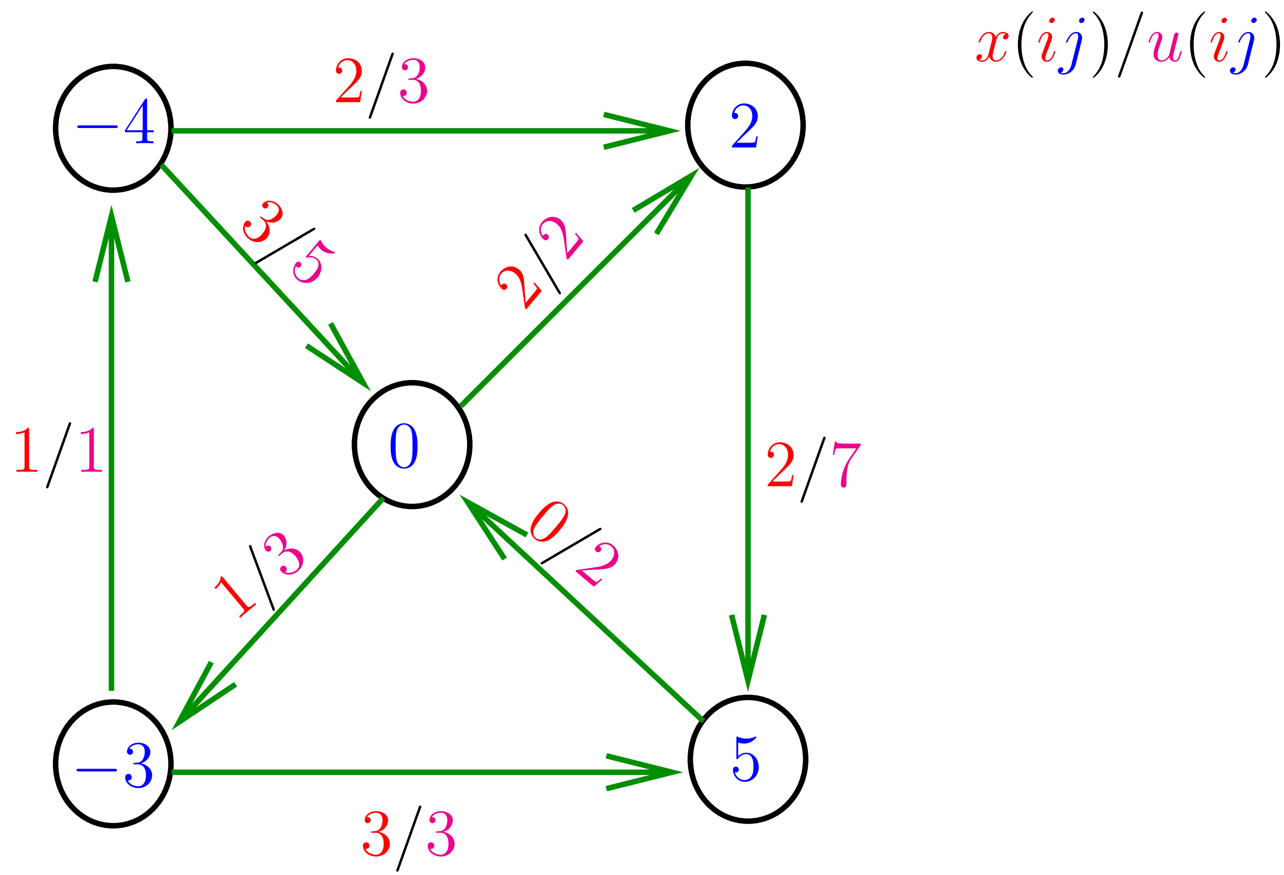
Melhores momentos

AULA PASSADA

Problema do fluxo viável

Problema: Dada uma rede (N, A, u, b) com função-capacidade u e função-demanda b, encontrar um fluxo que satisfaça b e respeite u.

