

# AULA 23

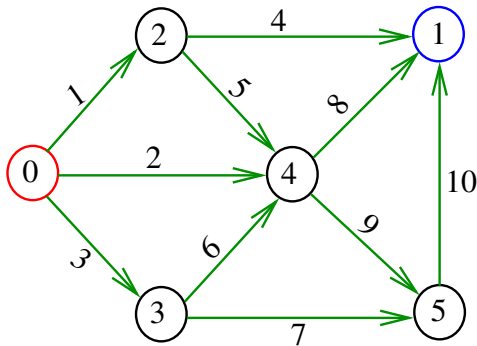
# Fluxos em redes

S 22.1

## Fluxos em arcos

Seja  $f$  uma função dos arcos de um digrafio  $G$  em  $\mathbb{Z}_{\geq}$ .  
Diremos o valor de  $f$  num arco é o **fluxo no arco**.

**Exemplo:** o fluxo no arco 2-4 é 5

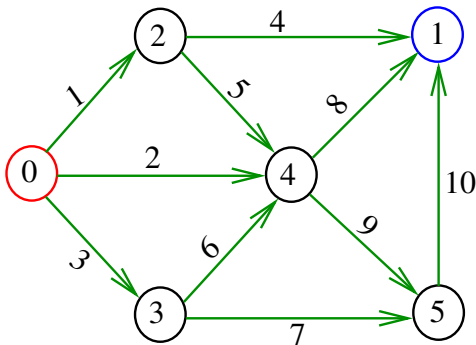


## Influxos e efluxos

O **influxo** em  $v$  ( $=$  *inflow into  $v$* ) é a soma dos fluxos nos arcos que entram em  $v$ .

O **efluxo** de  $v$  ( $=$  *outflow from  $v$* ) é a soma dos fluxos nos arcos que saem de  $v$ .

**Exemplo:** em 4 o influxo é 13 e o efluxo é 17



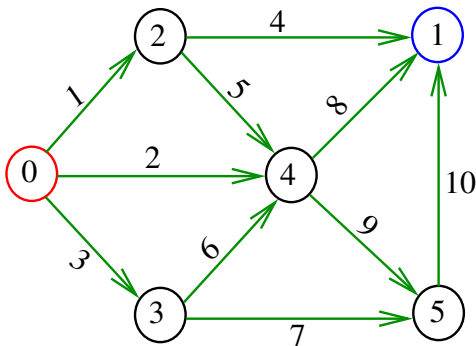
# Saldos

O **saldo** em  $v$  é a diferença

$$ef(v) - inf(v)$$

entre o efluxo de  $v$  e o influxo em  $v$ .

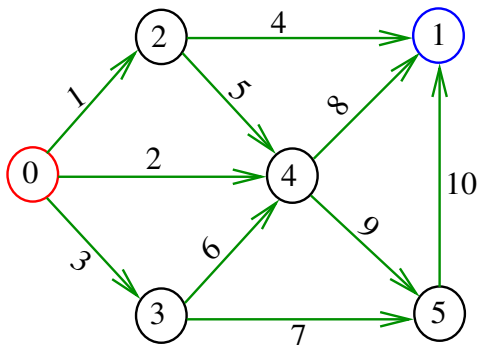
**Exemplo:** o saldo do vértice 4 é  $17-13=4$



# Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial**  $s$  e **vértice final**  $t$ , um **fluxo** (= *flow*) é uma função  $f$  que atribui valores em  $\mathbb{Z}_{\geq}$  aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de  $s$  e  $t$  é **nulo** e em  $s$  é  $\geq 0$ .

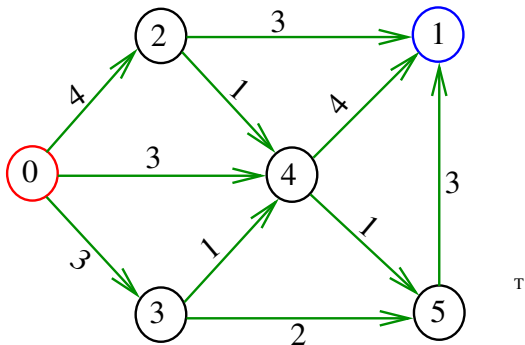
**Exemplo:** não é um fluxo



# Fluxos

Num digrafo com **vértice inicial**  $s$  e **vértice final**  $t$ , um **fluxo** (= *flow*) é uma função  $f$  que atribui valores em  $\mathbb{Z}_{\geq}$  aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de  $s$  e  $t$  é **nulo** e em  $s$  é  $\geq 0$ .

