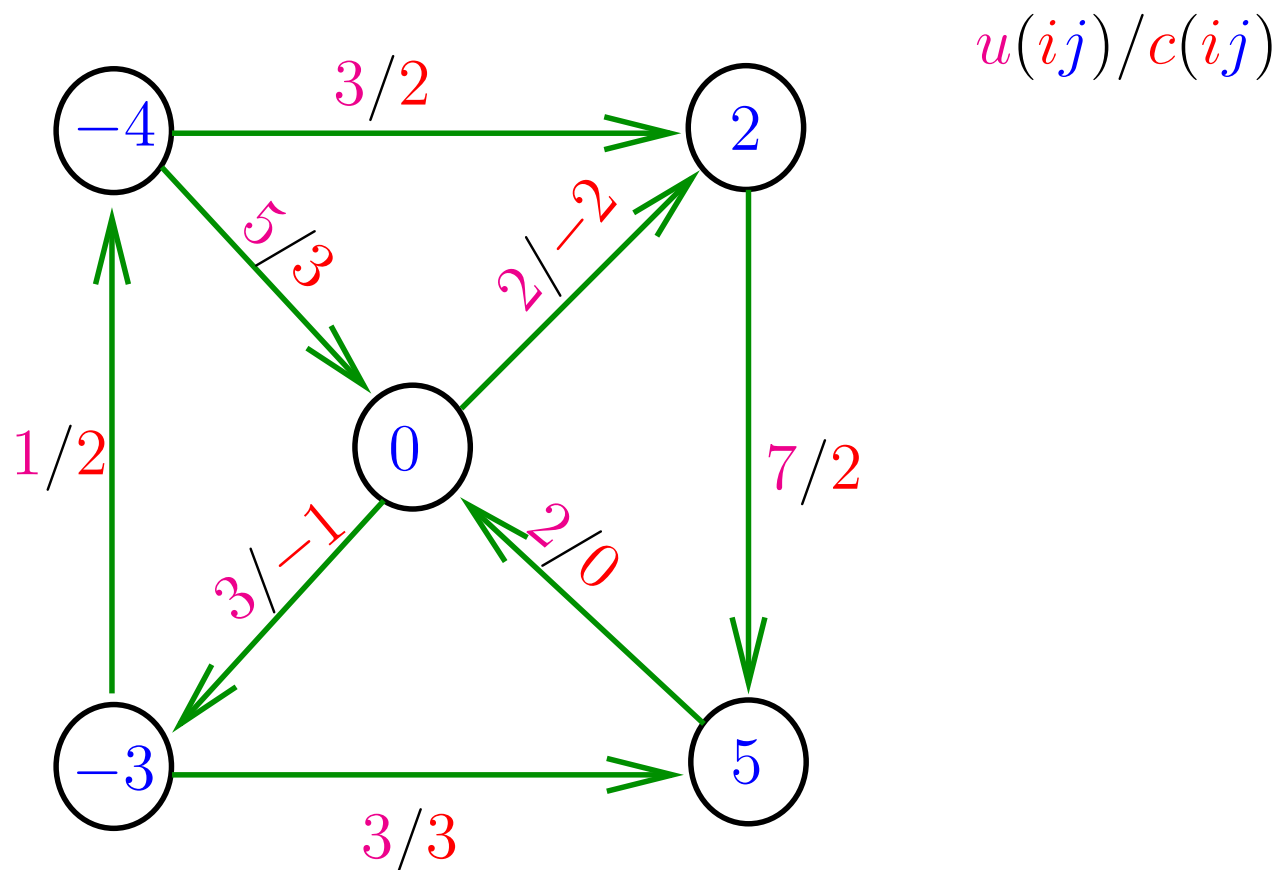


Melhores momentos

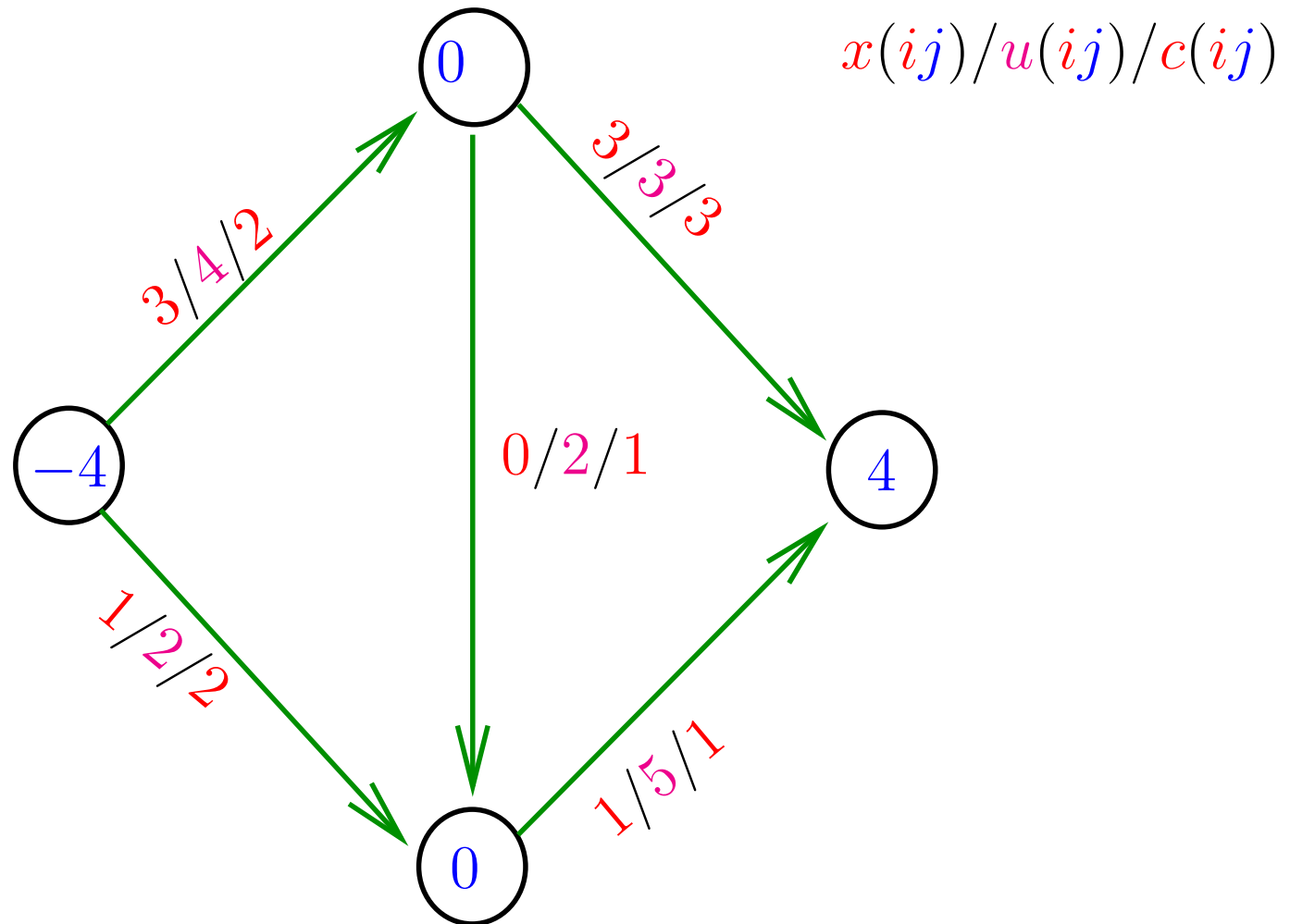
AULA PASSADA

Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede (N, A, u, b, c) com função-capacidade u , função-demanda b e função-custo c , encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça b e respeite u .

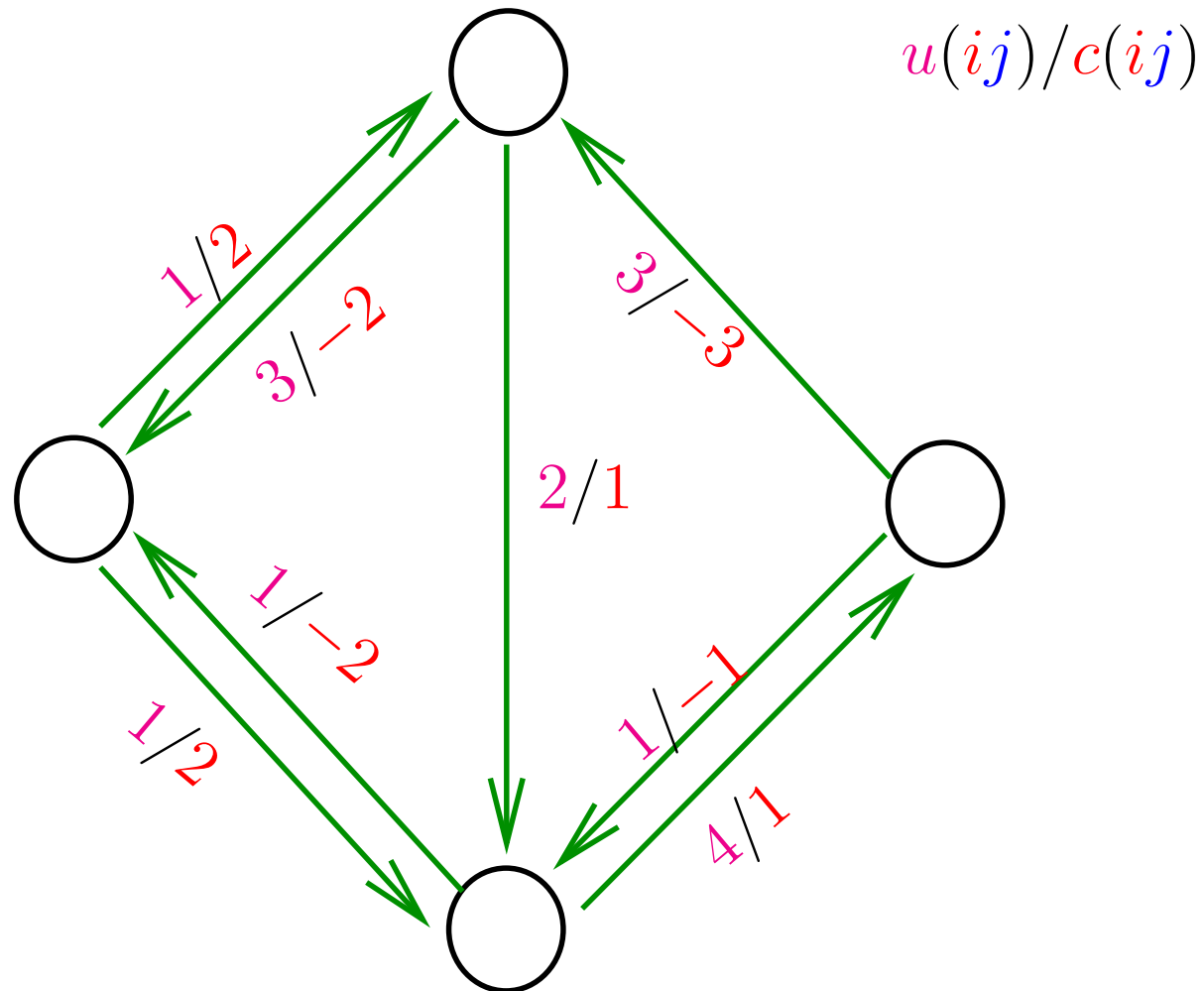


Klein: é fluxo de custo mínimo?

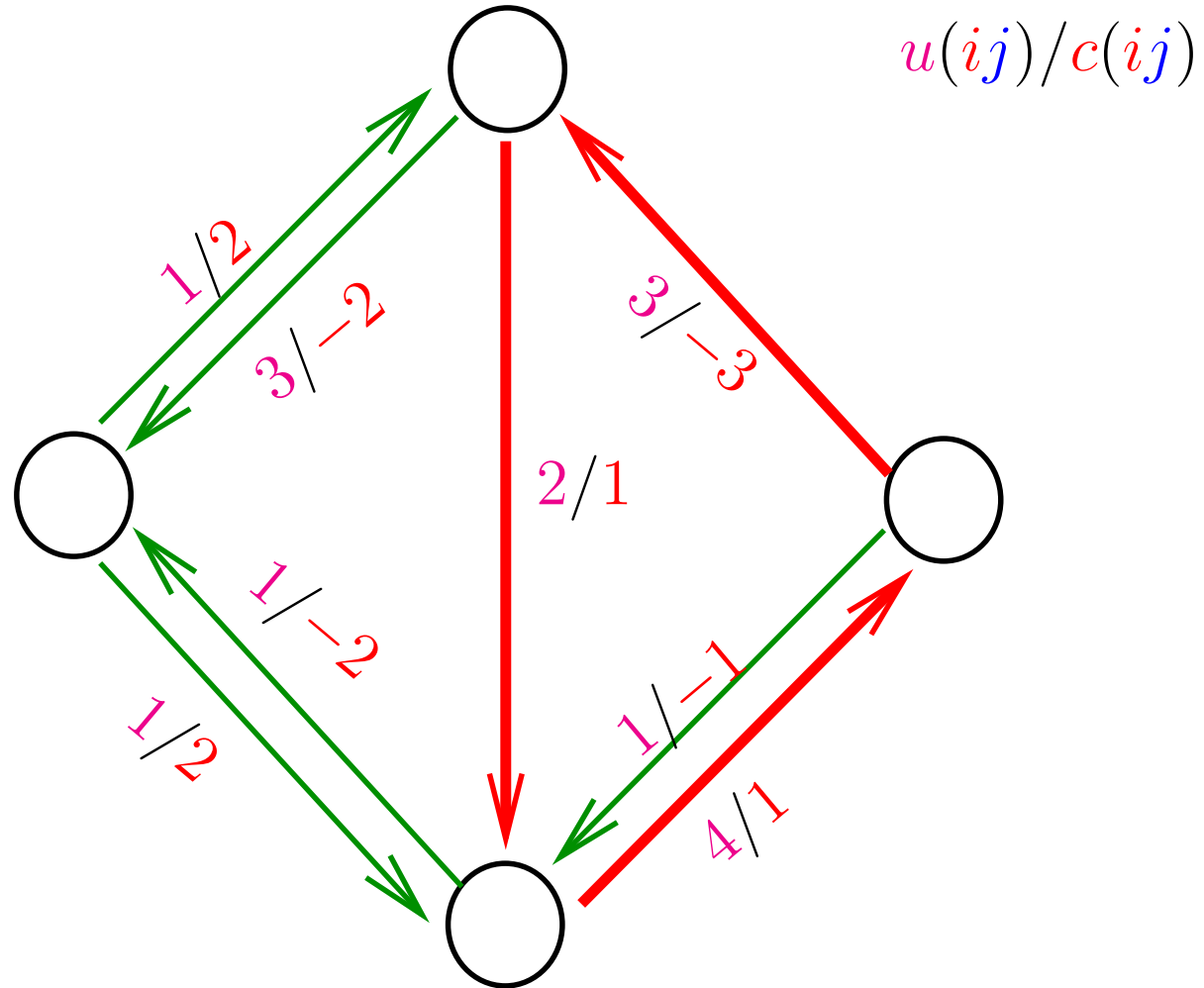


$$\text{Custo} = 3 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 18$$

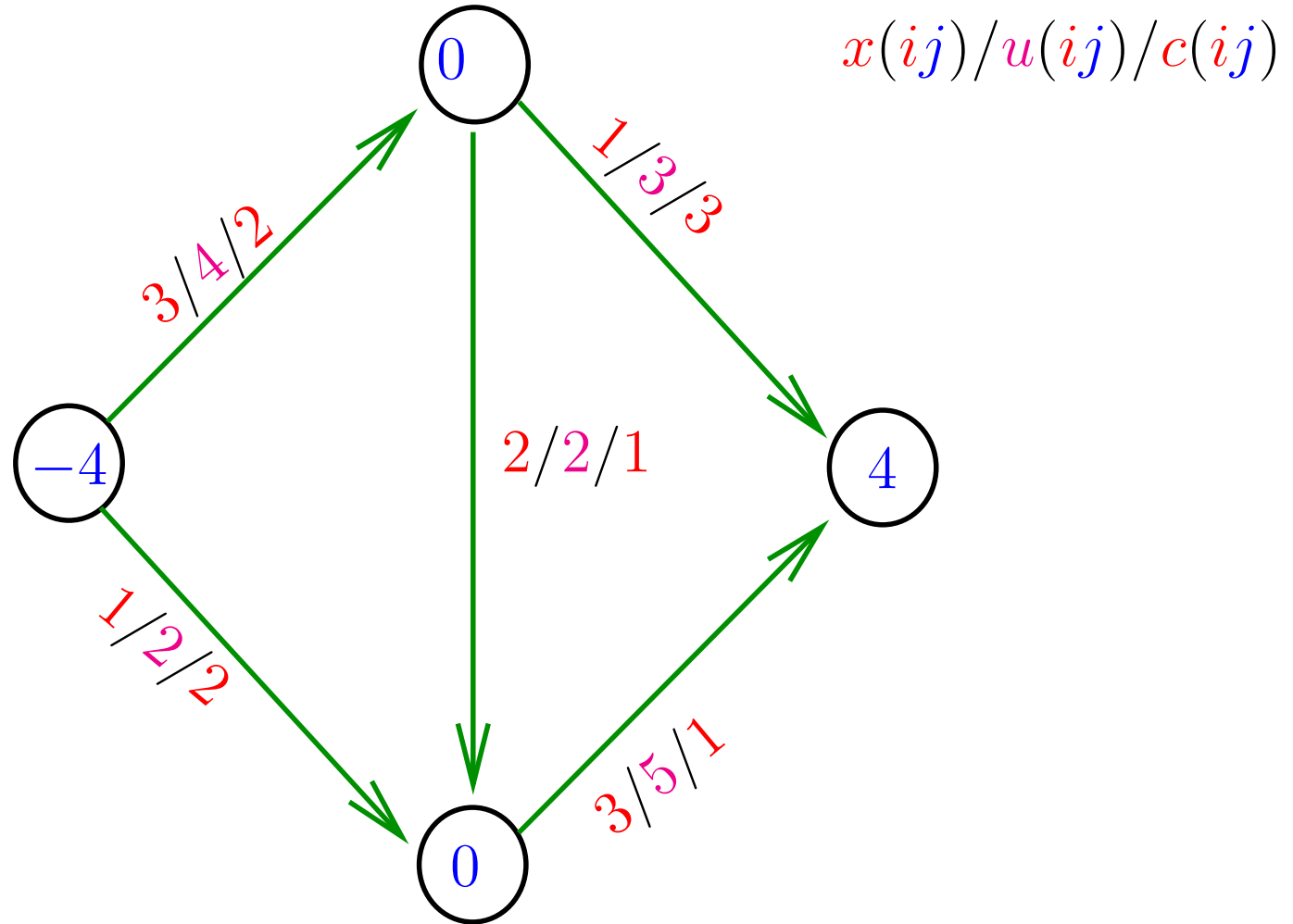
Klein: rede residual



Klein: ciclo negativo

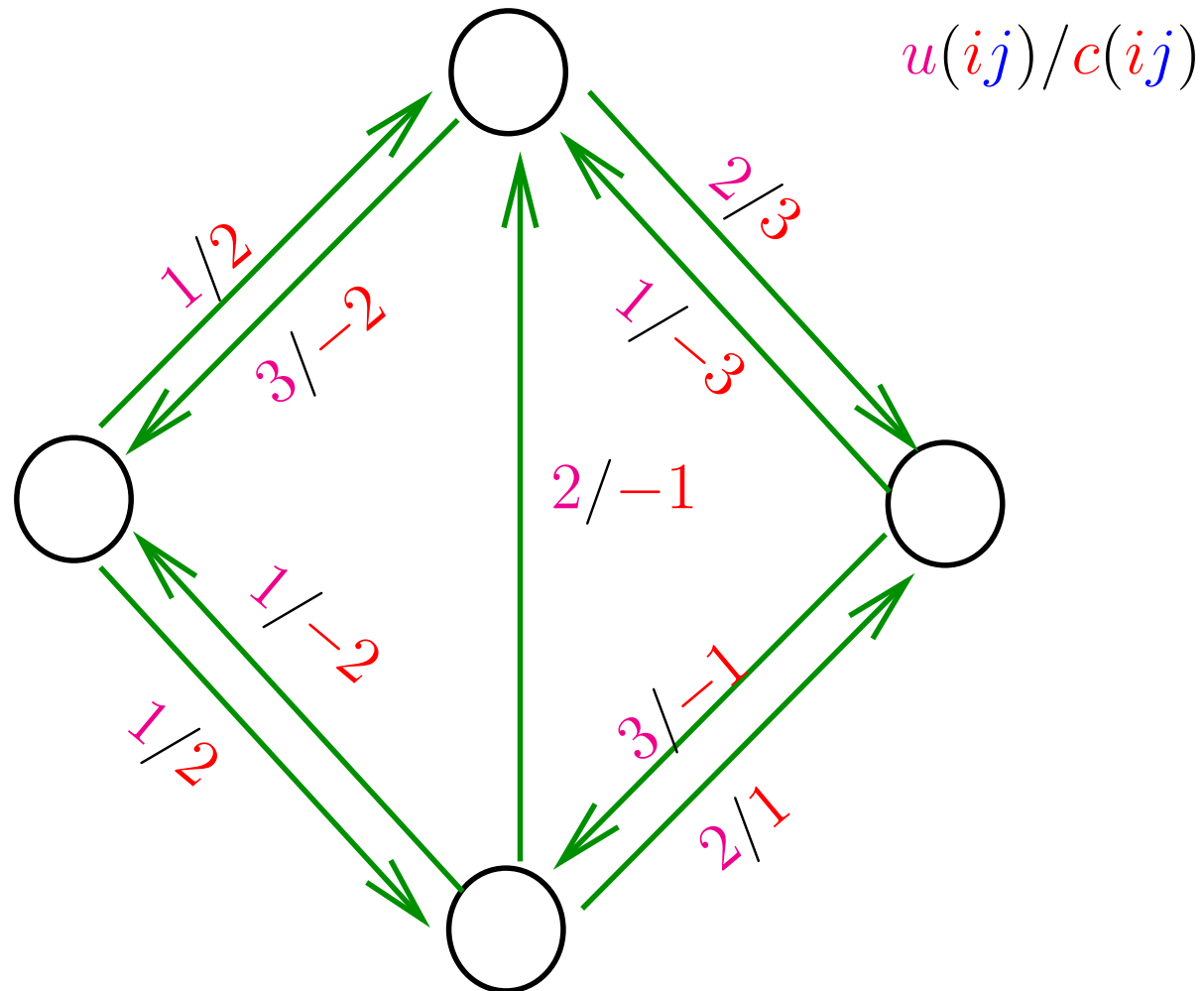


Klein: é fluxo de custo mínimo?