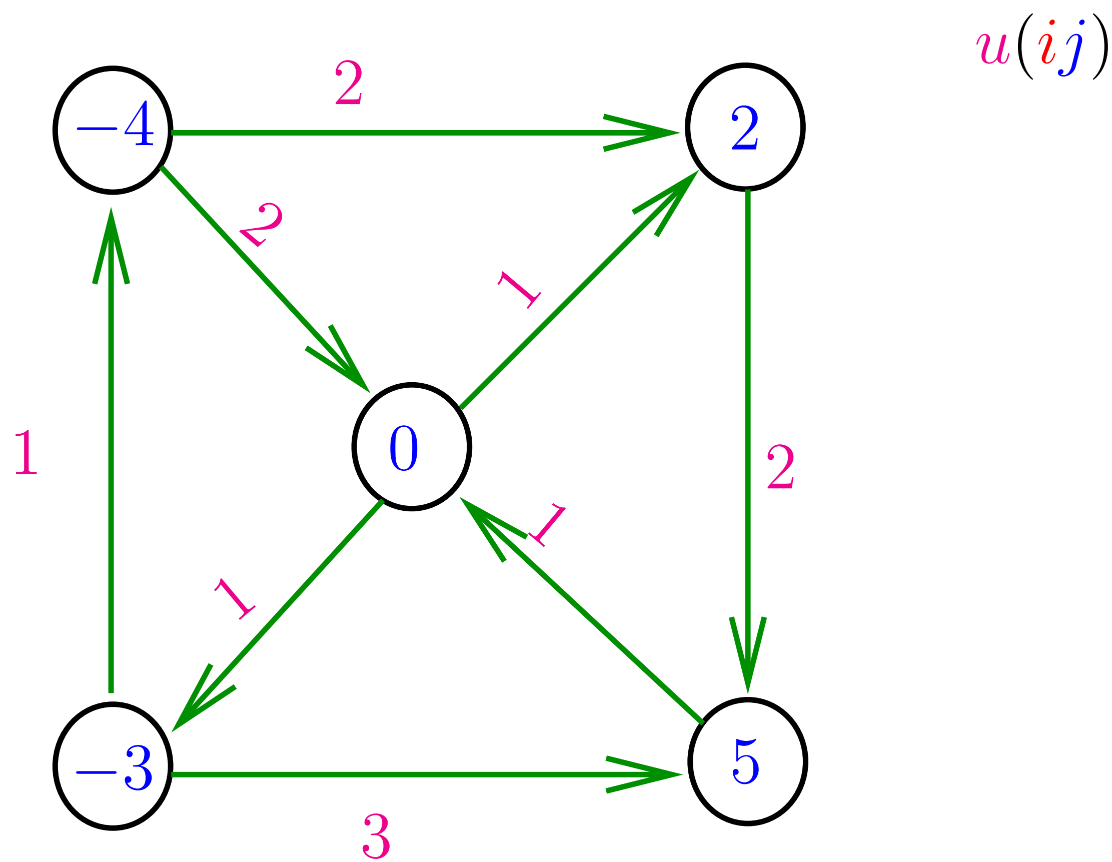


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto T de N,

$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.

