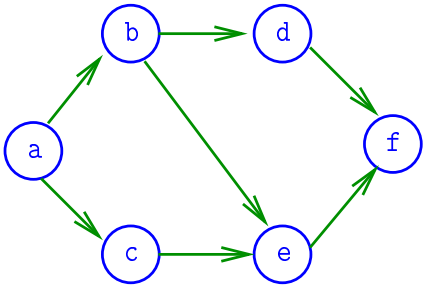
Digrafos

S 17.0, 17.1

Digrafos

Um **digrafo** (*directed graph*) consiste de um conjunto de vértices (bolas) e um conjunto de arcos (flechas)

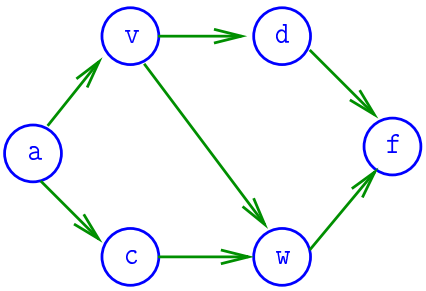
Exemplo: representação de um grafo



Arcos

Um **arco** é um par ordenado de vértices

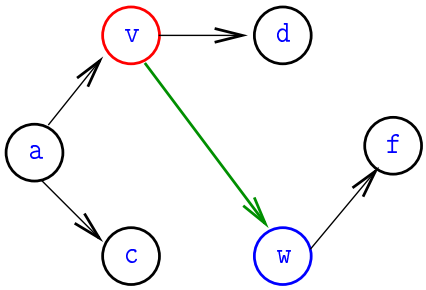
Exemplo: `v` e `w` são vértices e `v-w` é um arco



Ponta inicial e final

Para cada arco `v-w`, o vértice `v` é a **ponta inicial** e `w` é a **ponta final**

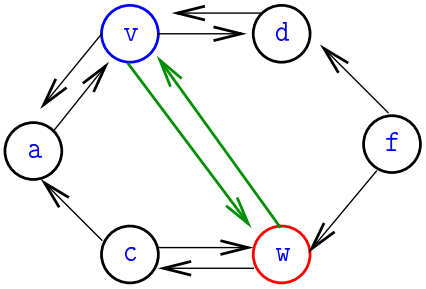
Exemplo: `v` é ponta inicial e `w` é ponta final de `v-w`



Arcos anti-paralelos

Dois arcos são **anti-paralelos** se a ponta inicial de um é ponta final do outro

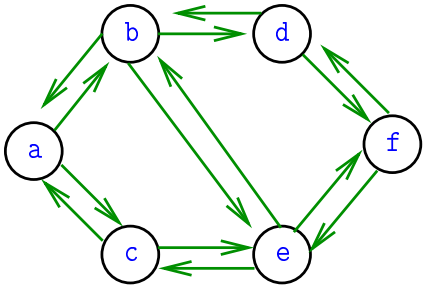
Exemplo: v-w e w-v são anti-paralelos



Digrafos simétricos

Um digrafo é **simétrico** se cada um de seus arcos é anti-paralelo a outro

Exemplo: digrafo simétrico

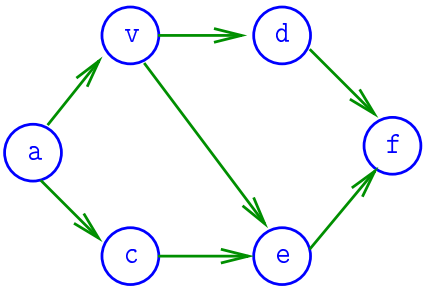


Graus de entrada e saída

grau de entrada de v= no. arcos com ponta final v

grau de saída de v = no. arcos com ponta inicial v

Exemplo: v tem grau de entrada 1 e de saída 2



Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com V vértices?

Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com V vértices?

A resposta é $V \times (V - 1) = \Theta(V^2)$

digrafo **completo** = todo par ordenado de vértices distintos é arco

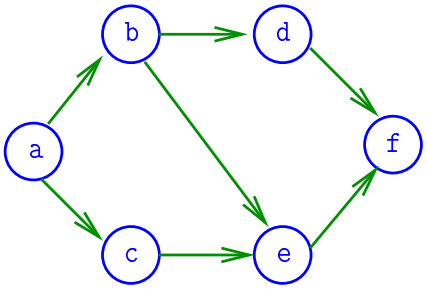
digrafo **denso** = tem "muitos" muitos arcos