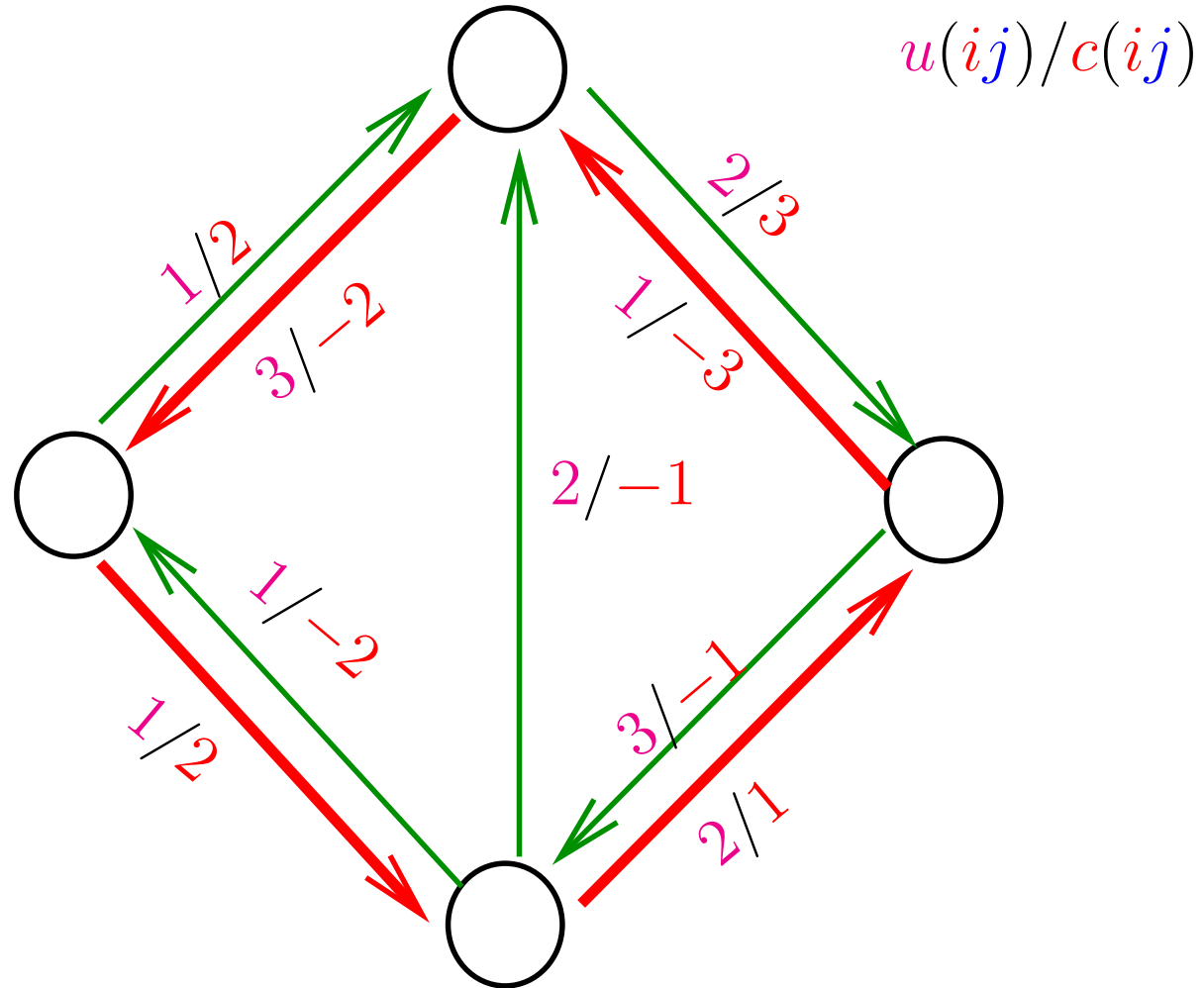


$$\text{Custo} = 3 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 16$$

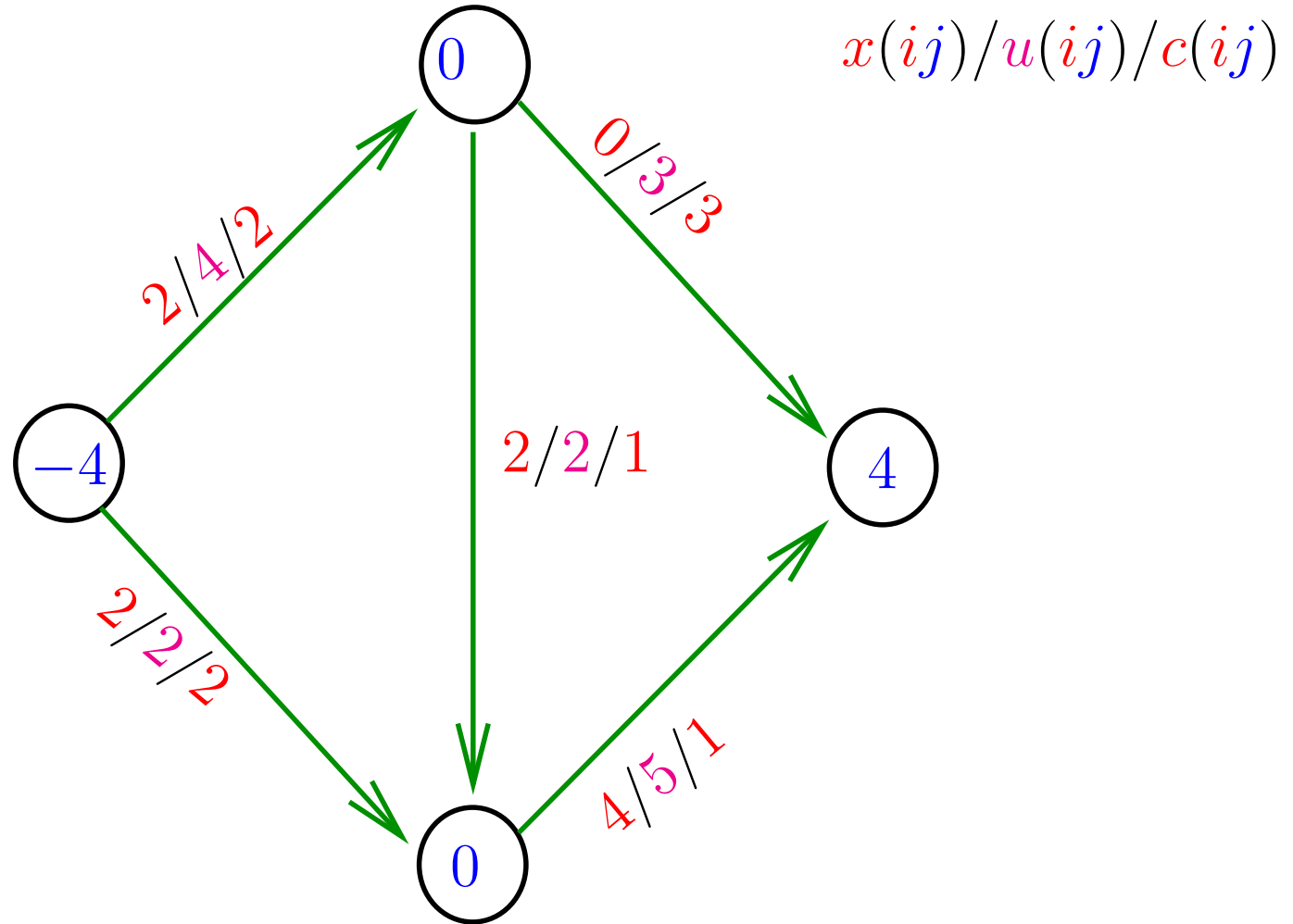
Klein: rede residual



Klein: ciclo negativo

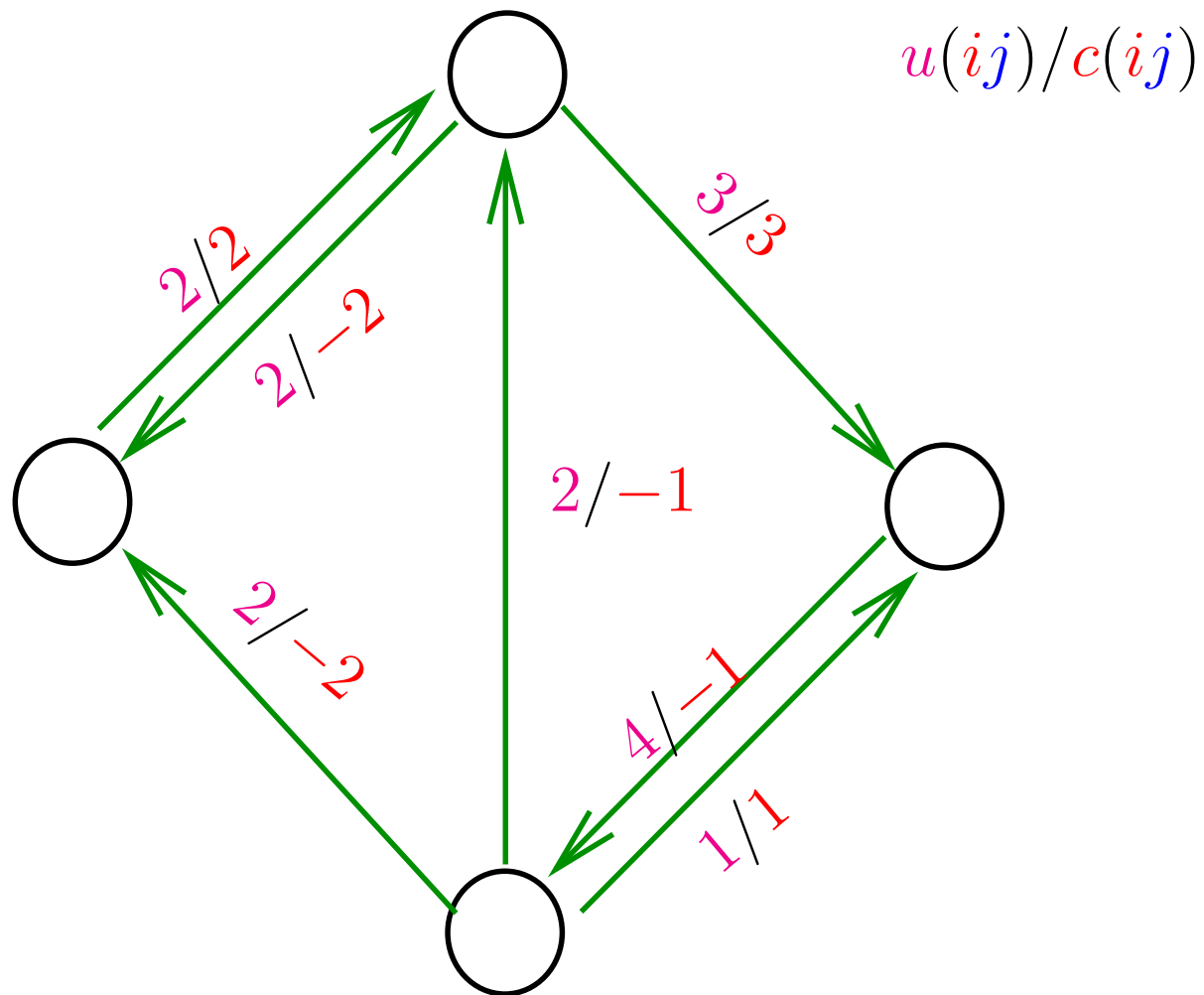


Klein: é fluxo de custo mínimo?

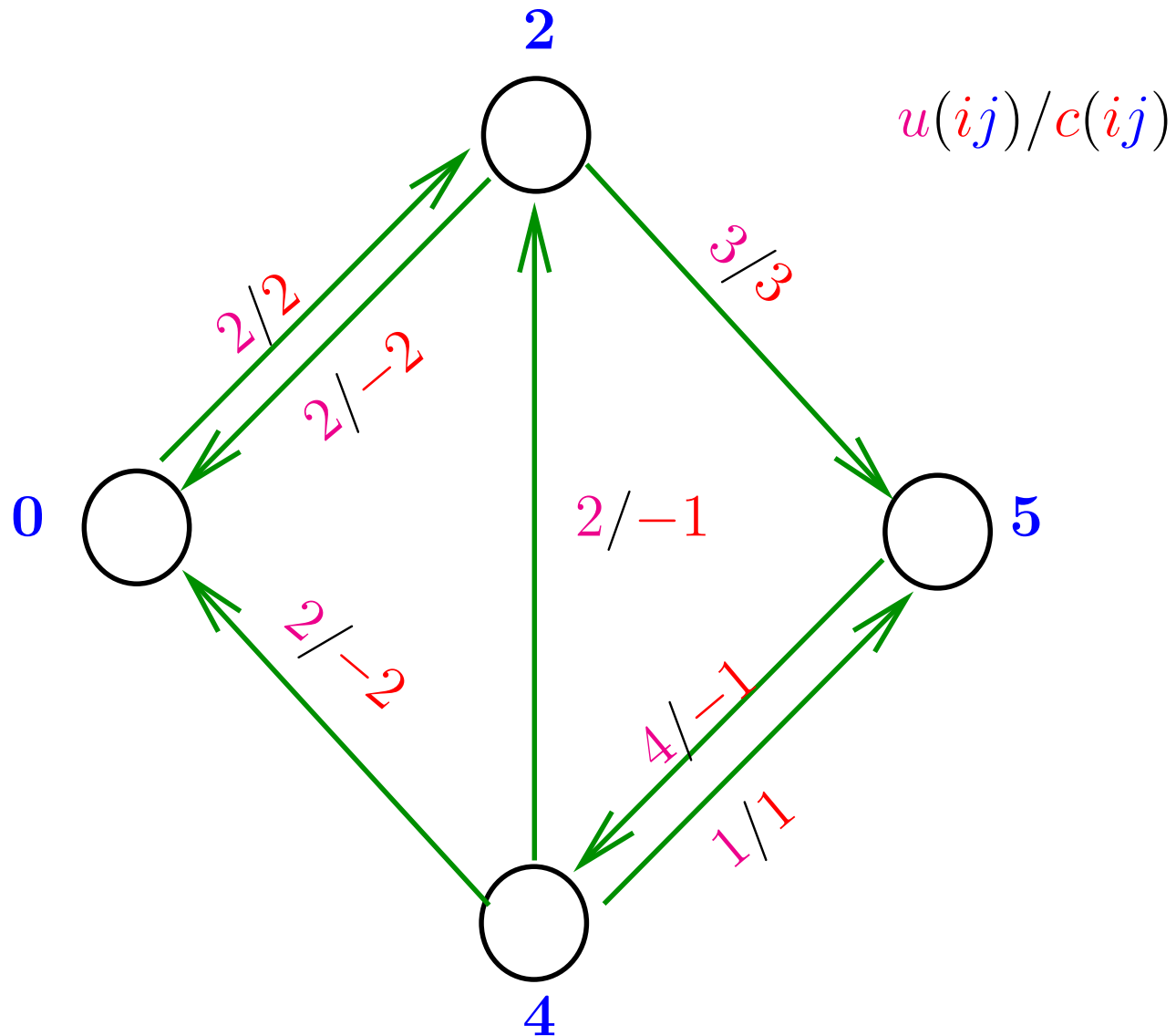


$$\text{Custo} = 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$$

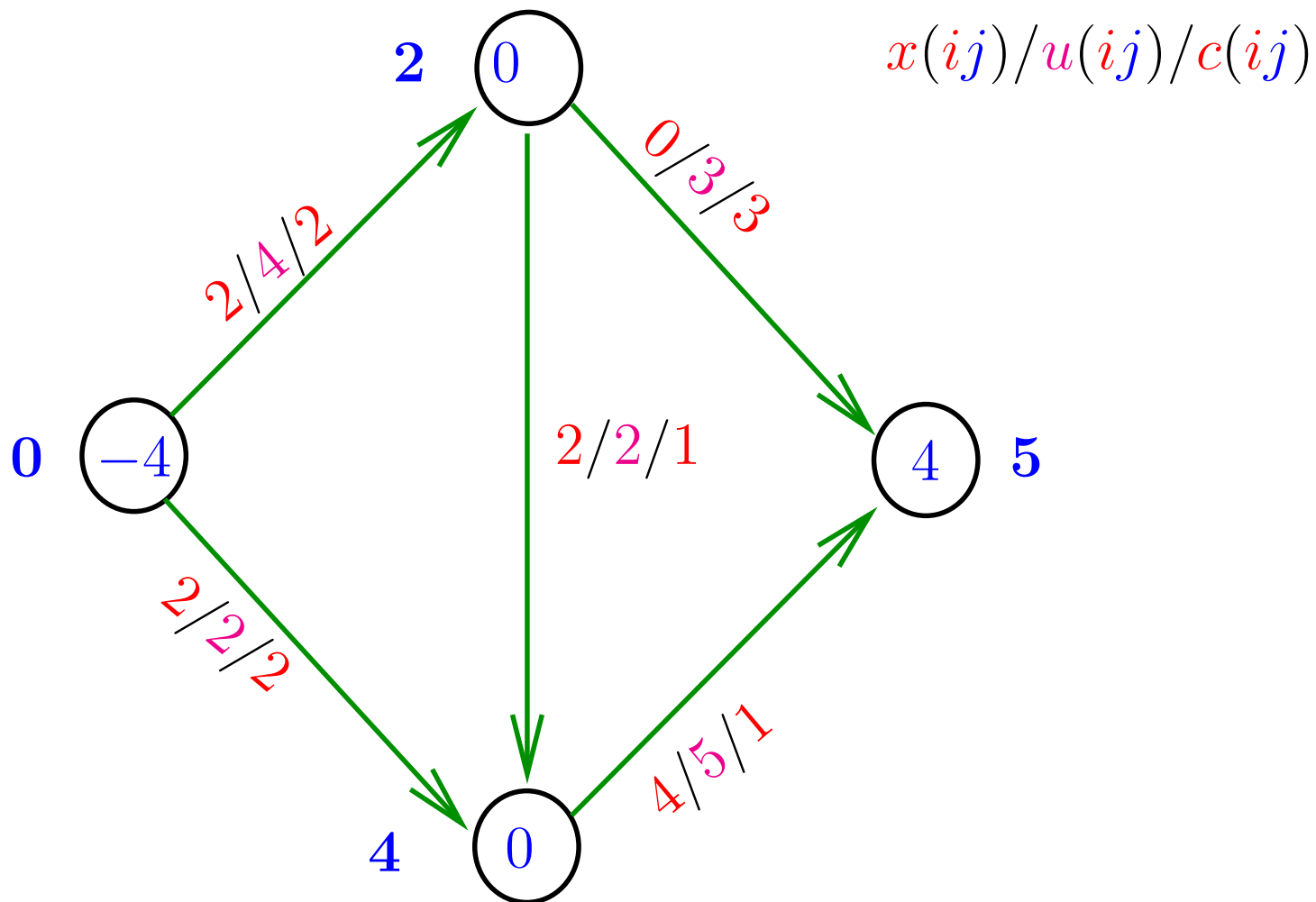
Klien: rede residual



Klein: potenciais



Klein: rede e potenciais



$$\text{Custo} = 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$$

Custo mínimo e ciclo negativo

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- x é um **fluxo viável de custo mínimo**;
- existe um **ciclo de custo negativo** na rede residual.