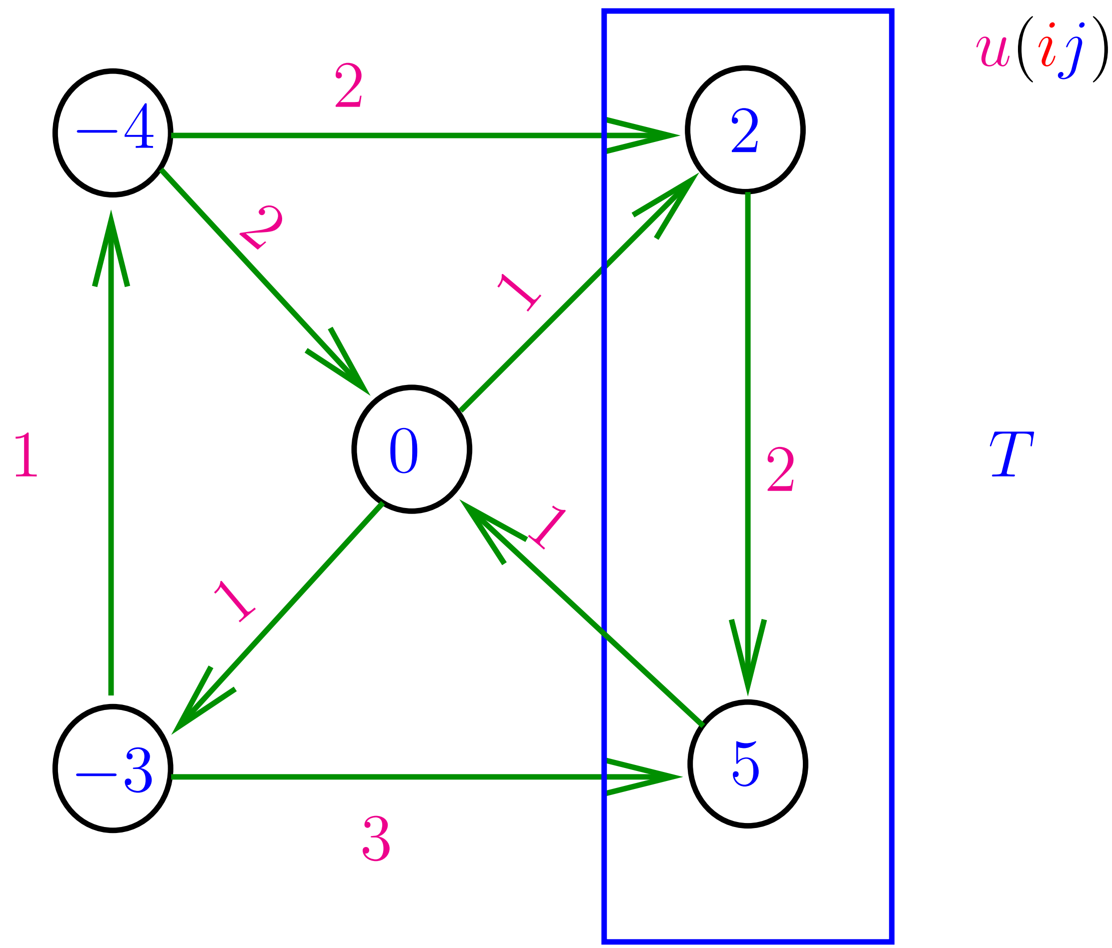


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto T de N,

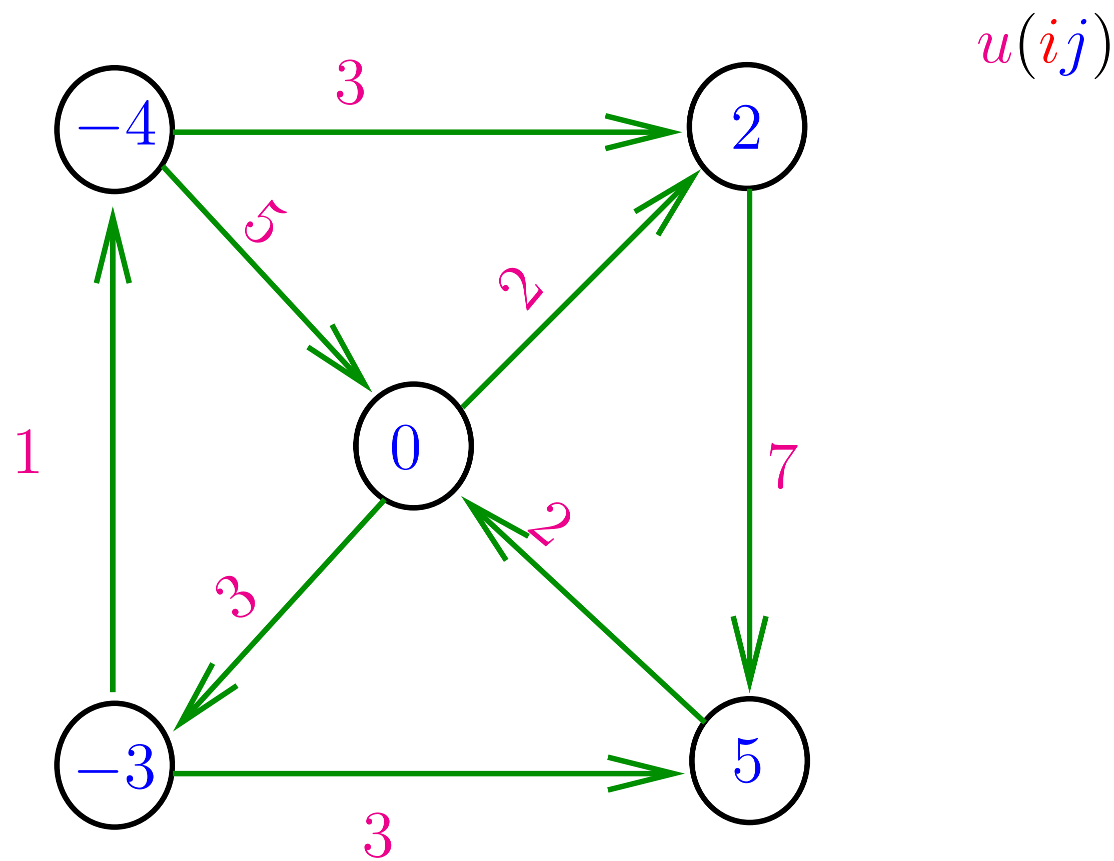
$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.