digrafo **esparso** = tem "poucos" arcos

Especificação

Digrafos podem ser especificados através de sua lista de arcos

Exemplo:




```
d-f
b-d
a-c
b-e
e-f
a-b
```

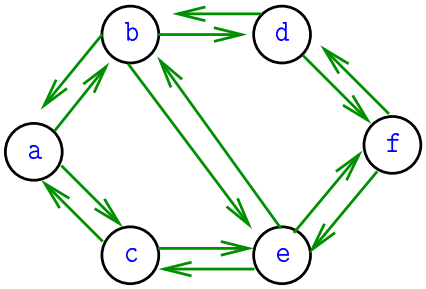
Grafos

S 17.0, 17.1

Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

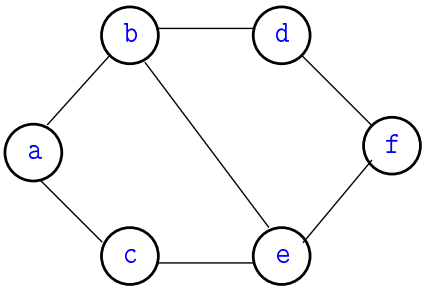
Exemplo: um grafo



Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

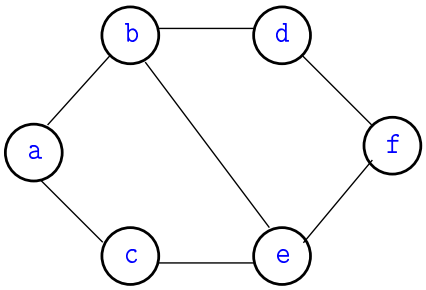
Exemplo: representação usual



Arestas

Uma **aresta** é um par de arcos anti-paralelos.

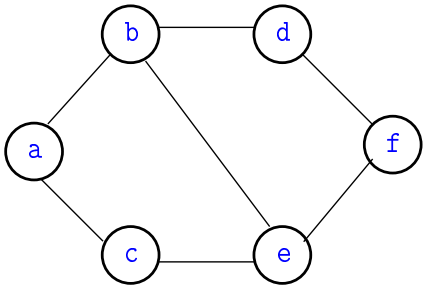
Exemplo: `b-a` e `a-b` são a **mesma** aresta



Especificação

Grafos podem ser especificados através de sua lista de arestas

Exemplo:



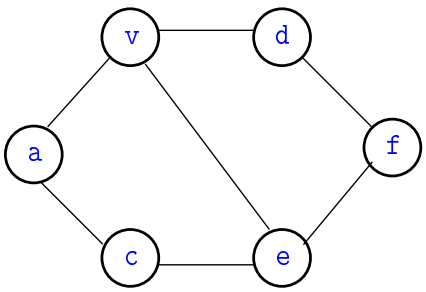

```
f-d
b-d
c-a
e-b
e-f
a-b
```

Graus de vértices

Em um grafo

grau de `v` = número de arestas com ponta em `v`

Exemplo: `v` tem grau 3



Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com V vértices?

Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com V vértices?

A resposta é $V \times (V-1)/2 = \Theta(V^2)$

grafo **completo** = todo par **não**-ordenado de vértices distintos é aresta

Estruturas de dados

S 17.2

Vértices

Vértices são representados por objetos do tipo `Vertex`.

Os vértices de um digrafo são `0,1,...,V-1`.

```
#define Vertex int
```

Arcos

Um objeto do tipo `Arc` representa um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
} Arc;
```

ARC

A função `ARC` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

ARC

A função ARC recebe dois vértices v e w e devolve um arco com ponta inicial v e ponta final w.

```
   Arc ARC (Vertex v, Vertex w) {
1      Arc e;
2      e.v= v;
3      e.w= w;
4      return e;
   }
```

Arestas

Um objeto do tipo Edge representa uma aresta com pontas v e w.

Arestas

Um objeto do tipo Edge representa uma aresta com pontas v e w.

```
#define Edge Arc
```

Arestas

A função EDGE recebe dois vértices v e w e devolve uma aresta com pontas v e w.

Arestas

A função EDGE recebe dois vértices v e w e devolve uma aresta com pontas v e w.

```
#define EDGE ARC
```

Grafos no computador

Usaremos duas representações clássicas:

- matriz de adjacência (**agora**)
- vetor de listas de adjacência (**próximas aulas**)

Há várias outras maneiras, como, por exemplo

- matriz de incidência

que é apropriada para MAC0315 Prog. Linear.

Matrizes de adjacência

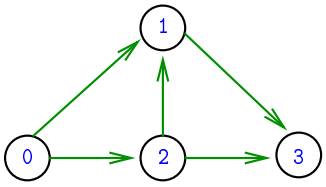
S 17.3

Matriz de adjacência de digrafos

Matriz de adjacência de um digrafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v-w` é um arco
`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:



	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	0	0

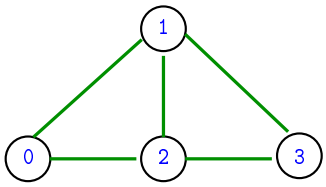
Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

Matriz de adjacência de grafos

Matriz de adjacência de um grafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v-w` é um aresta
`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:



	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	1	0	1	1
2	1	1	0	1
3	0	1	1	0

Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo
- `V` contém o número de vértices
- `A` contém o número de arcos do digrafo
- `adj` é um ponteiro para a matriz de adjacência

Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo
- `V` contém o número de vértices
- `A` contém o número de arcos do digrafo
- `adj` é um ponteiro para a matriz de adjacência