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- existe uma “certa” **função potencial y** na rede residual;
- existe um **ciclo de custo negativo** na rede residual.

Lema da dualidade

Se x é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c + w)$ -potencial y .

Chamaremos tal par (y, w) de **solução dual-viável**.

Conseqüência. Se x é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c + w)$ -potencial y então x é um fluxo ótimo.

Demonstração

$$\begin{aligned}yb &= \sum_i y(i)b(i) \\&= \sum_i y(i)(x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})) \\&= \sum_i y(i)x(\bar{i}, i) - \sum_i y(i)x(i, \bar{i}) \\&= \sum_{ij} y(j)x(ij) - \sum_{ij} y(i)x(ij) \\&= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\&\leq \sum_{ij} (c(ij) + w(ij))x(ij) \\&= (c + w)x \leq cx + wu .\end{aligned}$$

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij ,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$

$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) .$$

Fato. Se x é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial y então x é ótimo.

Folgas complementares (2)

Seja x um fluxo.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij ,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) .$$

Fato. Se x é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial y então x é ótimo.

Fluxo viável de custo mínimo

Problema do fluxo viável de custo mínimo:

Dados

- uma matriz de incidências M de um grafo (N, A) ,
- uma função-demanda $b (N \rightarrow \mathbb{Z})$
- uma função-custo $c (A \rightarrow \mathbb{Z})$ e
- uma função-capacidade $u (A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq})$

encontrar um vetor x indexado por A que

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & cx \\ \text{sob as restrições} & Mx = b \\ & x(ij) \leq u(ij) \quad \text{para cada } ij \text{ em } A \\ & x(ij) \geq 0 \quad \text{para cada } ij \text{ em } A. \end{array}$$

Problema dual

O correspondente problema **dual** é: encontrar vetores y indexado por N e w indexado por A que

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && yb - wu \\ \text{sob as restrições} &&& y(j) - y(i) + w(ij) \geq c(ij) \quad \text{para } ij \in A, \\ &&& w(ij) \geq 0 \quad \text{para } ij \in A. \end{aligned}$$

Algoritmos

- **KLEIN**: mantém um **fluxo viável** e em cada iteração procura um **ciclo negativo**.
- **JEWHEEL**: mantém um **fluxo que respeita u** e tem **custo mínimo** (dentre as fluxos que respeita u e satisfazem e) e em cada iteração procura um **caminho de incremento de custo mínimo**.
- **COST-SCALING**: mantém um fluxo viável e uma função potencial que têm folgas ϵ -complementares. Em cada iteração resolve um problema de fluxo usando o algoritmo **PREFLOW-PUSH $_{\epsilon}$** .
- **MIN-MEAN-KLEIN**: mantém um **fluxo viável** e em cada iteração procura um **ciclo (negativo) de custo médio mínimo**.

Consumos de tempo

- **KLEIN**: mantém um **fluxo que respeita u e satisfaz b** e em cada iteração procura **ciclos negativos**.

Algoritmo	consumo de tempo
KLEIN	$O(nm^2UC)$
JEWEEEL	$O(n^3B)$
COST-SCALING	$O(n^2m \lg(nC))$
MIN-MEAN-KLEIN	$O(n^2m^3 \lg n)$

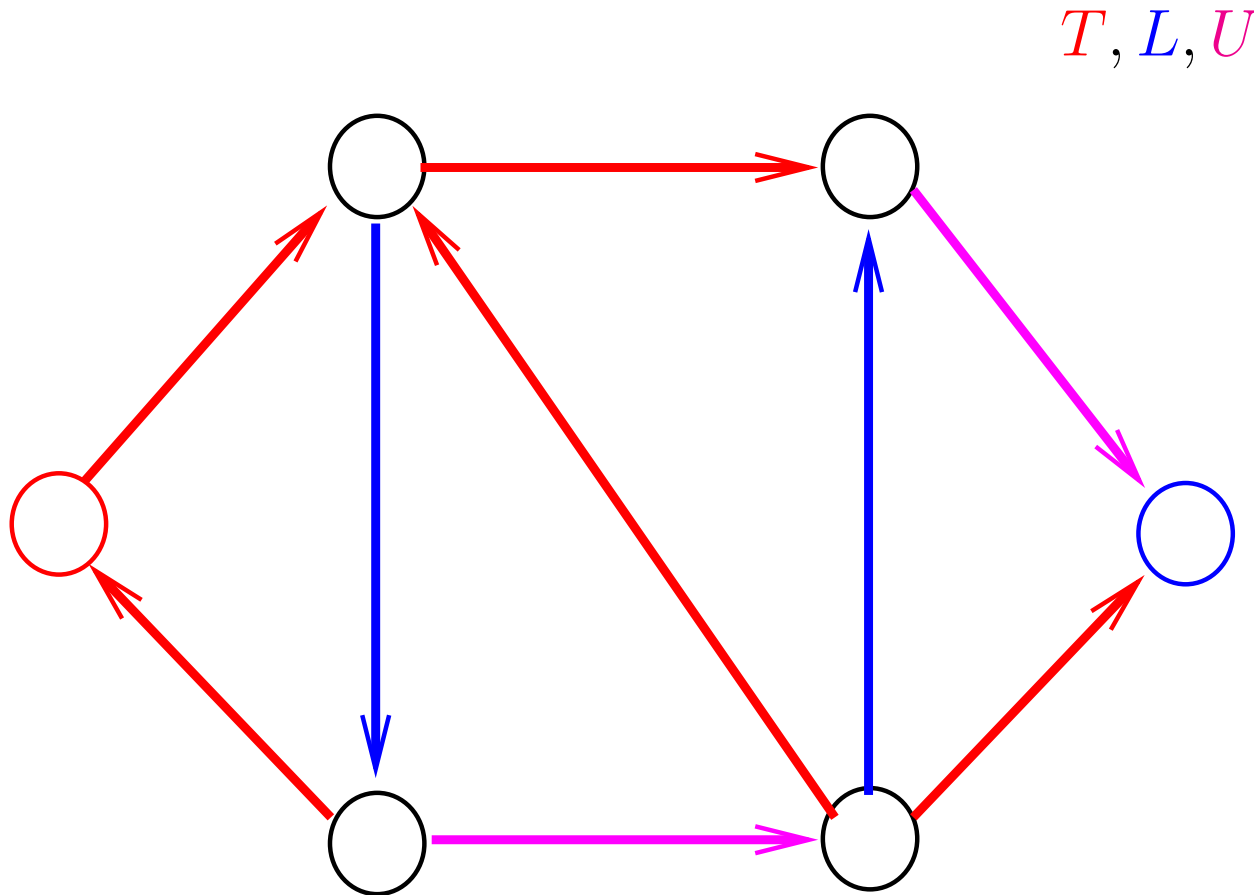
AULA 23

Simplex para redes

AMO 11.1, 11.2, 11.3, 11.5, 11.6

Estruturas arbóreas

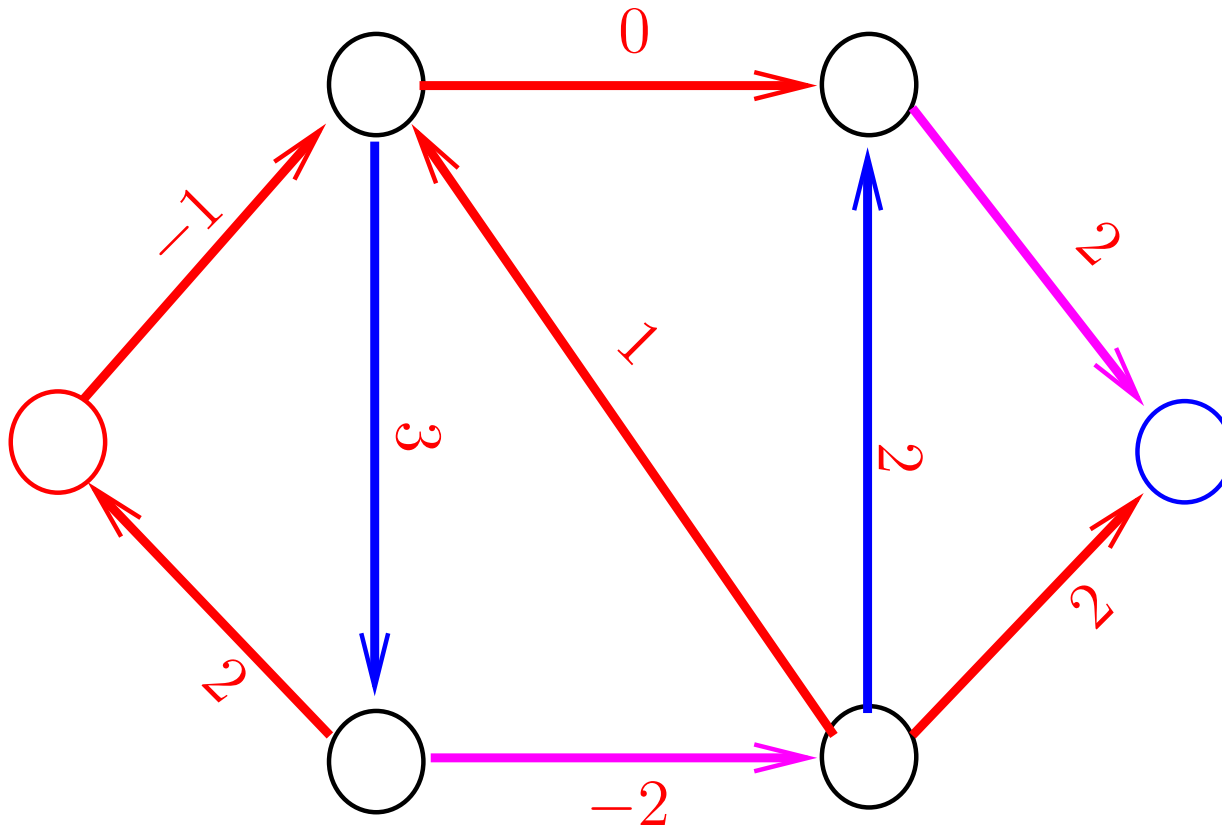
Uma **estrutura arbórea** num grafo (N, A) é uma tripartição T, L, U de A tal que (N, T) é uma árvore.



Estruturas arbóreas e potenciais (1)

Suponha que T, L, U é uma estrutura arbórea de (N, A, c) . Dizemos que uma função potencial y é determinada por T, c se, para cada ij em T ,

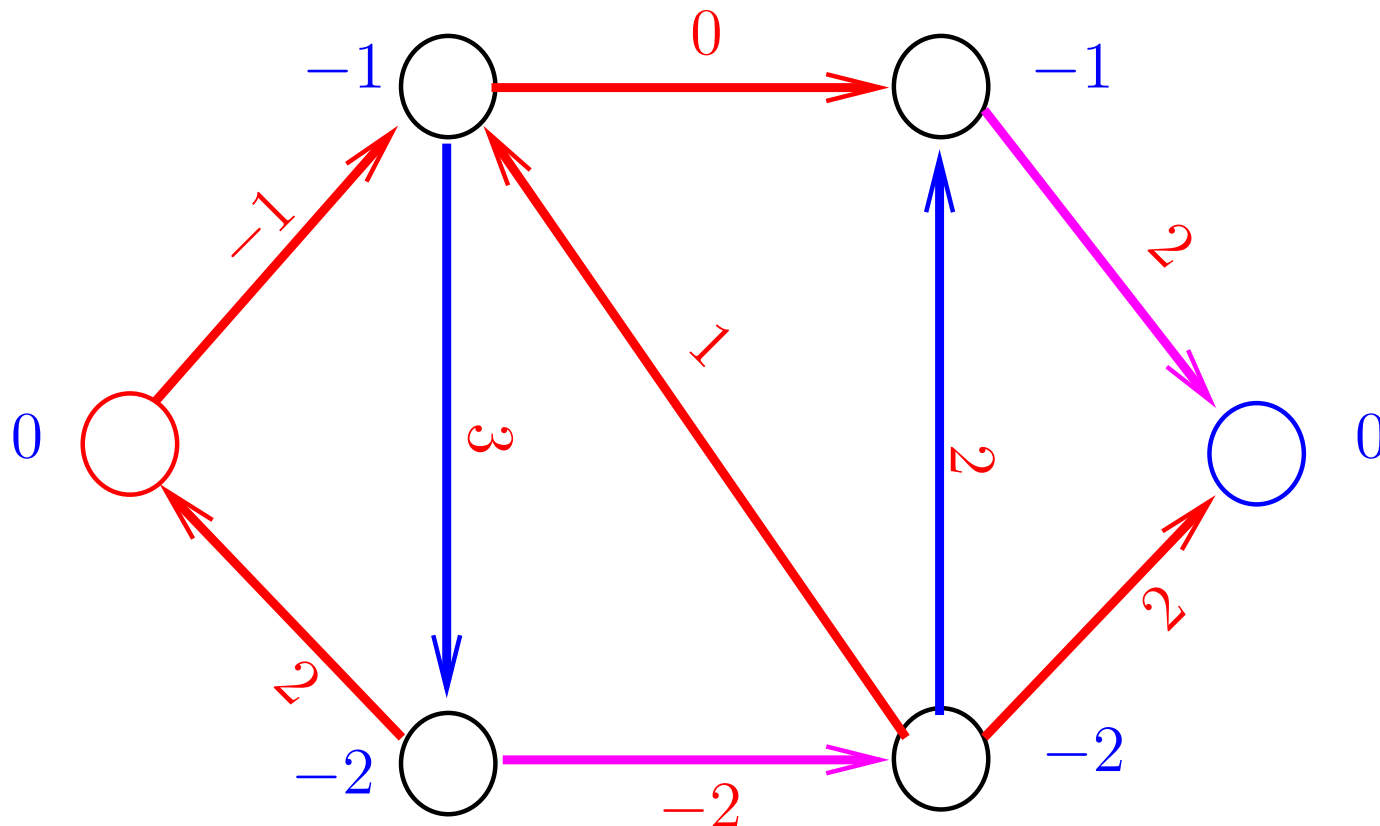
$$y(j) - y(i) = c(ij) .$$



Estruturas arbóreas e potenciais (1)

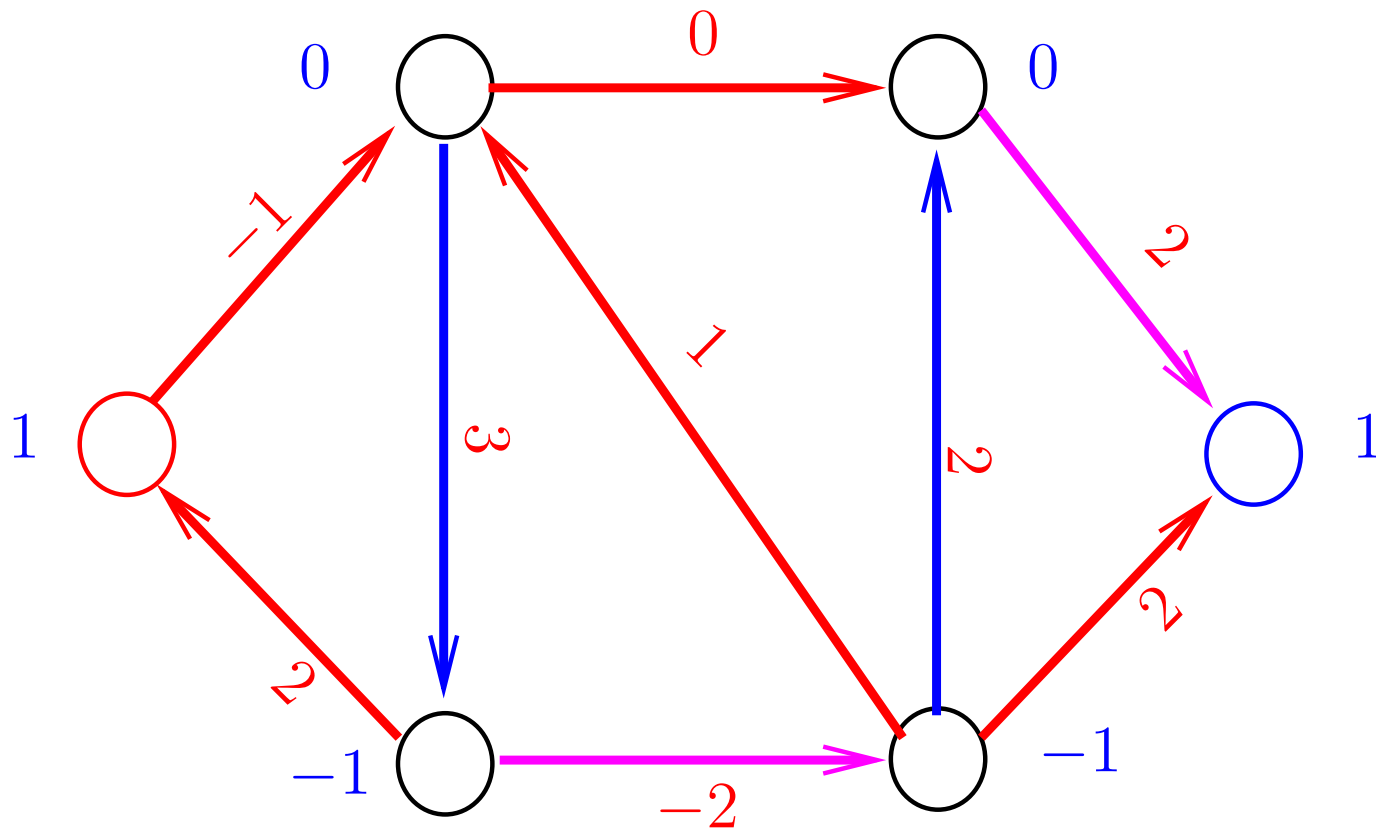
Suponha que T, L, U é uma estrutura arbórea de (N, A, c) . Dizemos que uma função potencial y é determinada por T, c se, para cada ij em T ,

$$y(j) - y(i) = c(ij) .$$



Estruturas arbóreas e potenciais (2)

Quantas funções potenciais determinadas por T, c existem? **Em geral** muitas! **Essencialmente** uma!



Estruturas arbóreas e fluxos (1)

Suponha que x é um fluxo que respeita u .

Uma estrutura arbórea T, L, U está associada ao fluxo x se

$$ij \in L \Rightarrow x(ij) = 0$$

$$ij \in U \Rightarrow x(ij) = u(ij)$$

Logo, todo arco ij tal que $0 < x(ij) < u(ij)$ está em T .