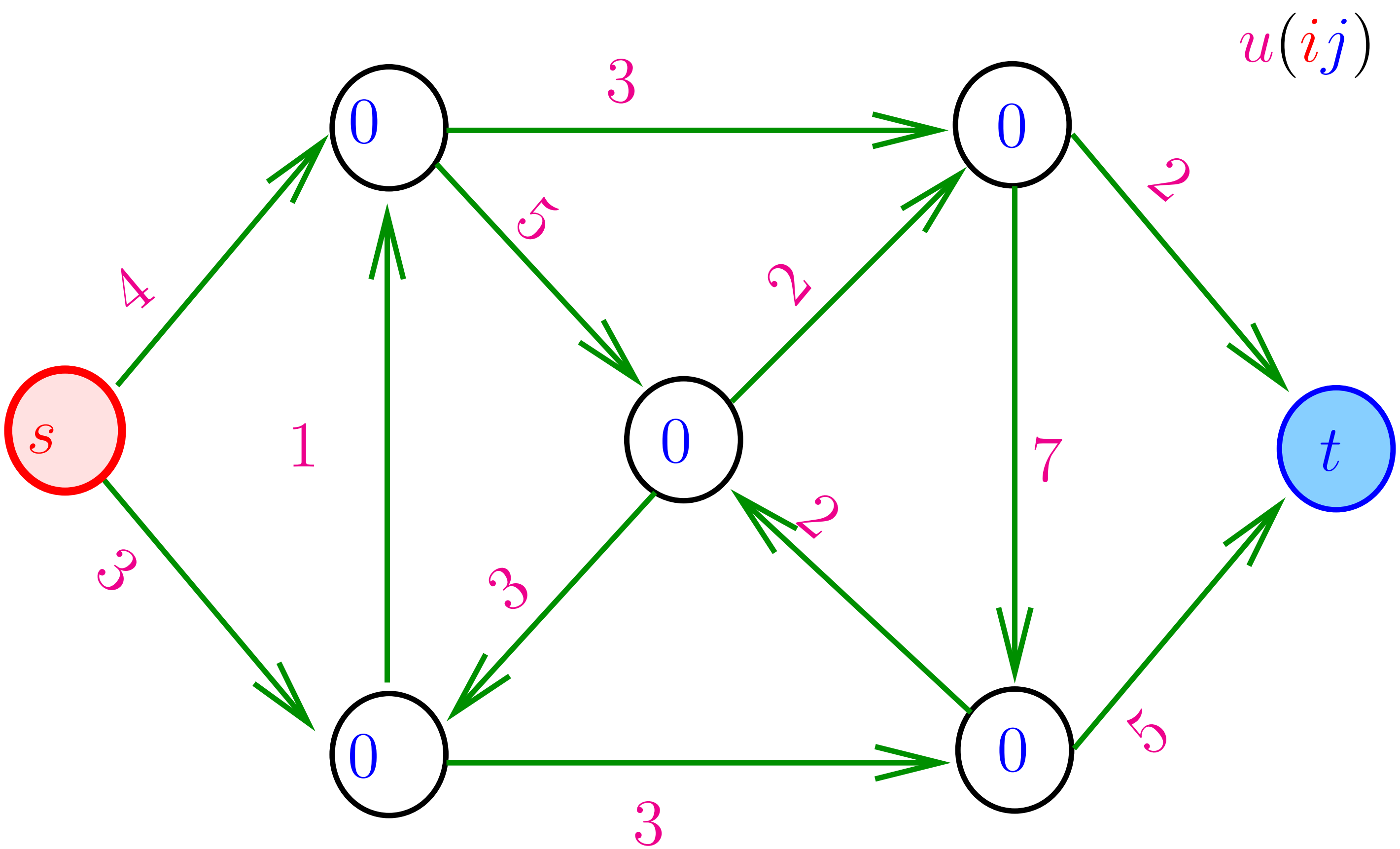
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