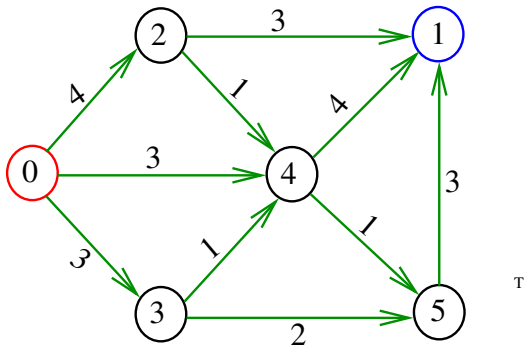
**Exemplo:** é um fluxo onde  $s=0$  e  $t=1$



# Fontes e sorvedouros

Chamamos **s** de **fonte** e **t** de **sorvedouro**.

Exemplo: fluxo com fonte **0** e sorvedouro **1**

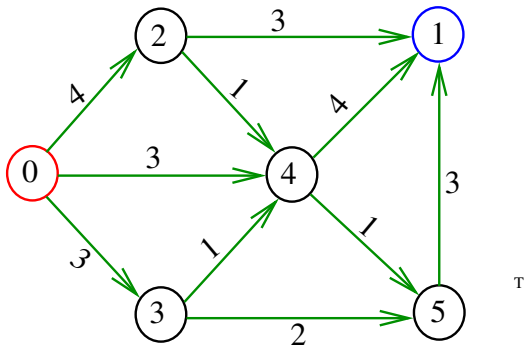




# Propriedade de Fluxos

Para qualquer fluxo num digrafo com fonte **s** e sorvedouro **t**, o saldo em **t** é igual ao saldo em **s** com sinal trocado.

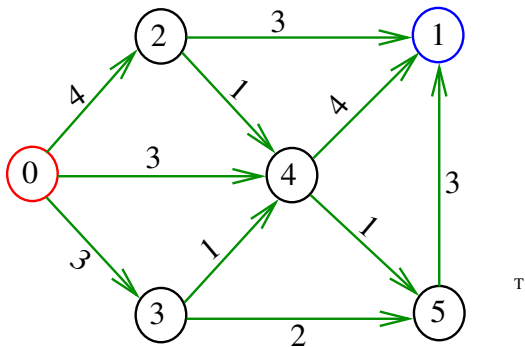
Exemplo: saldo em **0** = 7 = -7 = saldo em **1**



## Intensidade de fluxos

A **intensidade** de um fluxo  $f$  é o saldo de  $f$  em  $s$ .  
Em geral (mas nem sempre) o influxo em  $s$  é nulo e o efluxo de  $t$  é nulo.

Exemplo: fluxo de intensidade 7



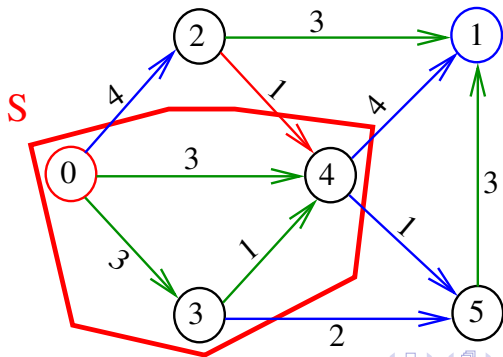
## Saldo de fluxo num conjunto de vértices

Dado um conjunto  $S$  que contém  $s$  mas não contém  $t$ , o saldo em  $S$  é a diferença

$$ef(S) - inf(S),$$

entre o efluxo de  $S$  e o influxo em  $S$

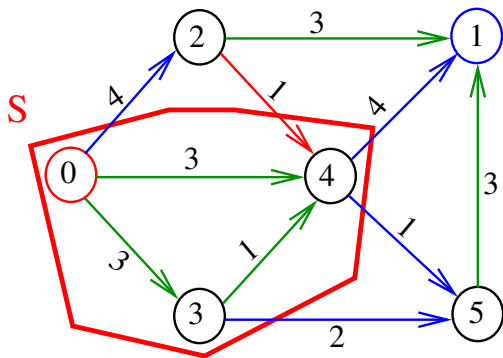
Exemplo: o saldo de  $S$  é  $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



## Propriedade do Saldo

Para qualquer fluxo num digrafo com vértice inicial  $s$  e vértice final  $t$  e para qualquer conjunto  $S$  que contém  $s$  mas não contém  $t$ , o saldo em  $S$  é igual ao saldo em  $s$ .