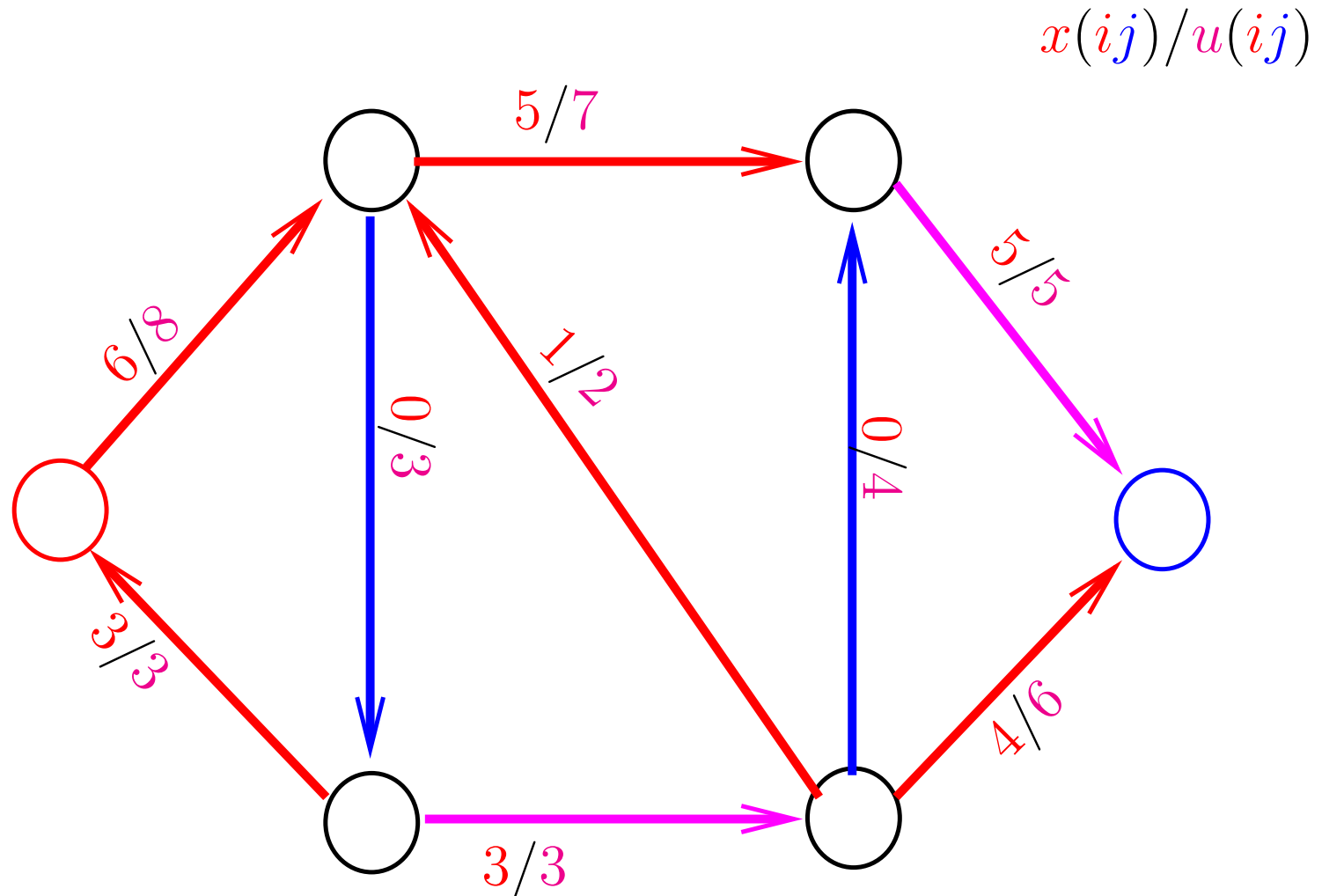
Não é verdade que existe uma estrutura arbórea associada a qualquer fluxo que respita u .

Um arco ij tal que $0 < x(ij) < u(ij)$ é dito **livre**.

Um fluxo é **acíclico** se o conjunto de seus arcos livres é acíclico.

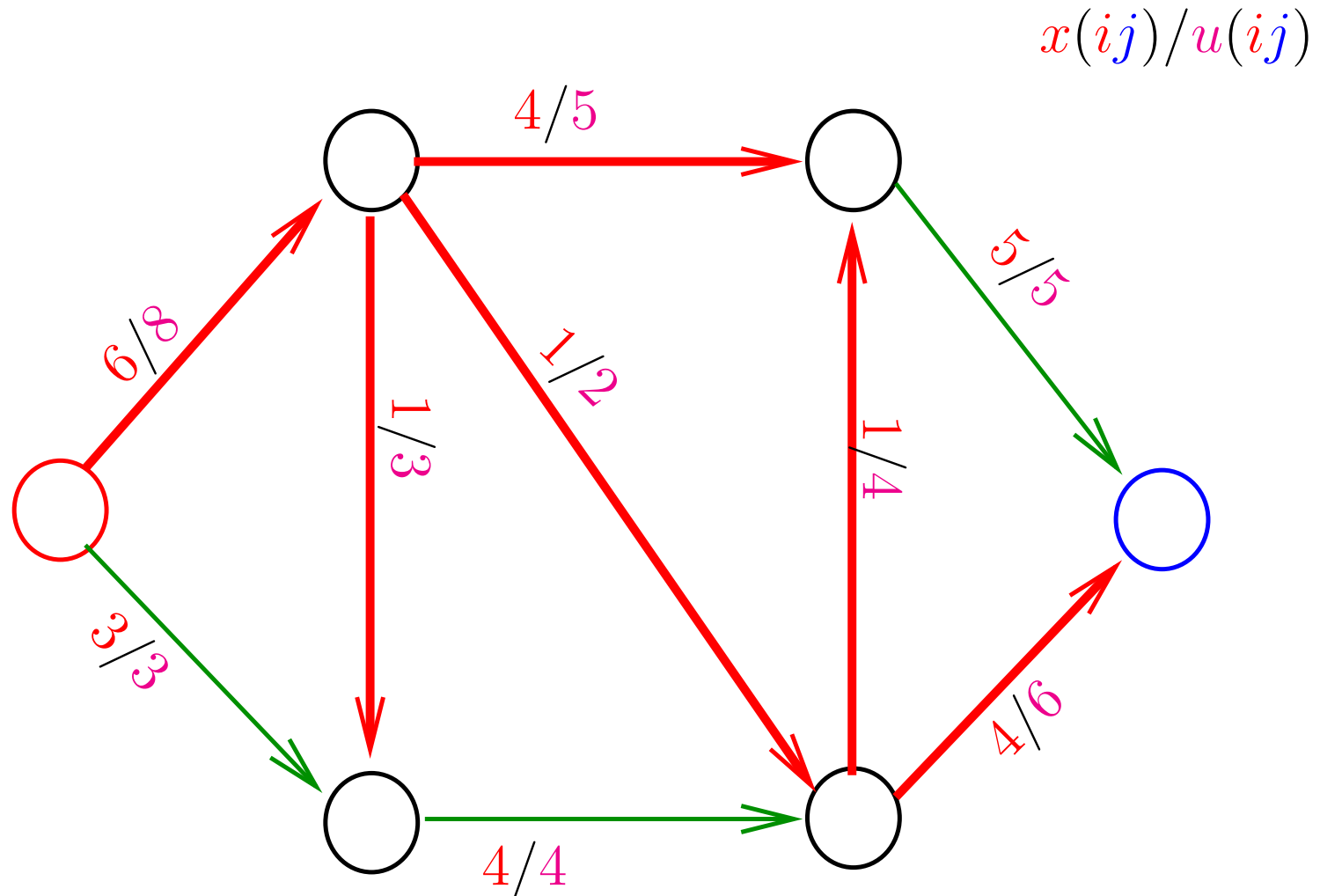
Estruturas arbóreas e fluxos (2)

Eis um exemplo de uma estrutura arbórea T, L, U associada a um fluxo x .



Estruturas arbóreas e fluxos (3)

Eis um exemplo de fluxo que **não** possui uma estrutura arbórea associada.



Estruturas arbóreas e fluxos (4)

Fato. Se x é um fluxo viável, então existe um fluxo viável **acíclico** x' tal que $cx' \leq cx$. A demonstração é algorítmica.

FLUXO-ACÍCLICO (N, A, u, c, x)

1 **repita**

2 $A' \leftarrow \{ij \in A : 0 < x(ij) < u(ij)\}$

3 $O \leftarrow \text{PSEUDO-CICLO}(N, A')$

4 **se** O está definido

5 **se** $c(O) > 0$

6 **então** $O \leftarrow$ “pseudo-ciclo reverso de O ”

7 $x \leftarrow \text{BARATEIE-FLUXO}(x, O, u)$

8 **até que** O não esteja definido

9 **devolva** x

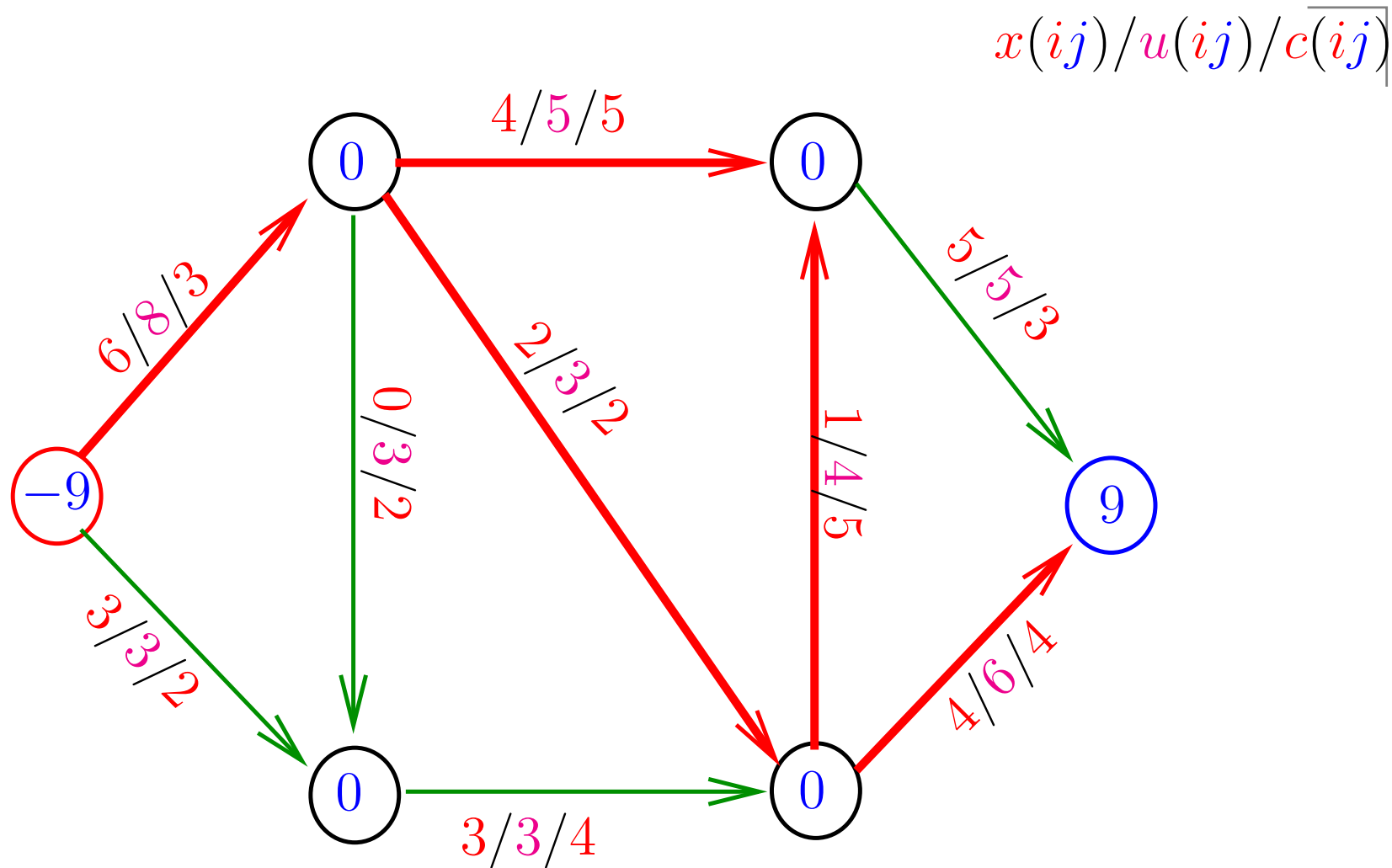
Barateie fluxo (esboço)

Recebe um fluxo x que respeita u e um pseudo-ciclo de custo **não-negativo** O e **devolve** o fluxo x após enviar “ δ unidades de fluxo através de O ”.

BARATEIE-FLUXO (x, O, u)

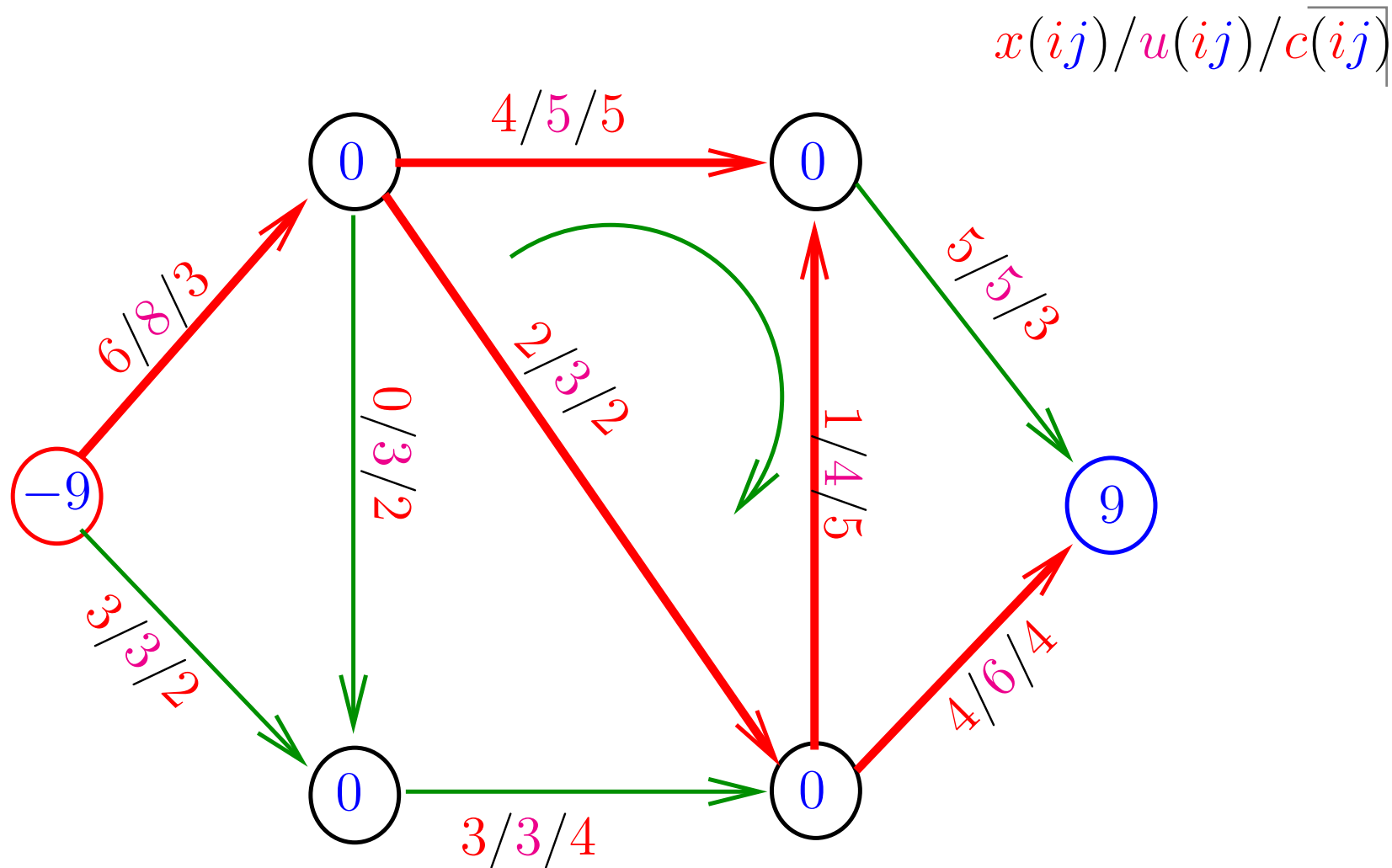
- 1 $\delta_1 \leftarrow \min\{x(ij) : ij \text{ é arco de } \overleftarrow{O}\}$
- 2 $\delta_2 \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij \text{ é arco de } \overrightarrow{O}\}$
- 3 $\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$
- 4 **para cada** arco ij em O **faça**
- 5 **se** $ij \in \overrightarrow{O}$
- 6 **então** $x(ij) \leftarrow x(ij) + \delta$
- 7 **senão** $x(ij) \leftarrow x(ij) - \delta$
- 8 **devolva** x

Simulação



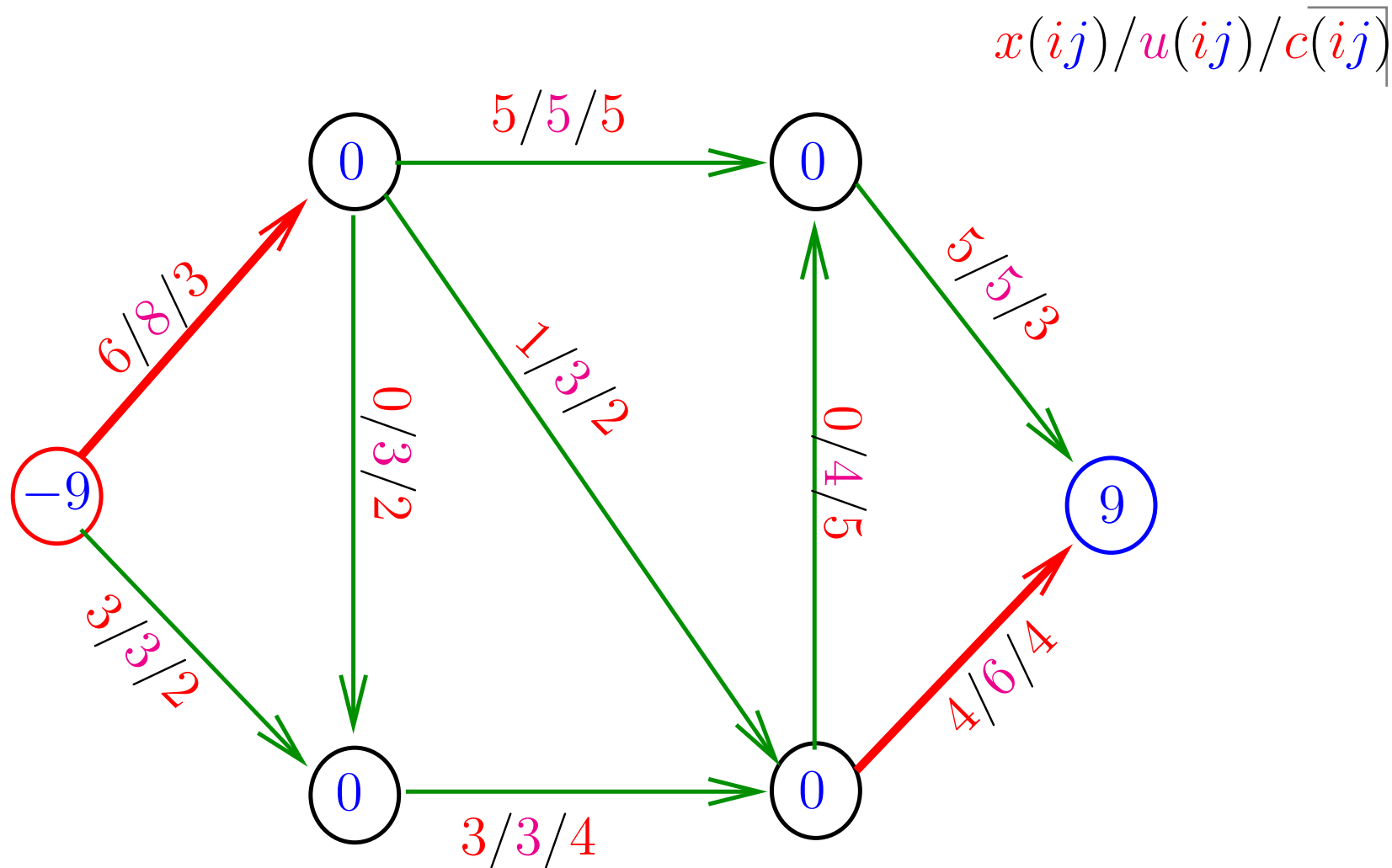
custo = 96

Simulação



custo = 96

Simulação



custo = 94

Estrutura arbórea e fluxos acíclicos

Recebe uma rede (N, A, u) e um fluxo acíclico x e **devolve** uma estrutura arbórea associada a x .