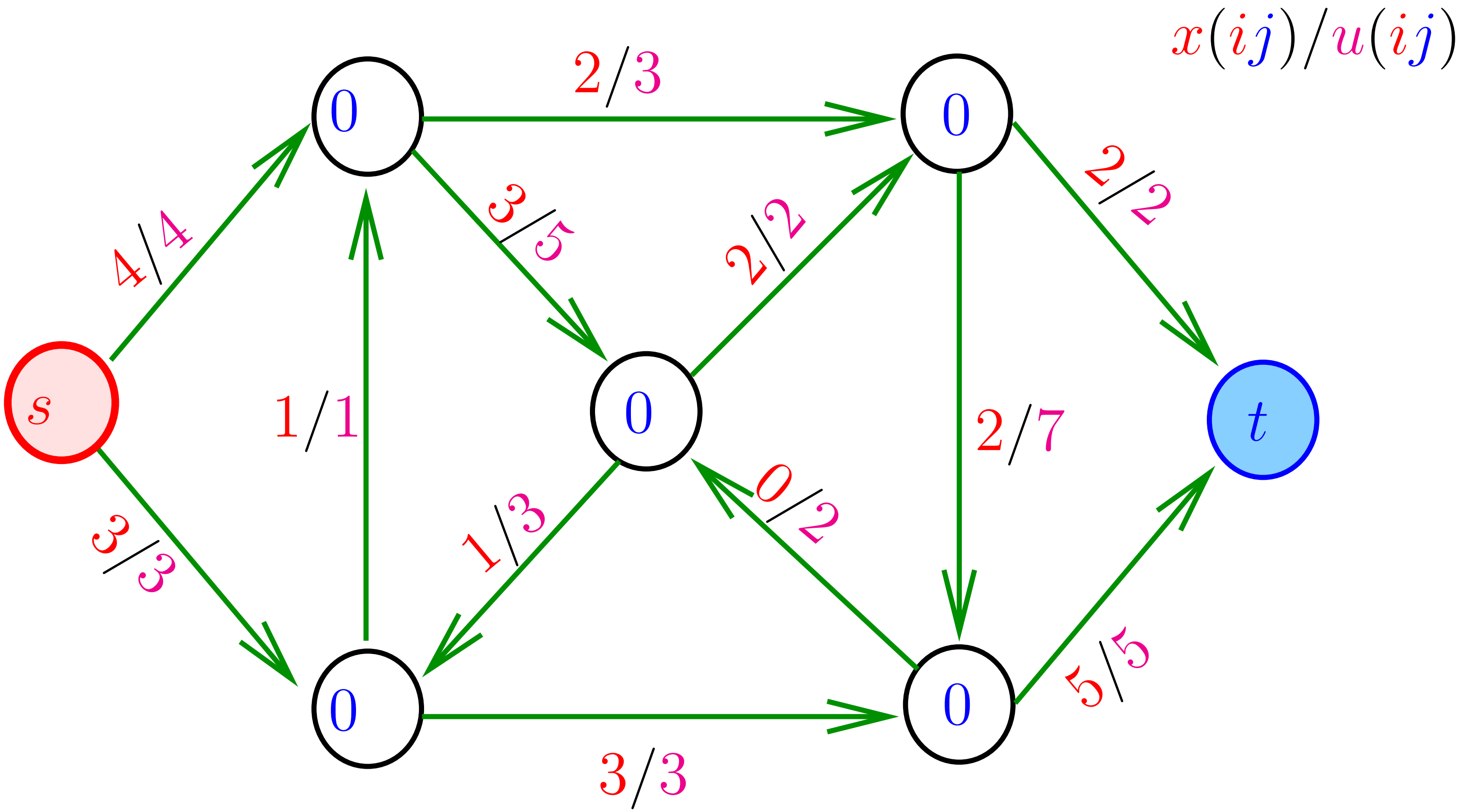
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



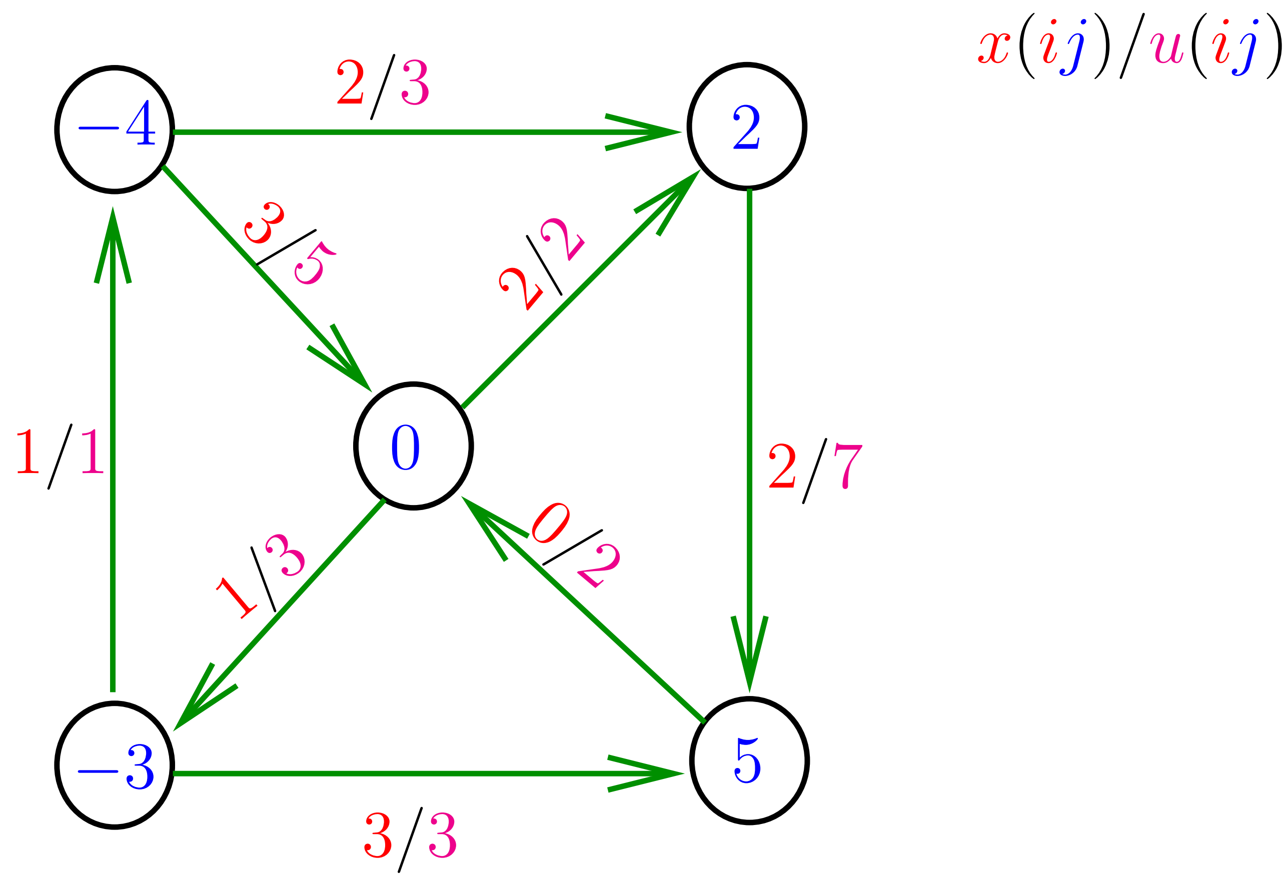
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