```
struct digraph {
    int V;
    int A;
    int **adj;
};
```

Estrutura Digraph

Um objeto do tipo `Digraph` contém o endereço de um `digraph`

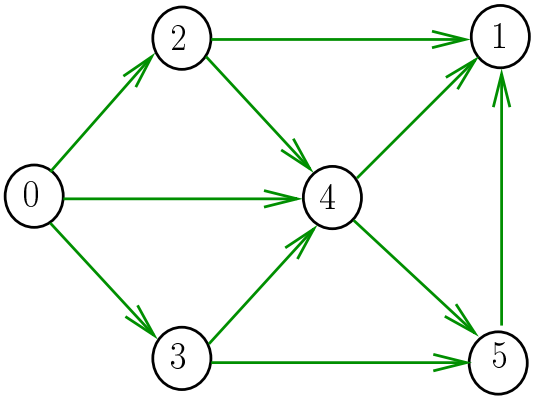
Estrutura Digraph

Um objeto do tipo Digraph contém o endereço de um digraph

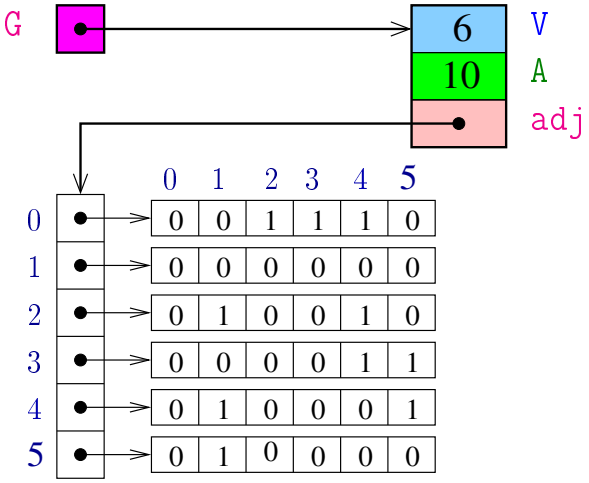
```
typedef struct digraph *Digraph;
```

Digrafo

Digraph G



Estruturas de dados



Estruturas graph e Graph

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

Estruturas graph e Graph

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo G é

Estruturas graph e Graph

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo G é

(G->A)/2

Funções básicas

S 17.3

MATRIXint

Aloca uma matriz com linhas 0..r-1 e colunas 0..c-1, cada elemento da matriz recebe valor val

```
int **MATRIXint (int r, int c, int val) {
```

MATRIXint

Aloca uma matriz com linhas 0..r-1 e colunas 0..c-1, cada elemento da matriz recebe valor val

```
    int **MATRIXint (int r, int c, int val) {
0       Vertex i, j;
1       int **m = malloc(r * sizeof(int *));
2       for (i = 0; i < r; i++)
3           m[i] = malloc(c * sizeof(int));
4       for (i = 0; i < r; i++)
5           for (j = 0; j < c; j++)
6               m[i][j] = val;
7       return m;
    }
```

Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha	
1	$= 1$	$= \Theta(1)$
2	$= r + 1$	$= \Theta(r)$
3	$= r$	$= \Theta(r)$
4	$= r + 1$	$= \Theta(r)$
5	$= r \times (c + 1)$	$= \Theta(r\,c)$
6	$= r \times c$	$= \Theta(r\,c)$
total	$\Theta(1) + 3\,\Theta(r) + 2\,\Theta(r\,c)$ $= \Theta(r\,c)$	

Conclusão

Supondo que o consumo de tempo da função malloc é constante

O consumo de tempo da função MATRIXint é $\Theta(r\,c)$.

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices 0,...,V-1 e nenhum arco.

```
Digraph DIGRAPHinit (int V) {
```

DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices 0,..,V-1 e nenhum arco.

```
   Digraph DIGRAPHinit (int V) {
0      Digraph G = malloc(sizeof *G);
1      G->V = V;
2      G->A = 0;
3      G->adj = MATRIXint(V,V,0);
4      return G;
   }
```