ESTRUTURA-ARBÓREA (N, A, u, b, c, x)

- 1 $T \leftarrow \{ij : 0 < x(ij) < u(ij)\}$
- 2 **para cada** ij em A **faça**
- 3 **se** $(N, T \cup \{ij\})$ **é acíclico**
- 4 **então** $T \leftarrow T \cup \{ij\}$
- 5 $L \leftarrow \{ij \notin T : x(ij) = 0\}$
- 6 $U \leftarrow \{ij \notin T : x(ij) = u(ij)\}$
- 7 **devolva** T, L, U

Conclusões

Existe uma **estrutura arbórea associada** a um fluxo se e somente se o **fluxo é acíclico**.

Toda rede que admite um **fluxo viável**, admite um fluxo viável **acíclico de custo mínimo**.

Assim, podemos nos restringir a procurar **fluxos viáveis acíclicos de custo mínimo**.

Custo mínimo e ciclo negativo

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- x é um **fluxo viável de custo mínimo**;
- existe um **ciclo de custo negativo** na rede residual.

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- existe uma “certa” **função potencial y** na rede residual;
- existe um **ciclo de custo negativo** na rede residual.

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo viável.

Seja y uma função potencial.

As folgas de x e y são complementares se

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) .$$

Fato. Se as folgas de x e y são complementares então x é um fluxo viável de custo mínimo (é y é alguma-coisa máximo).

Folgas complementares (2)

Equivalentemente:

Seja x um fluxo viável.

Seja y uma função potencial.

As folgas de x e y são complementares se

$$x(ij) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(j) - y(i) \leq c(ij)$$

$$0 < x(ij) < u(ij) \quad \Rightarrow \quad y(j) - y(i) = c(ij) \quad \text{e}$$

$$x(ij) = u(ij) \quad \Rightarrow \quad y(j) - y(i) \geq c(ij) .$$

Fato. Se as folgas de x e y são complementares então x é um fluxo viável de custo mínimo (é y é alguma-coisa máximo).

Estruturas arbóreas e potenciais ótimos

Seja (N, A, u, b, c) uma rede com função capacidade $u \dots$

x = fluxo viável

T, L, U = estrutura arbórea associada a x

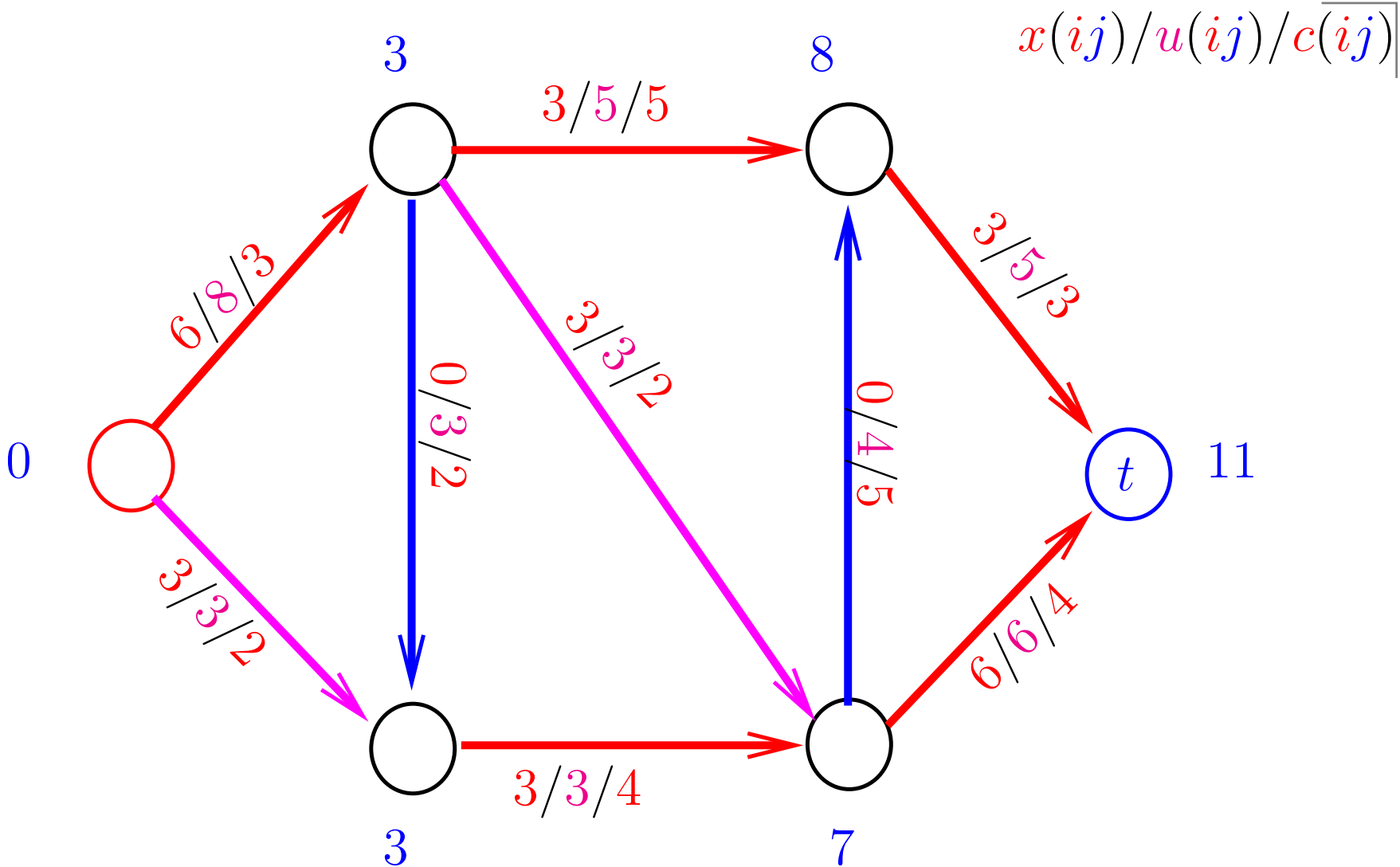
Dizemos que uma função potencial y determinada por T, c é **ótima** se

$$ij \text{ em } L \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \text{ e}$$

$$ij \text{ em } U \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) .$$

Fato. Se x é um fluxo viável e y é uma função potencial ótima então x é um fluxo viável de custo mínimo.

Exemplo



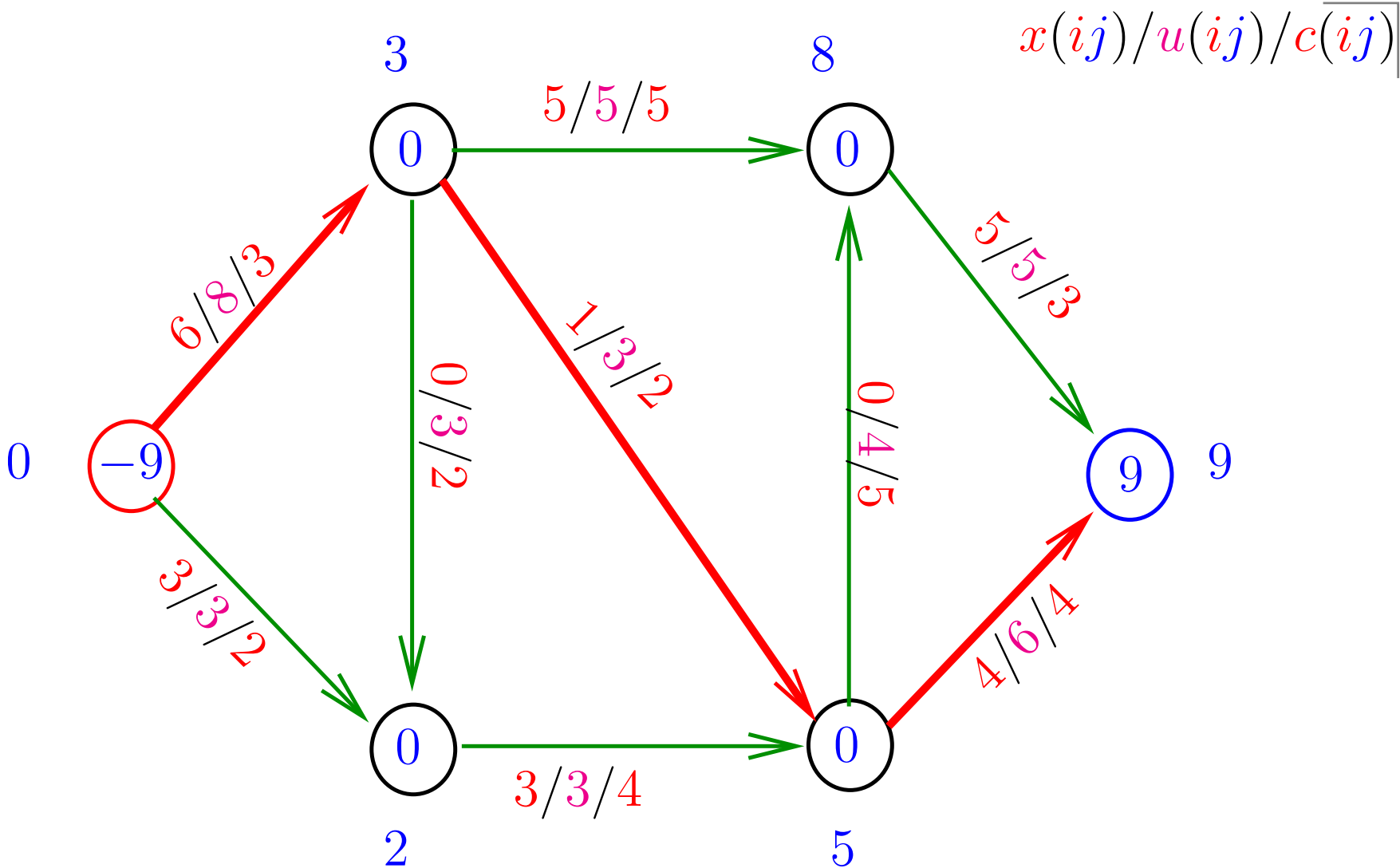
custo = 92

Estruturas arbóreas e potenciais ótimos

Suponha que x é um fluxo viável e seja T, L, U uma estrutura arbórea associada a x . Se a função potencial y determinada por c, T é ótima, então o par (x, y) tem folgas complementares e, portanto, x é um **fluxo viável de custo mínimo**.

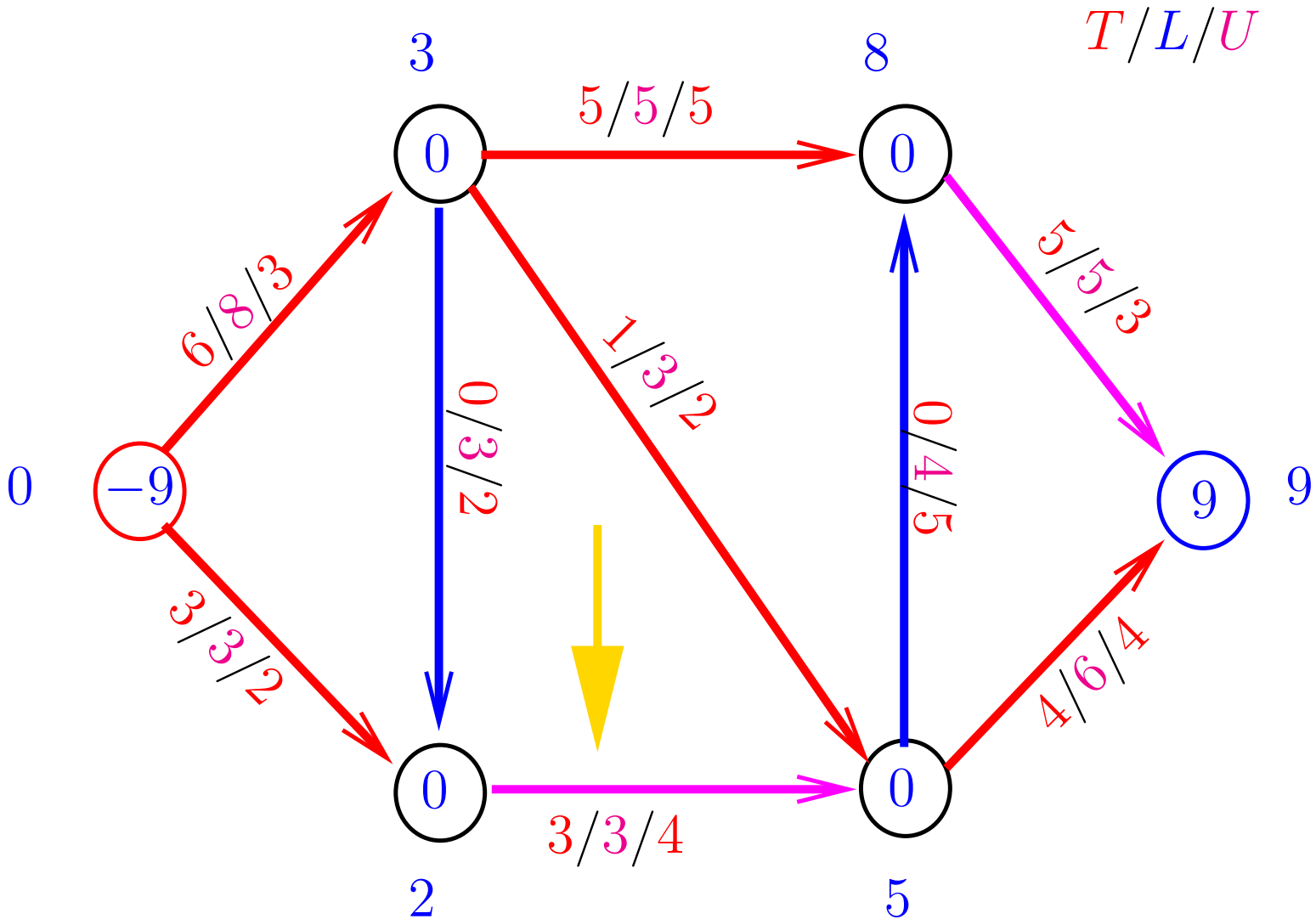
Estratégia do simplex para redes: procurar uma estrutura arbórea associada ao fluxo viável x tal que a função potencial y determinada por T e c seja ótima.

Fluxo viável acíclico



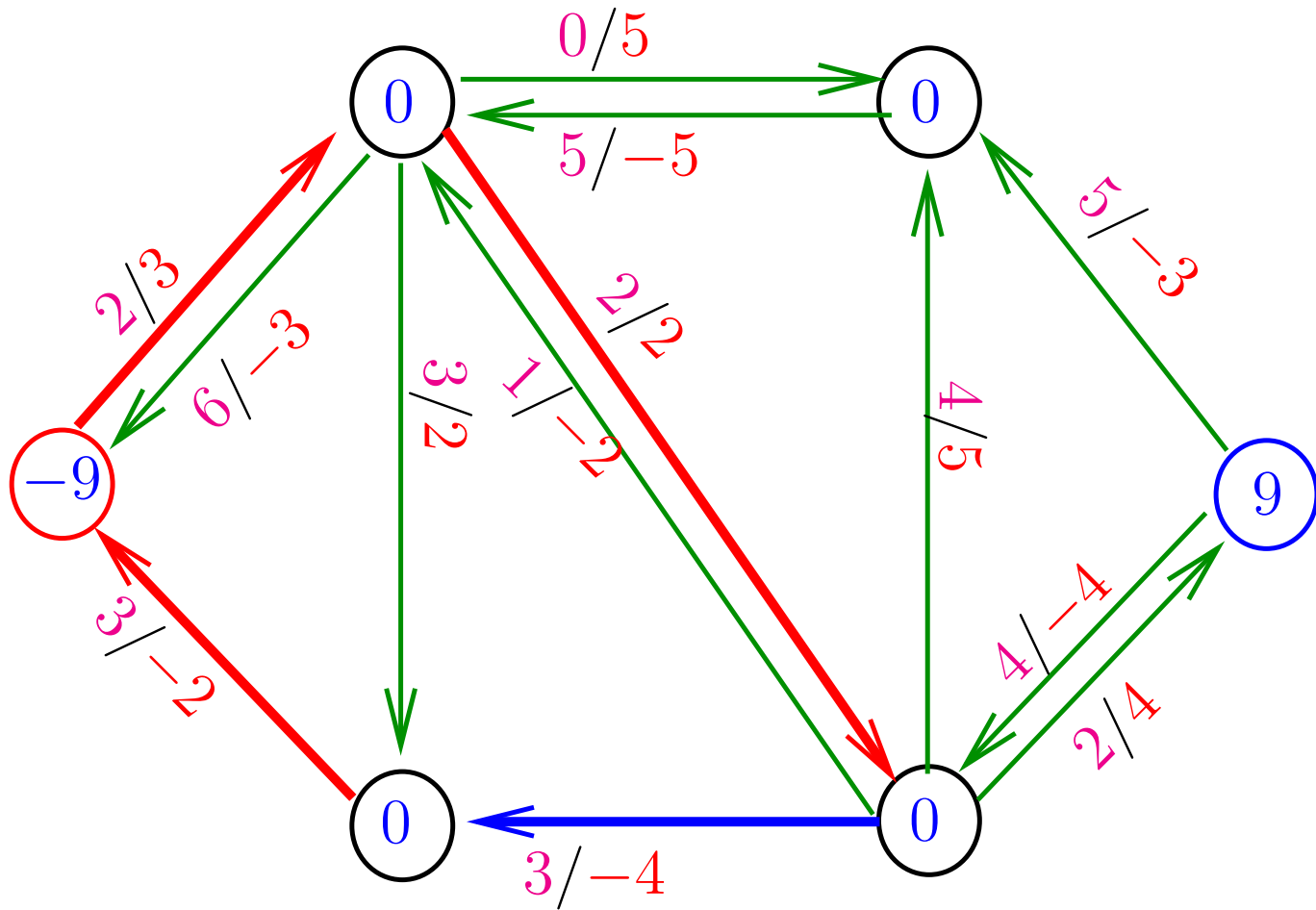
custo = 94

Estrutura arbórea (1)