AULA 22

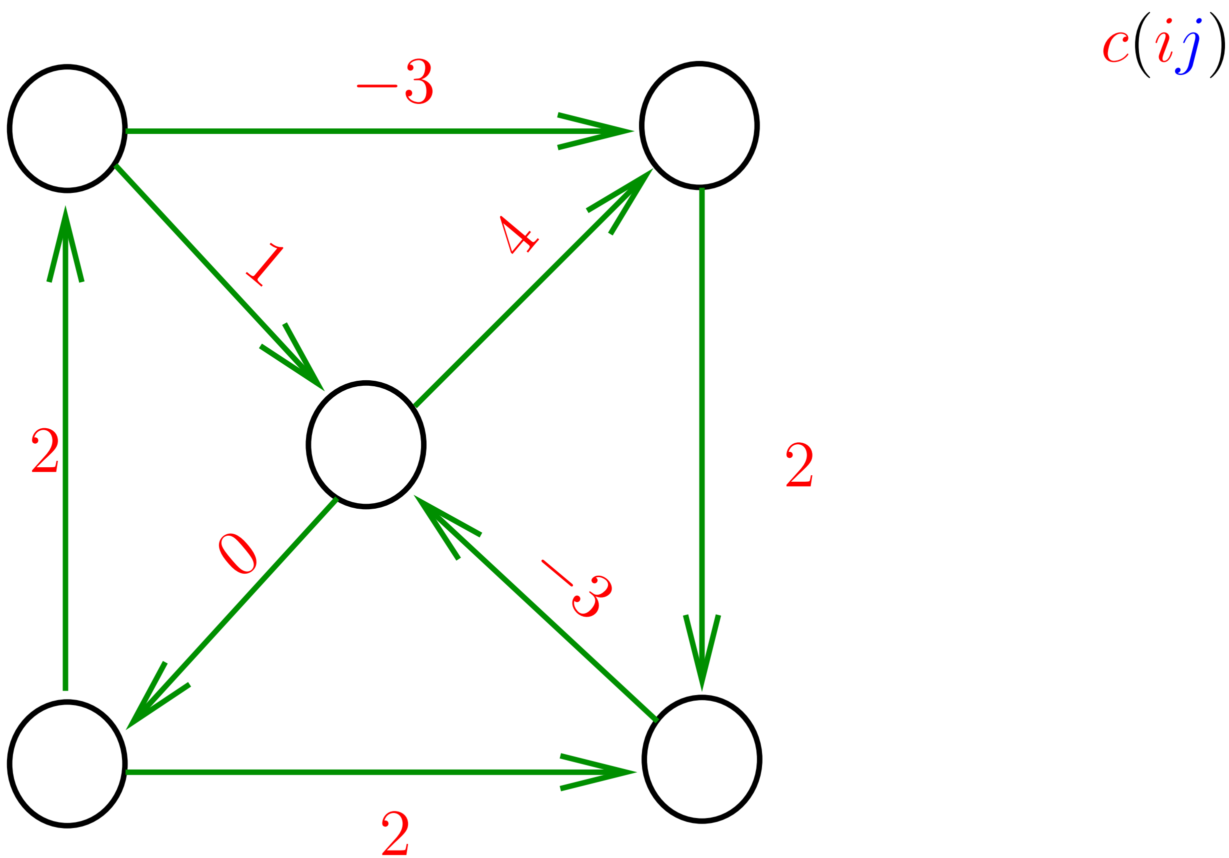
Fluxo viável de custo mínimo

PF 20.1, 20.2, 20.3

Função-custo

Uma função-custo em um grafo (N, A) é qualquer função que associa um número inteiro $c(ij)$ a cada arco ij, ou seja, qualquer função