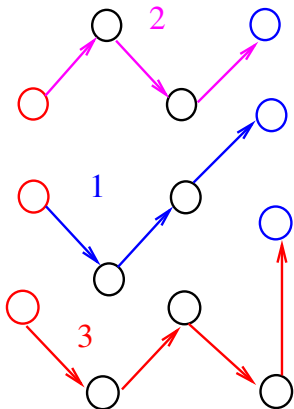
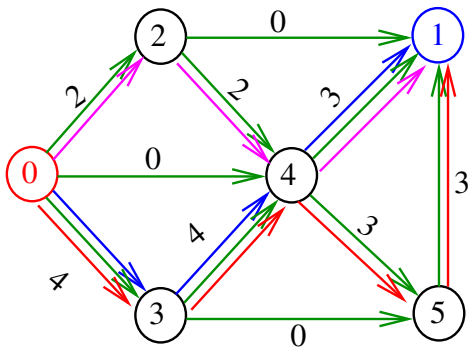
Exemplo: o saldo de  $S$  é  $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



## Fluxos versus coleção de caminhos

Fluxos podem ser representados por caminhos de **s** a **t**. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

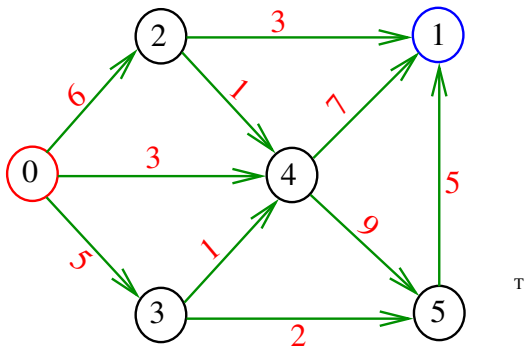
Exemplo:



## Redes capacitadas

Uma **rede capacitada** é um digrafo com **vértice inicial** e **vértice final** em que a cada um arcos está associado um número em  $\mathbb{Z}_{\geq}$  que chamaremos **capacidade do arco**.

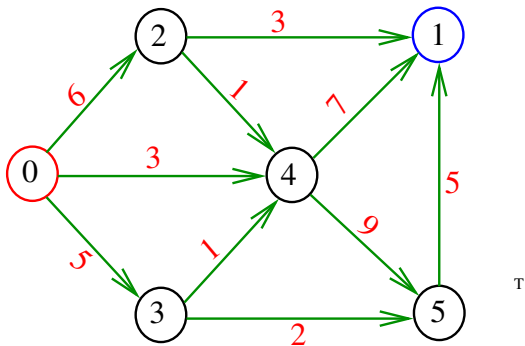
Exemplo:



# Problema do fluxo máximo

**Problema.** Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

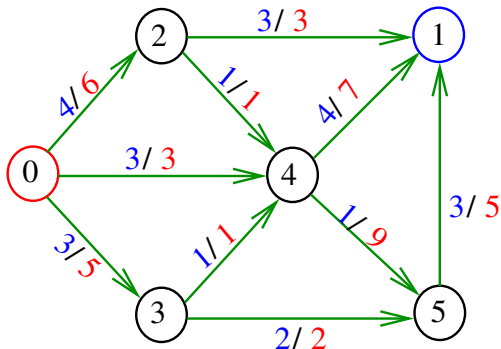
**Exemplo:** rede capacitada



# Problema do fluxo máximo

**Problema.** Dada uma rede capacitada, encontrar um **fluxo de intensidade máxima** dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

**Exemplo:** fluxo que respeita as capacidades





## Fluxo máximo (problema primal)

Podemos supor que a rede possui um arco  $b$  de  $t$  a  $s$  de capacidade  $+\infty$ .

O problema do fluxo máximo é **equivalente** ao seguinte programa linear, que chamamos de **primal**: encontrar um vetor  $x$  indexado por  $A$  que

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x(b) \\ \text{sob as restrições} & \text{ef}(v) - \text{inf}(v) = 0 \quad \forall v, \\ & x(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A, \\ & x(a) \geq 0 \quad \forall a \in A. \end{array}$$