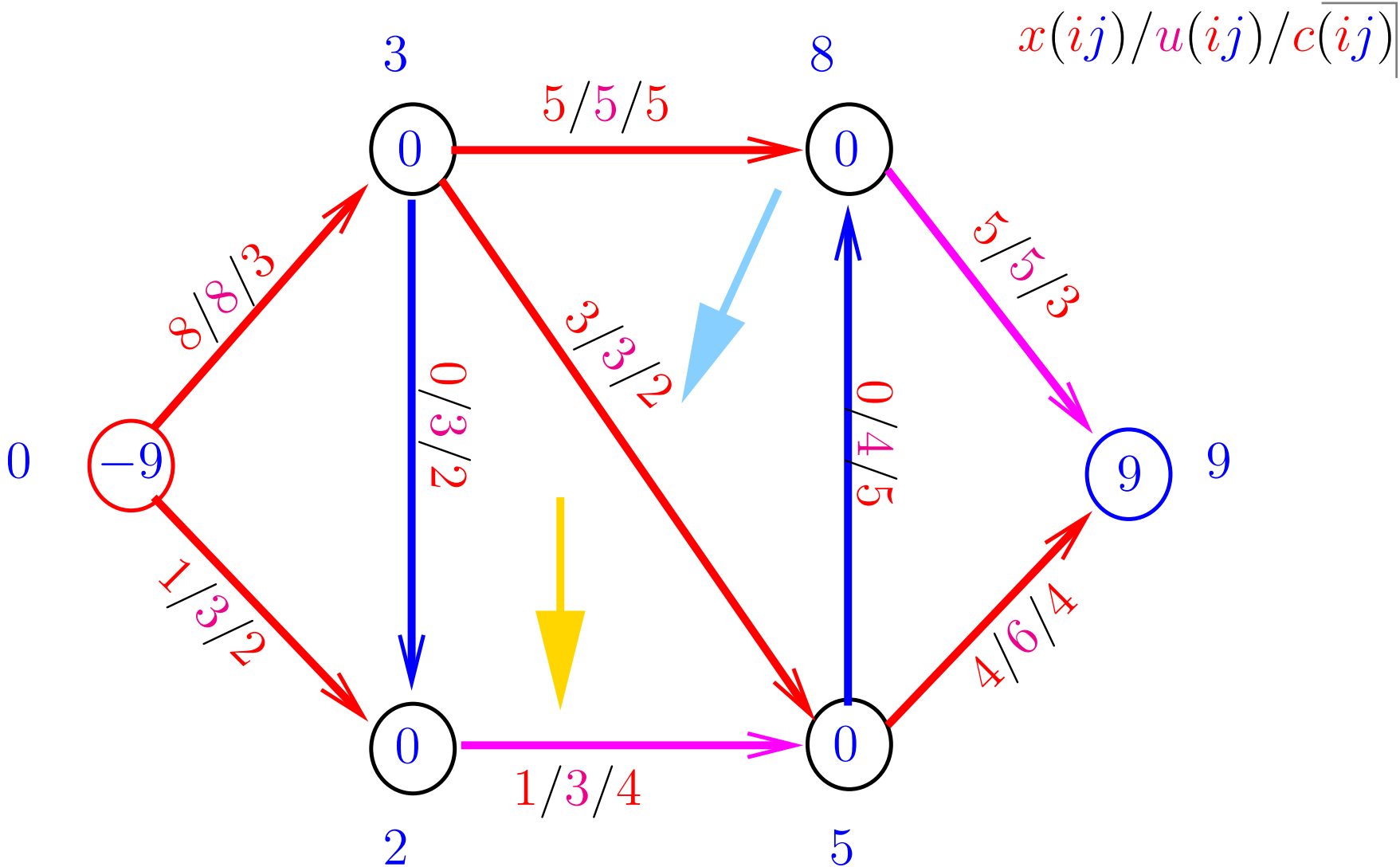


custo = 94

Rede residual (1)

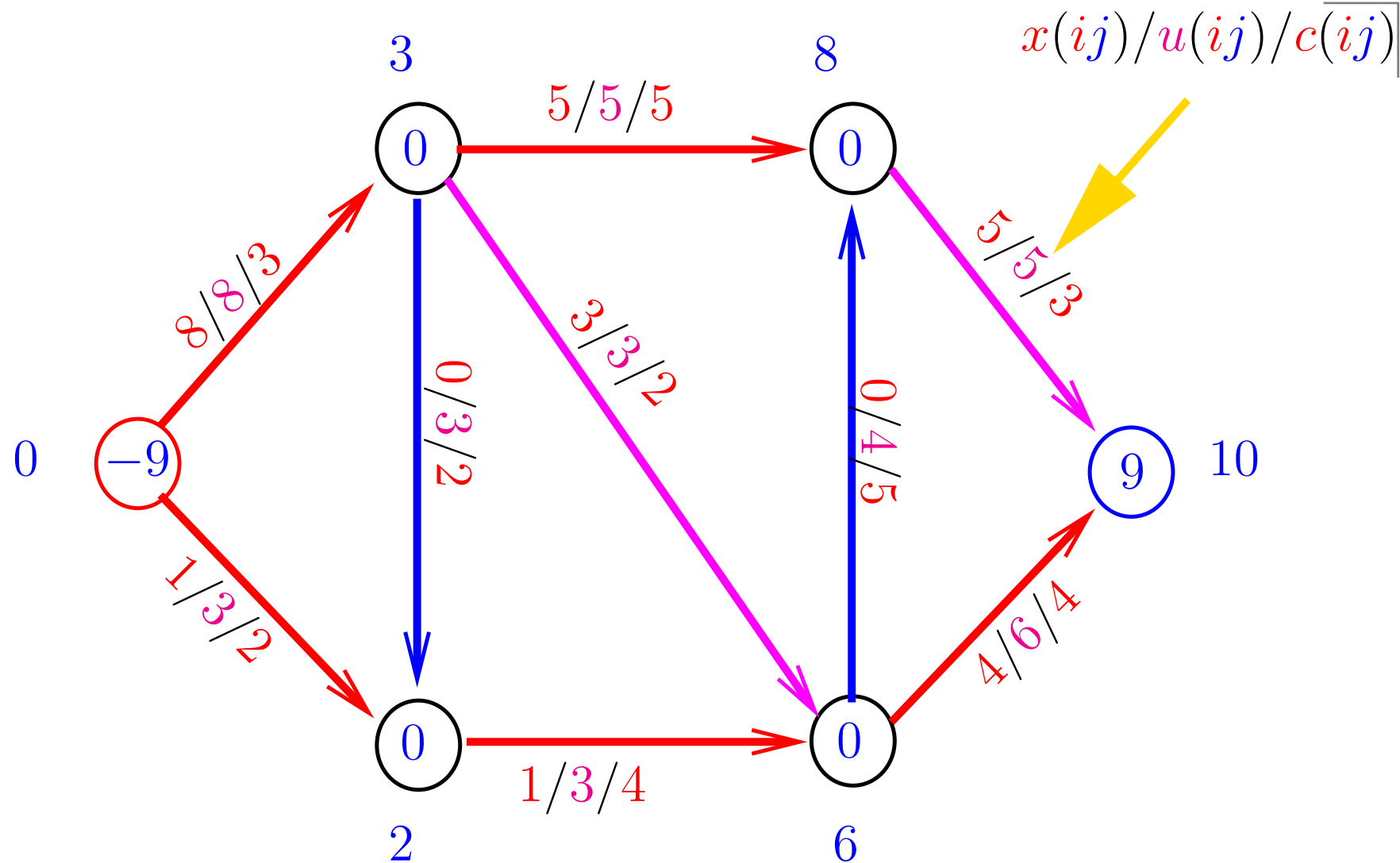


Fluxo viável (2)



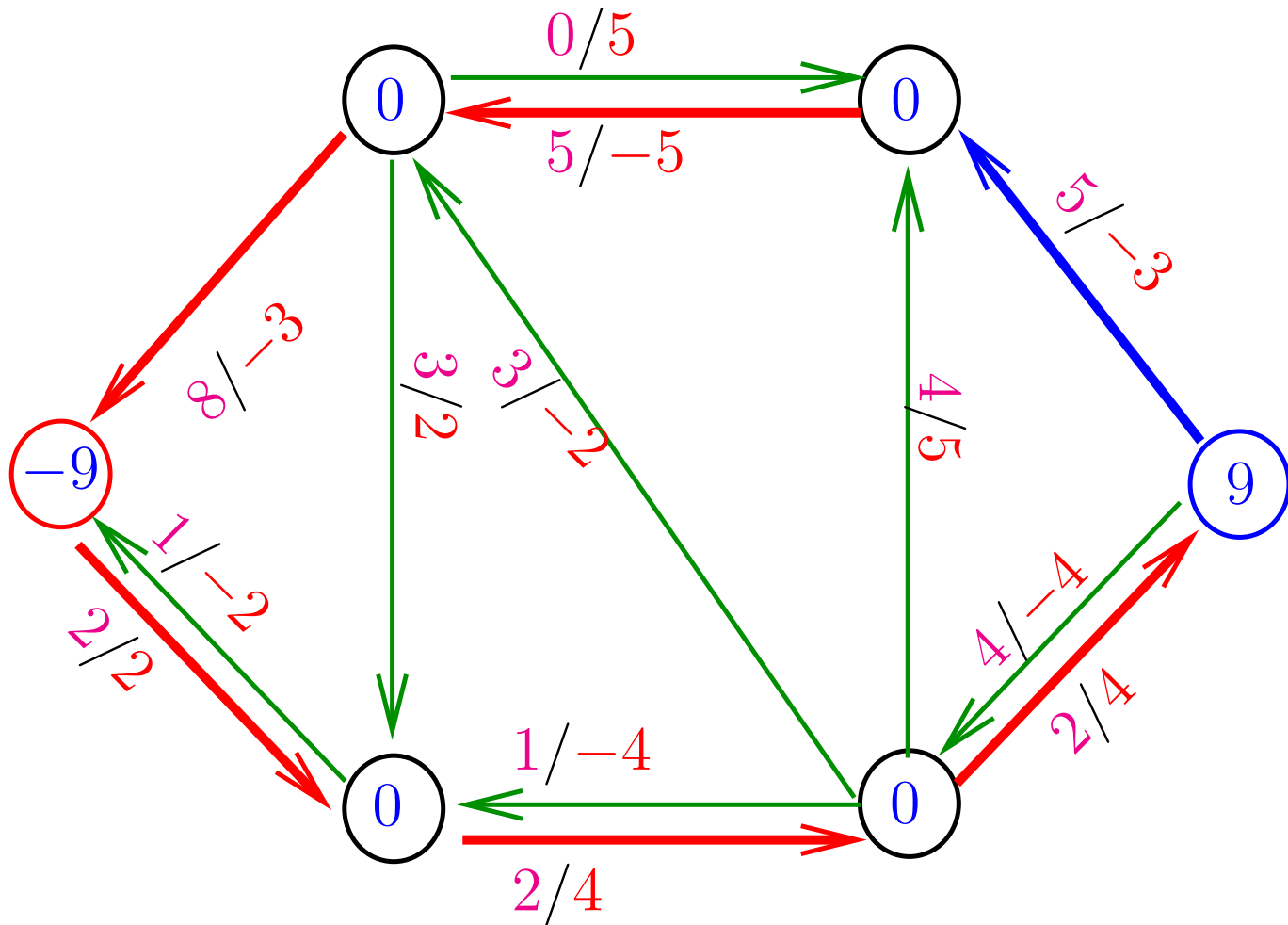
custo = 92

Estrutura arbórea (2)

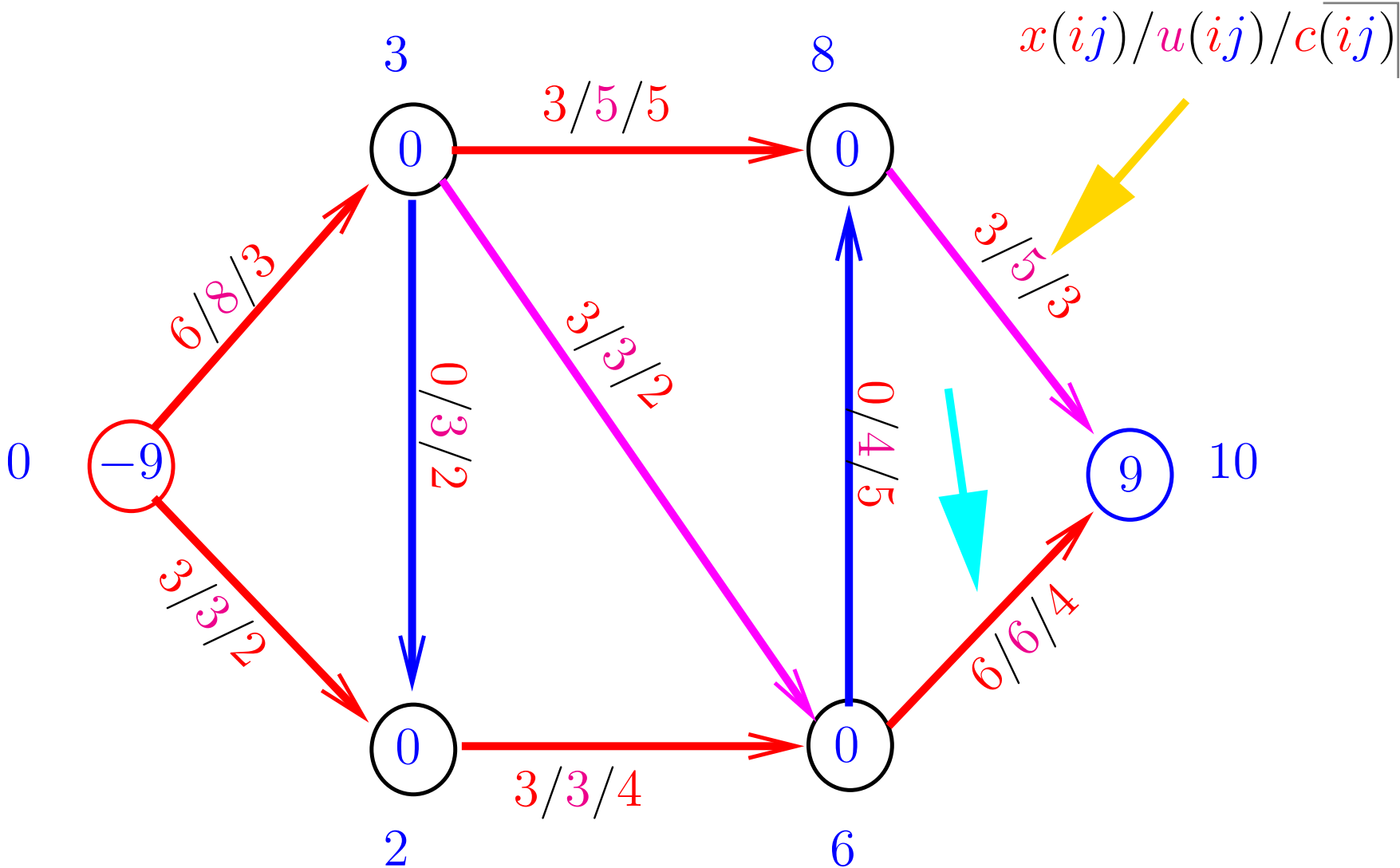


custo = 92

Rede residual (2)

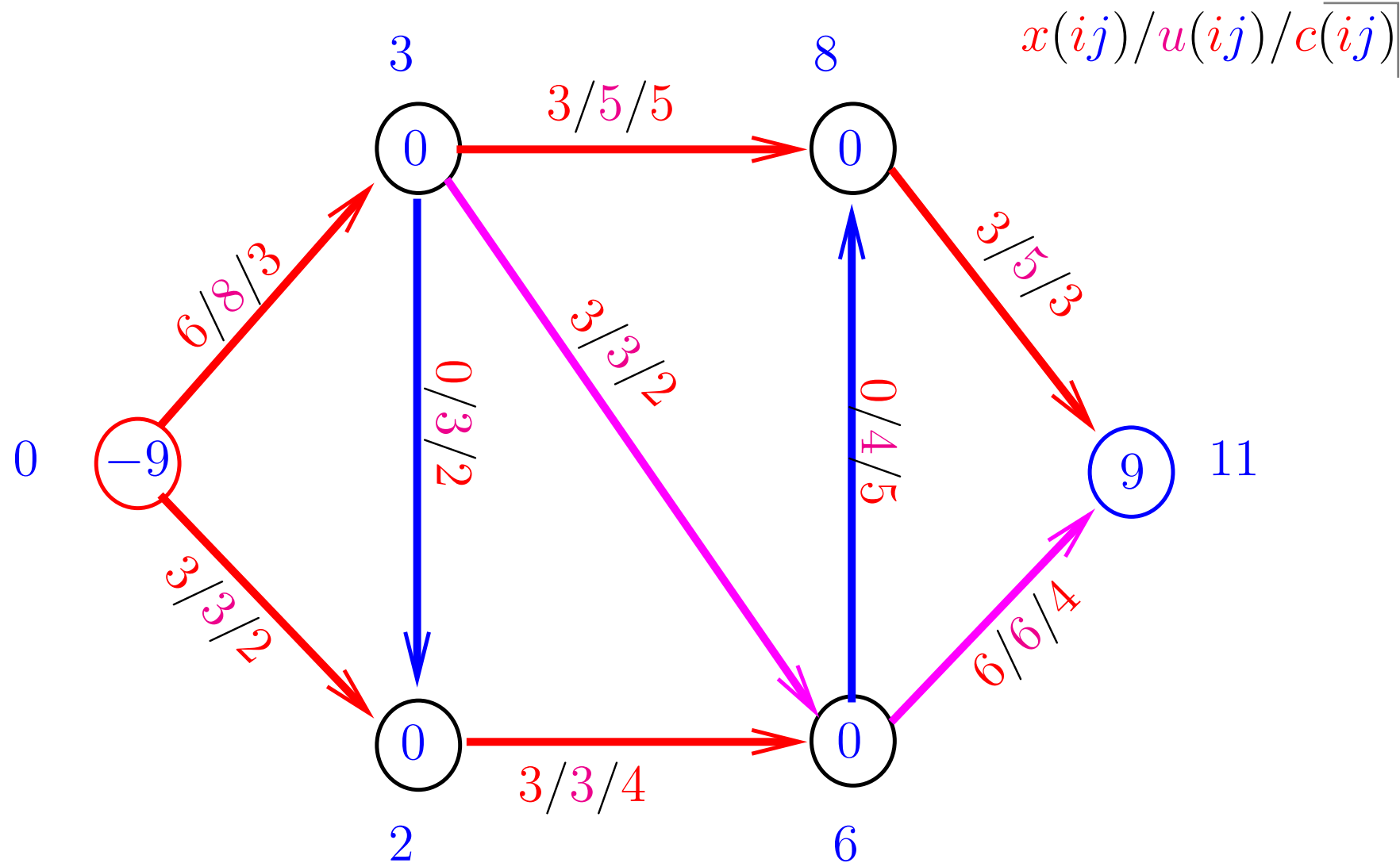


Fluxo viável (3)



custo = 92

Estrutura ótima



custo = 92

Simplex para redes (esboço)

O esboço supõe que a rede dada possui um fluxo viável.