$$c : A \to \mathbb{Z} \ .$$



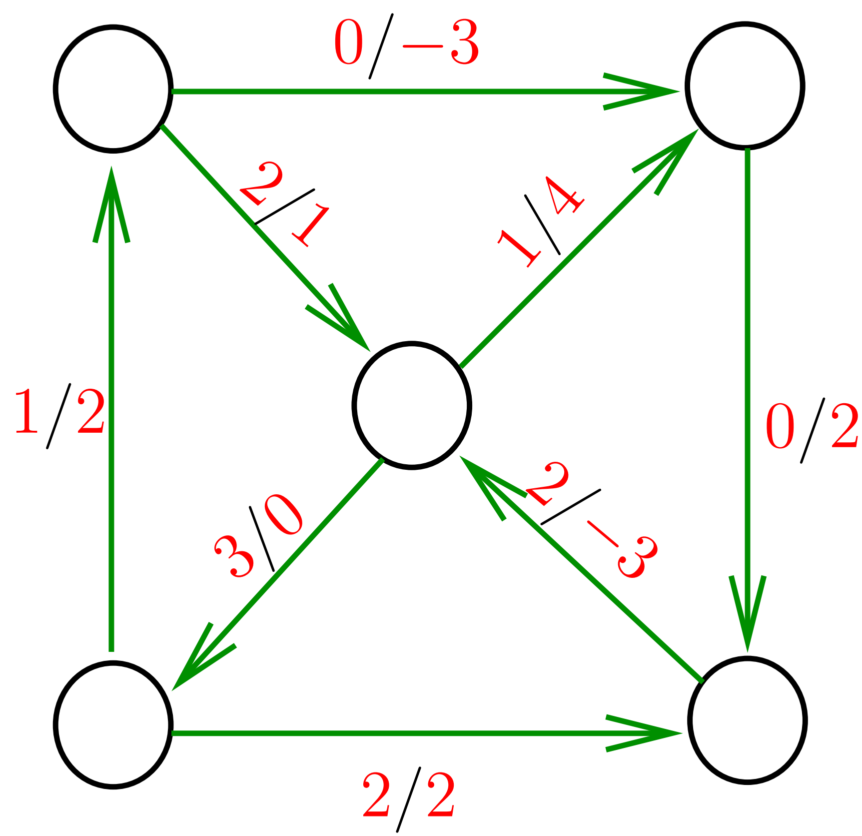
Fluxos e custos

O custo de um fluxo x é o número i,

$$cx := \sum (c(ij)x(ij) : ij \in A) \ .$$

Exemplo: um fluxo de custo 6

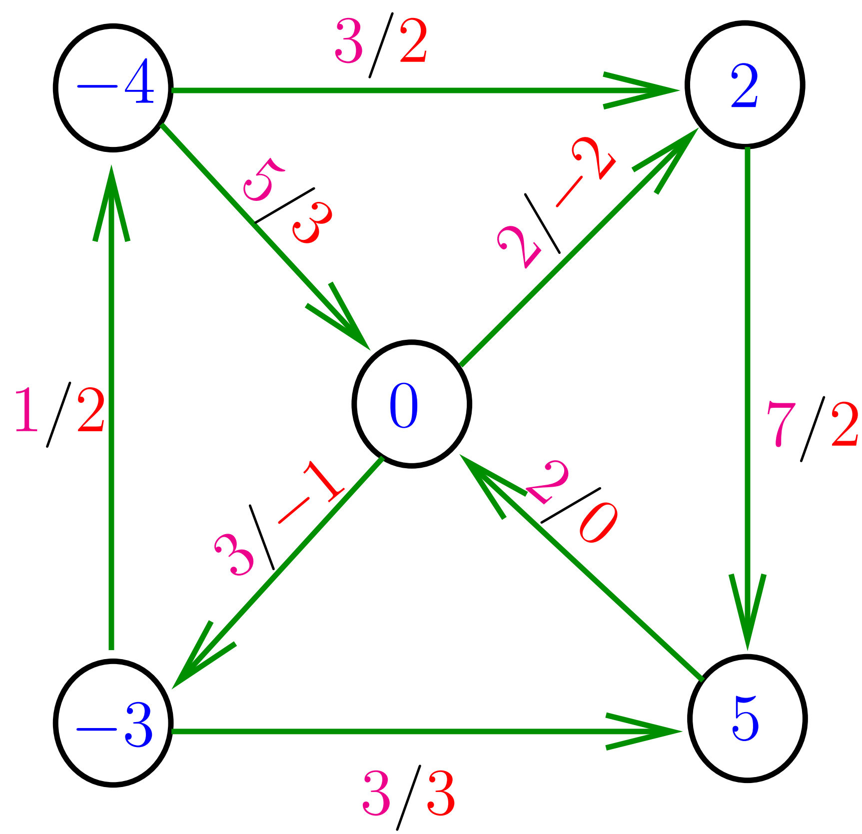