NETWORK-SIMPLEX (N, A, u, b, c)

1 $x \leftarrow$ FLUXO-VIÁVEL (N, A, u, b)

2 $x \leftarrow$ FLUXO-ACÍCLICO (N, A, c, x)

3 $\langle T, L, U \rangle \leftarrow$ ESTRUTURA-ARBÓREA (N, A, u, x)

4 $y \leftarrow$ POTENCIAL-ARBÓREO (T, c)

5 enquanto existe ij em $L \cup U$ “insatisfeito” faça

6 $O \leftarrow$ ciclo negativo determinado por $T \cup \{ij\}$

7 $x \leftarrow$ BARATEIE-FLUXO (x, O, u)

8 $\langle T, L, U \rangle \leftarrow$ PIVOTAÇÃO (ij, x, O, T, L, U)

9 $y \leftarrow$ POTENCIAL-ARBÓREO (T, c)

10 devolva x e y

Pivotação (esboço)

PIVOTAÇÃO (ij, x, O, T, L, U)

- 1 $O_L \leftarrow \{ij \in O : x(ij) = 0\}$
- 2 $O_U \leftarrow \{ij \in O : x(ij) = u(ij)\}$
- 3 $pq \leftarrow$ um arco em $O_L \cup O_U$
- 4 **se** ij está em L
- 5 **então** $L \leftarrow L - \{ij\}$
- 6 **senão** $U \leftarrow U - \{ij\}$
- 7 $T \leftarrow (T - \{pq\}) + \{ij\}$
- 8 **se** pq está em O_L
- 9 **então** $L \leftarrow L \cup \{pq\}$
- 10 **senão** $U \leftarrow U \cup \{pq\}$
- 11 **devolva** T, L, U

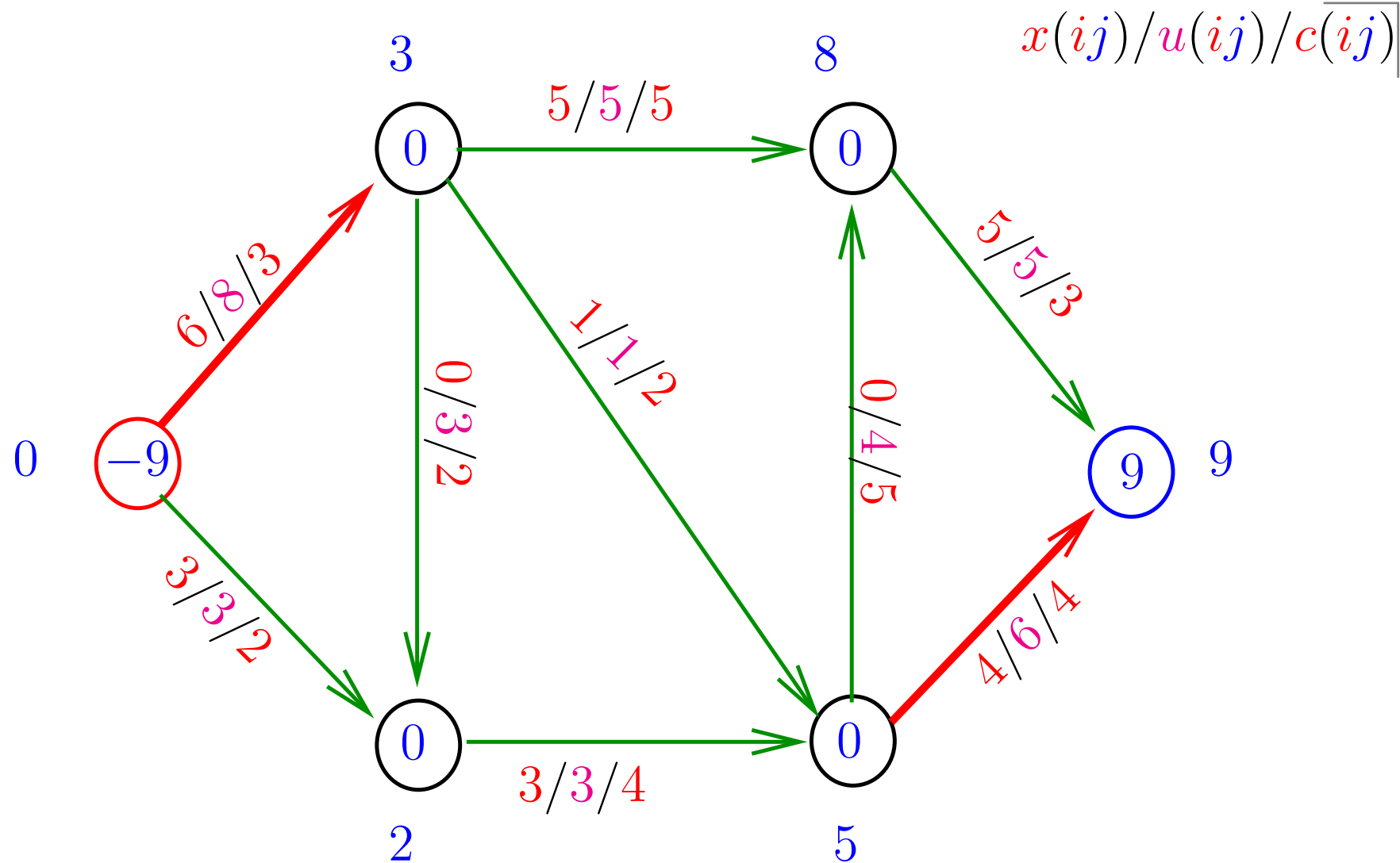
Invariantes

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

- (i0) x é um fluxo viável;
- (i1) T, L, U é uma estrutura arbórea associada a x ;
- (i2) y é uma função potencial determinada por T, c .

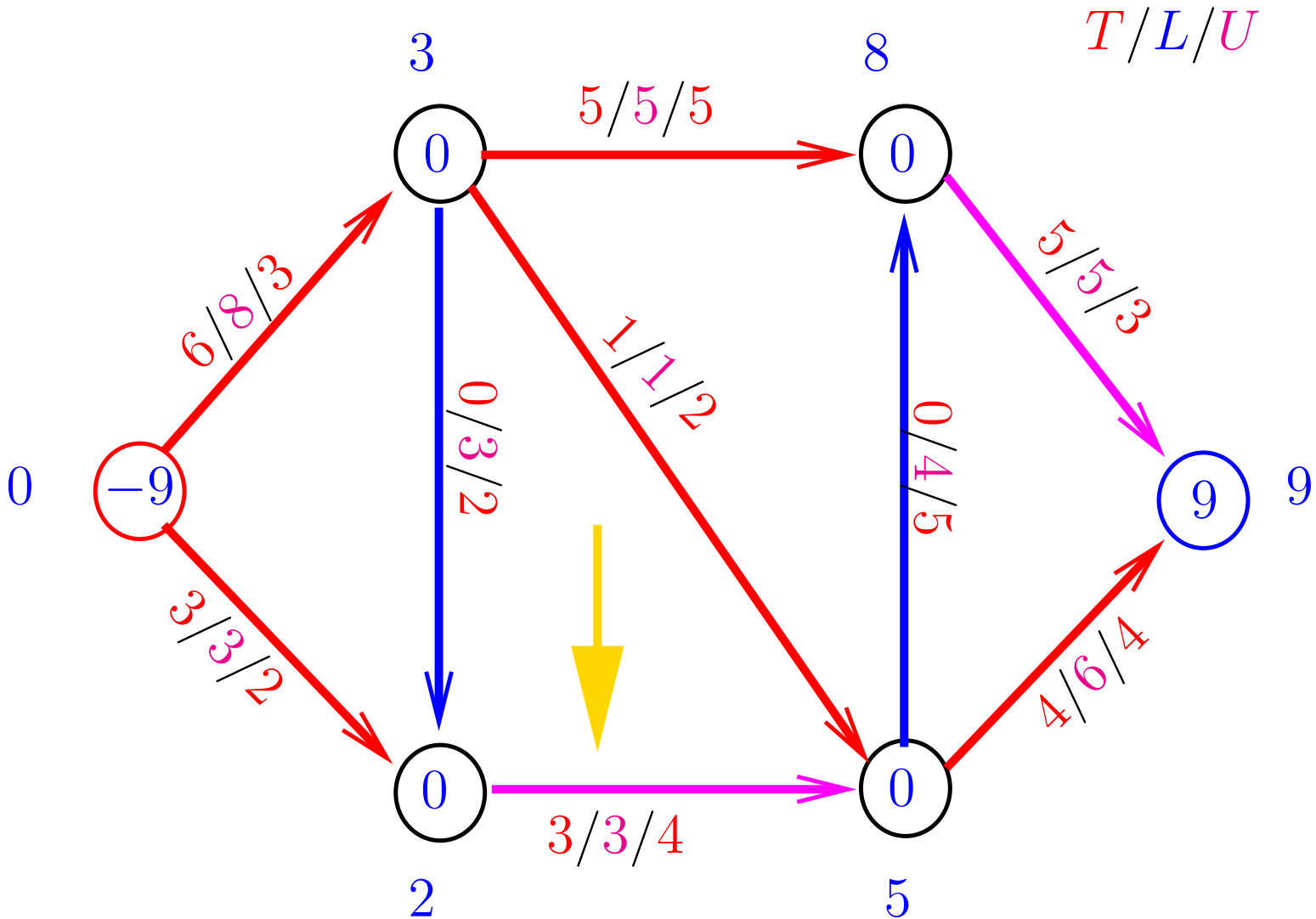
Dessas relações invariantes tem-se que quando o algoritmo pára y é uma função potencial **ótima** determinada por T, c e portanto x é um fluxo viável (**acíclico**) de custo mínimo.

Fluxo viável acíclico



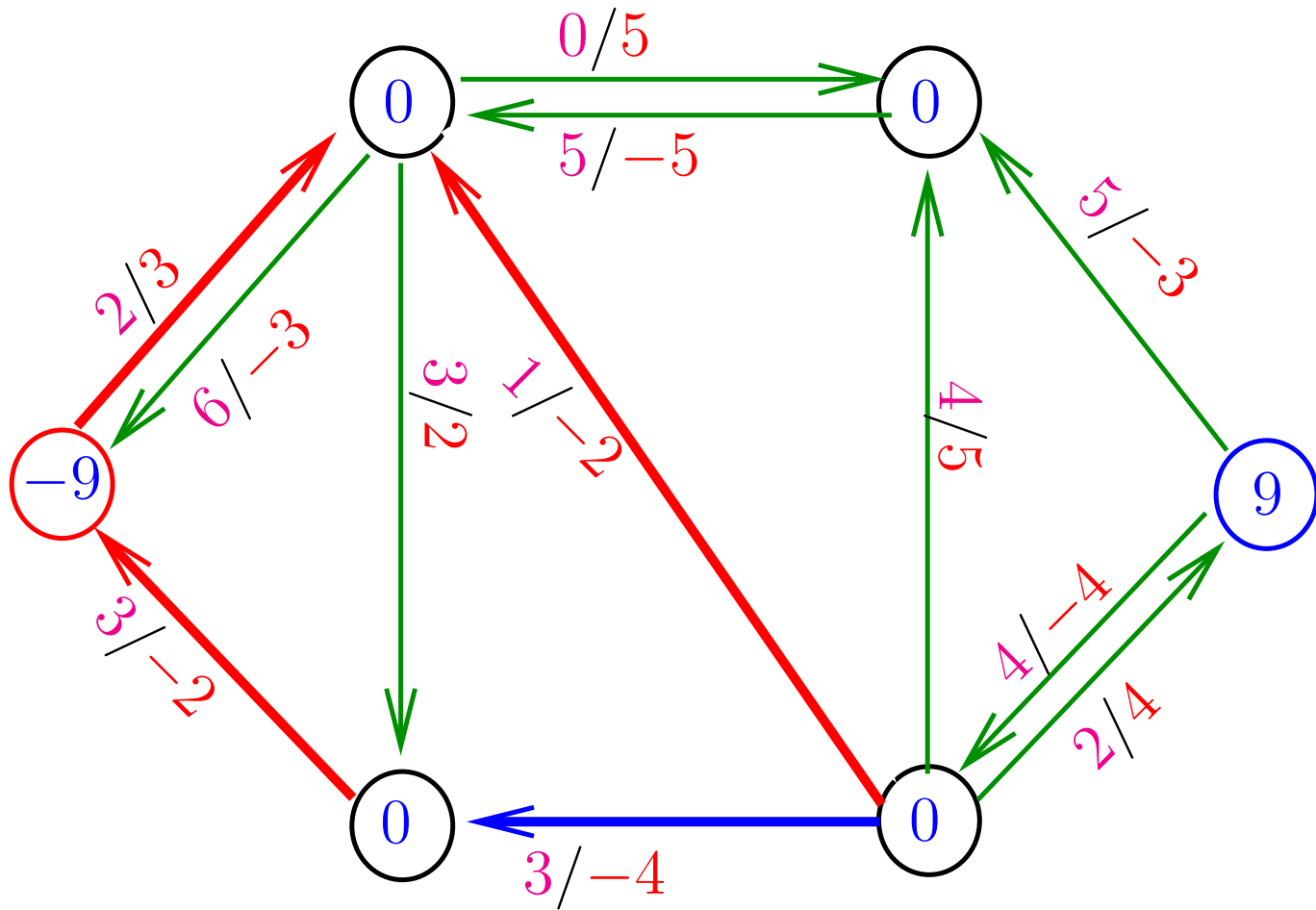
custo = 94

Estrutura arbórea (1)

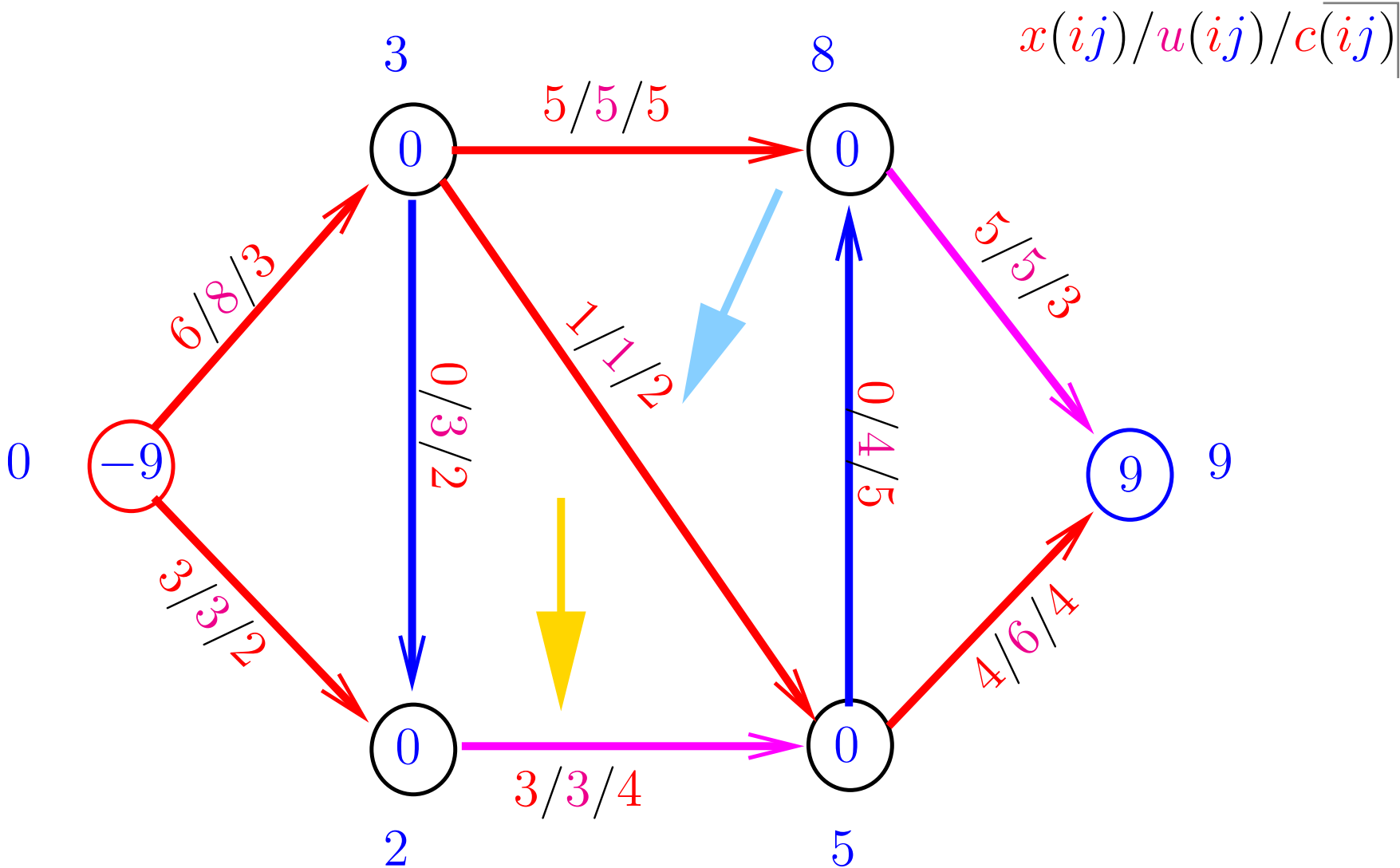


custo = 94

Rede residual (1)

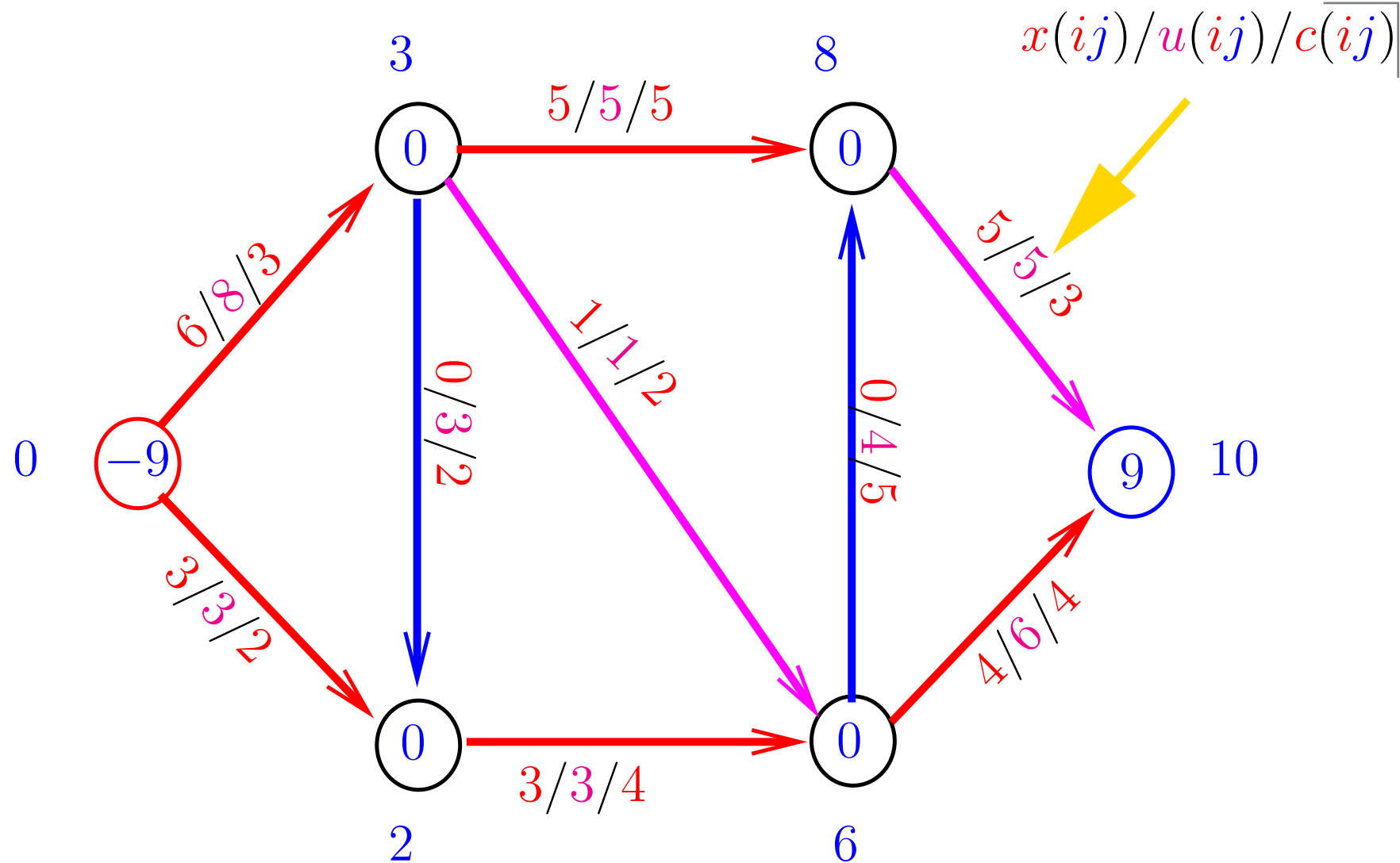


Fluxo viável (2)



custo = 94

Estrutura arbórea (2)



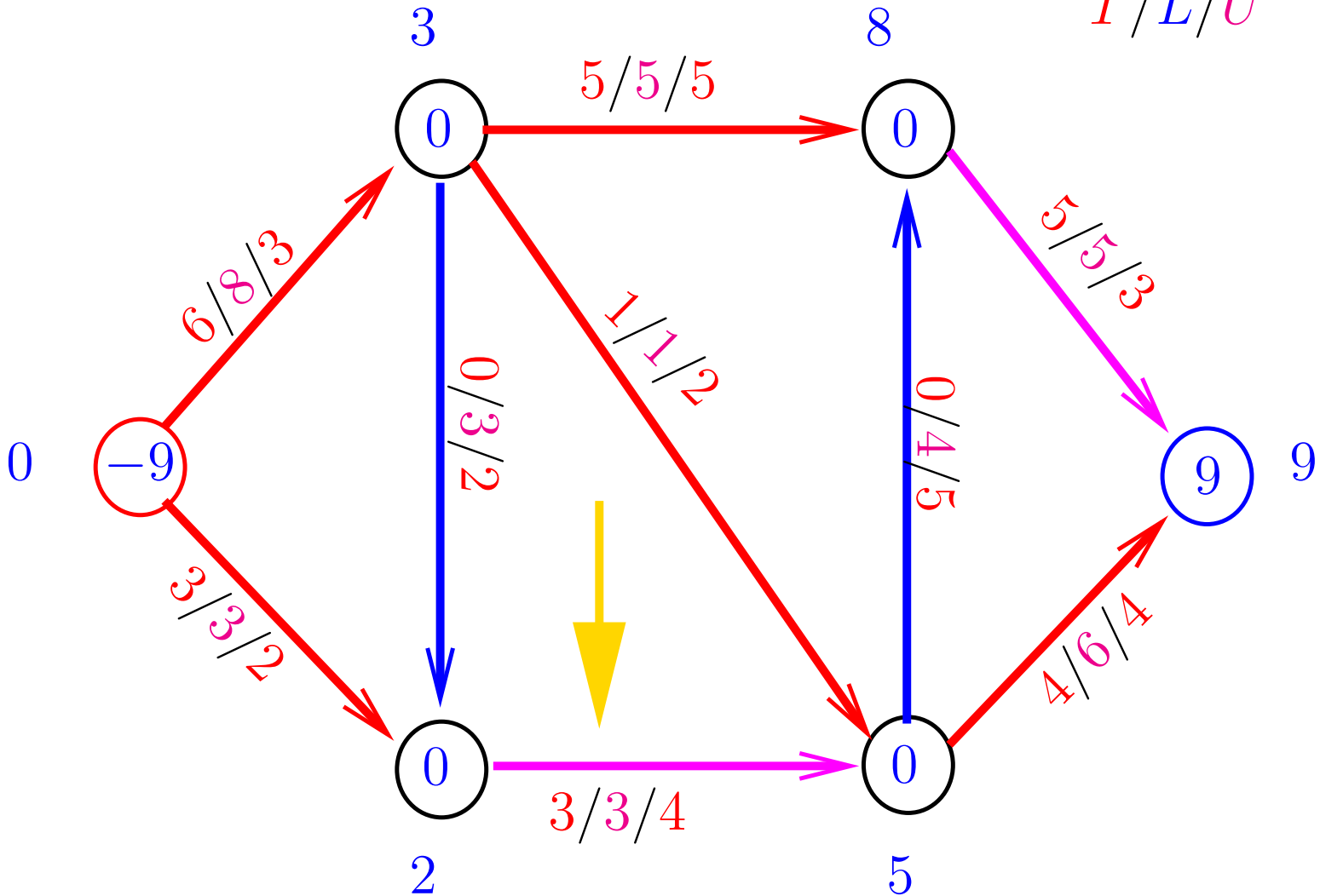
custo = 94

Iteração degenerada

Estrutura degenerada

Dizemos que uma estrutura arbórea é **degenerada** se $x(ij) = 0$ ou $x(ij) = u(ij)$ para algum arco ij em T .

$T/L/U$



Estruturas arbóreas fortes

Se o algoritmo **NETWORK-SIMPLEX** não realiza iterações degeneradas então o número de iterações é $< mCU$.

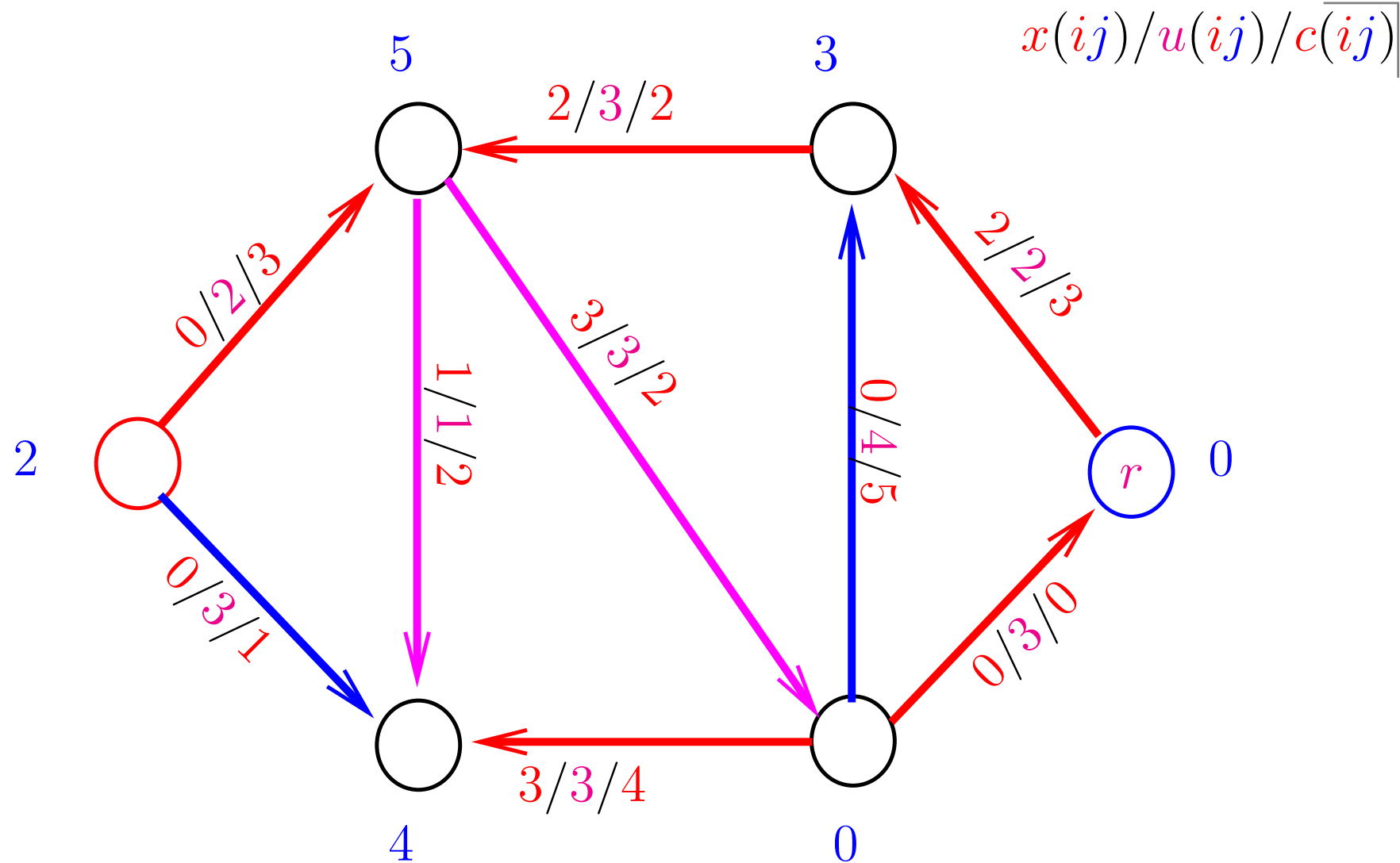
É possível forçar a convergência do algoritmo se trabalharmos com “estruturas arbóreas fortes”.

Uma estrutura arbórea T, L, U associada a um fluxo x é **forte** em relação a um certo nó r (raiz) se

- todo arco ij em T tal que $x(ij) = 0$ aponta em direção a r e
- todo arco ij em T tal que $x(ij) = u(ij)$ aponta na direção oposta a r .

Em outras palavras: existe um pseudo-caminho de incremento em T de qualquer nó a r .

Estrutura arbórea forte



custo = 30

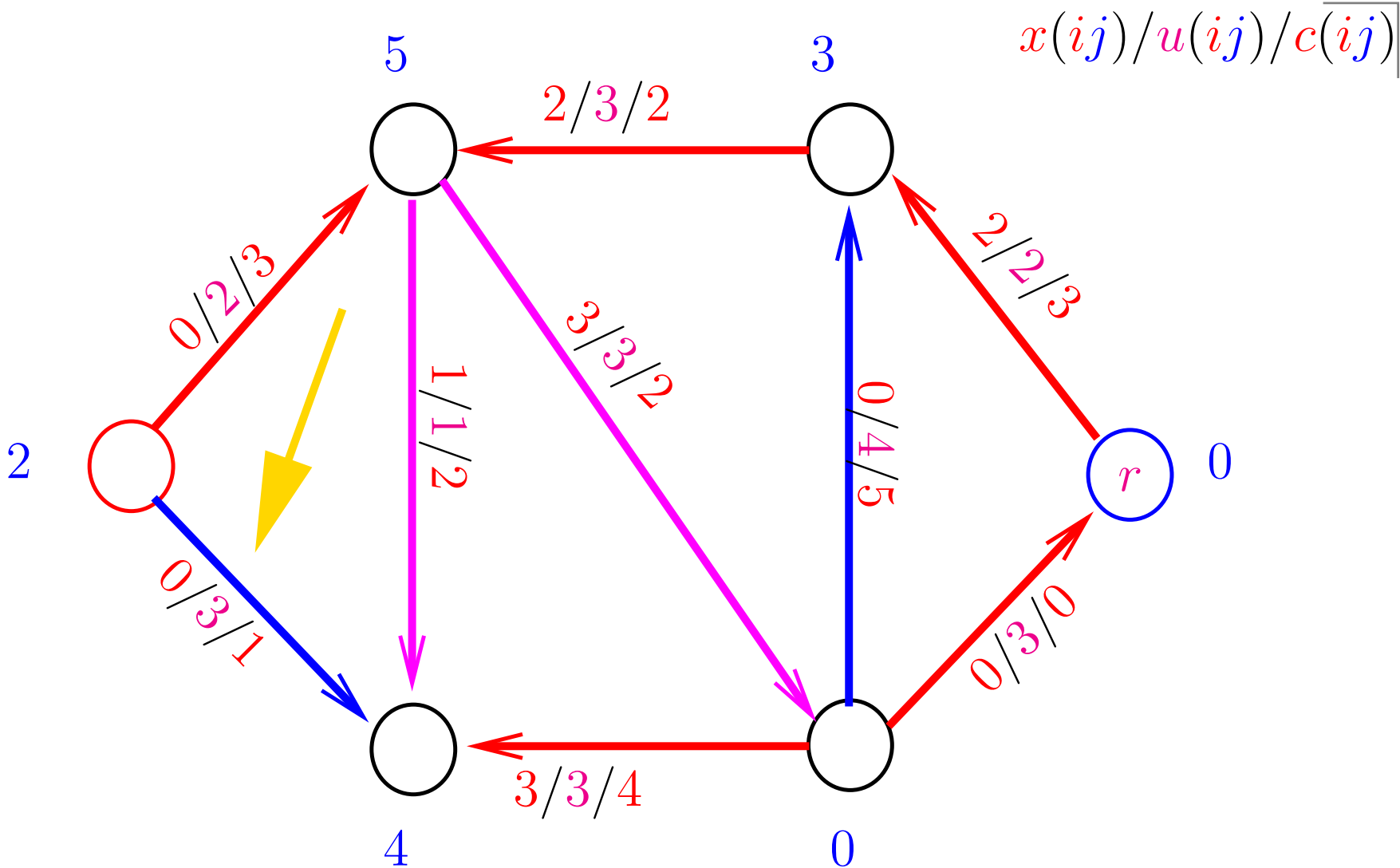
Regra de Cunningham

Dada uma estrutura T, L, U e um arco ij que não está em T , existe um único ciclo O em $T \cup \{ij\}$. O **ápice** de O é o nó de O mais perto de r .

Eis a regra de escolha do arco pq que sairá de T :

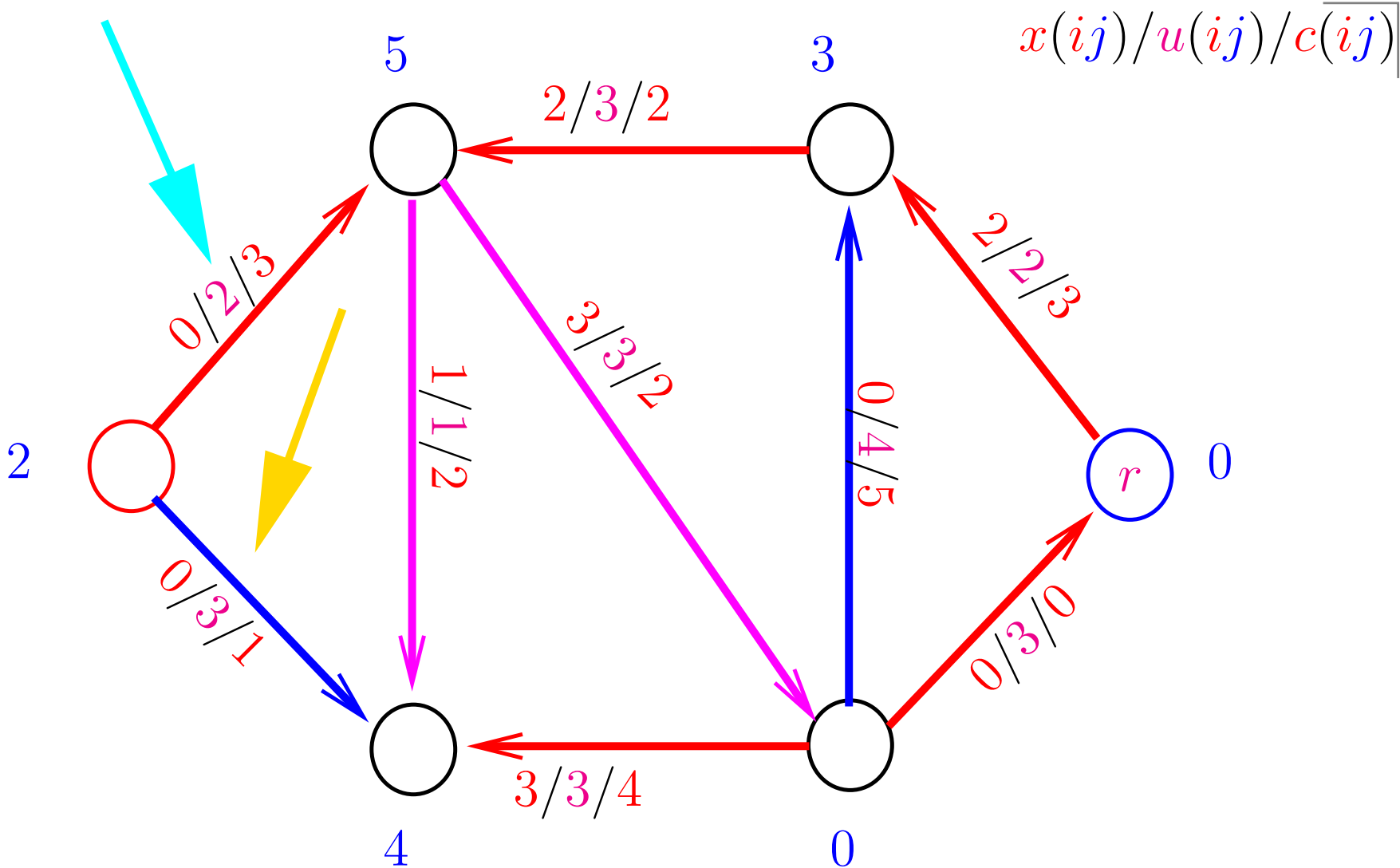
percorra O a partir do seu ápice na direção ij , se ij está em L , ou na direção ji , se ij está em U , e seja pq o **último** arco tal que $x(pq) = 0$ ou $x(pq) = u(pq)$.

Estrutura arbórea forte



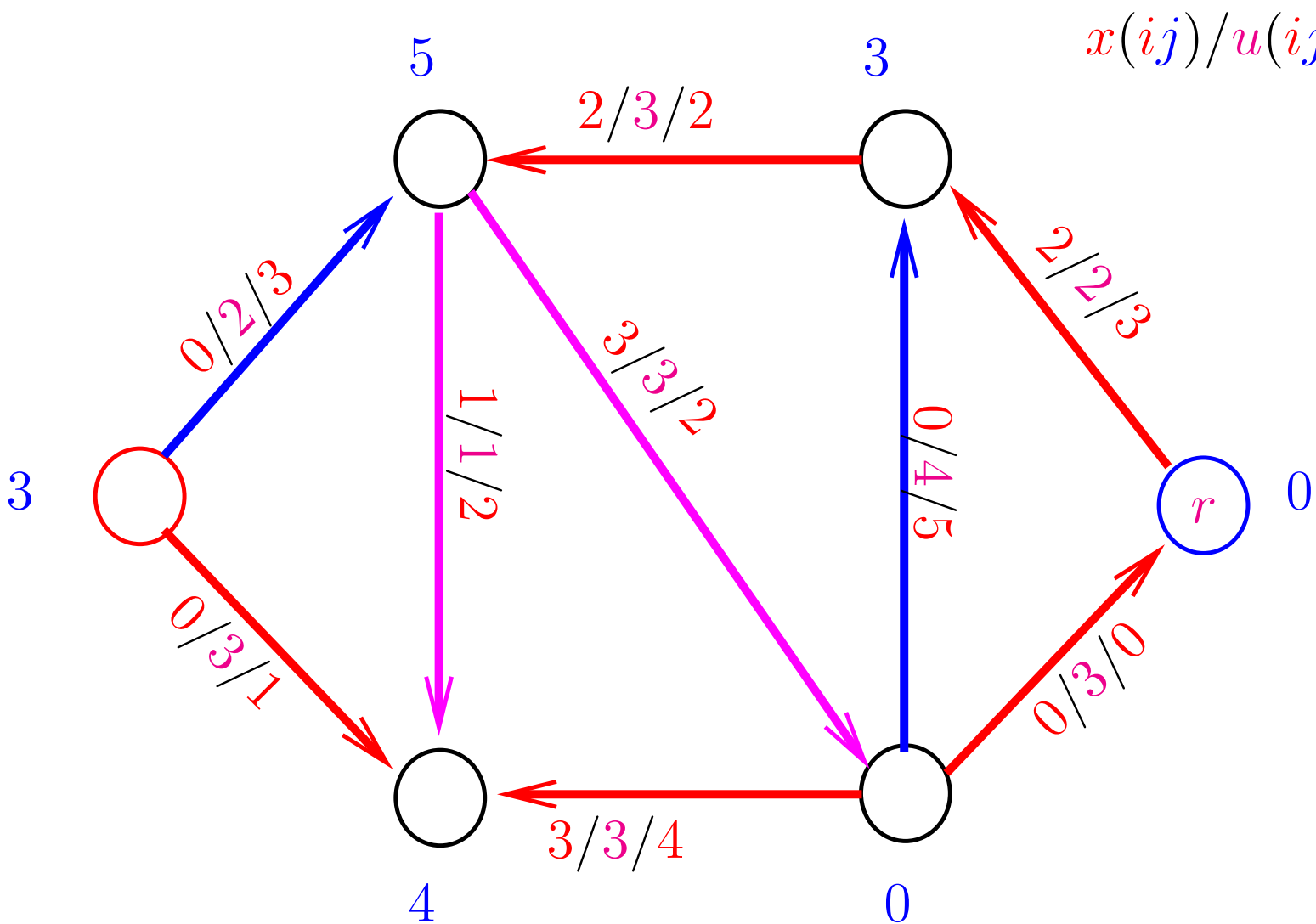
custo = 30

Estrutura arbórea forte



custo = 30

Estrutura arbórea forte



custo = 30

Convergência (1)

Fato. Utilizando a regra de Cunningham o número de iterações degeneradas consecutivas é $\leq 2nC$.

Demonstração (esboço). Podemos manter $y(r) = 0$ durante a execução do algoritmo.

Considere a quantidade

$$\Phi := \sum (y(i) : i \in N)$$

No início de cada iteração $-nC \leq \Phi \leq nC$.

Em uma iteração degenerada o potencial de **nenhum** nó **diminui**.

Em uma iteração degenerada o potencial de **pelo menos** um nó **aumenta**.

Convergência (2)

Assim, após cada iteração degenerada o valor de Φ **aumenta** de **pelo menos 1**.

Portanto, o número de iterações degeneradas consecutivas é $\leq 2nC$.

Em outras palavras, após de não mais que $2nC$ iterações **degeneradas** **deve** ocorrer um iteração **não-degenerada**.

Conclusão

O número de iterações do algoritmo
NETWORK-SIMPLEX é $O(nmUC^2)$.