$x(ij)/c(ij)$



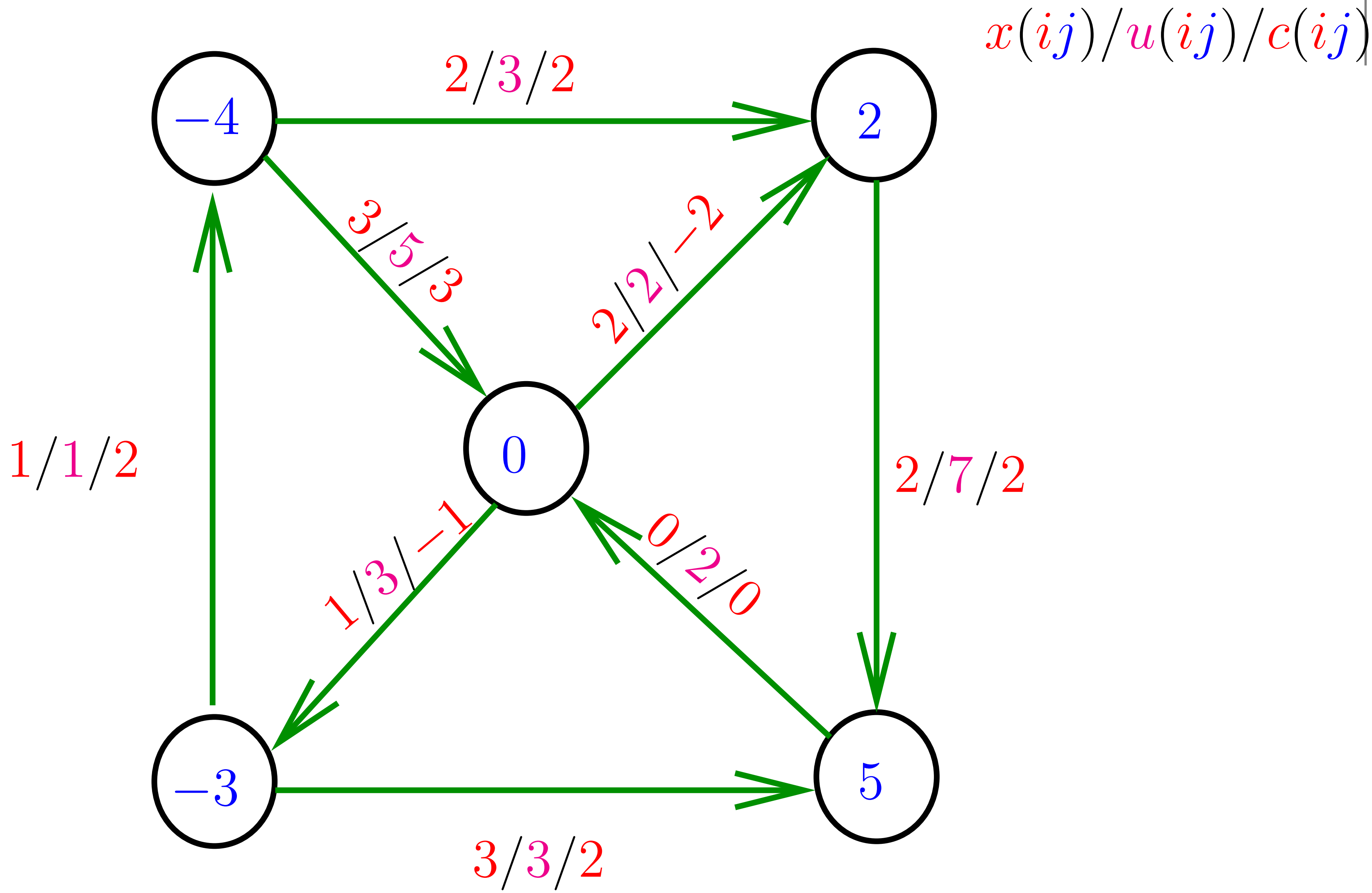
Problema do fluxo viável de custo mínimo

Dada uma rede (N, A, u, b, c) com função-capacidade u, função-demanda b e função-custo c, encontrar um fluxo de custo mínimo que satisfaça b e respeite u.

$u(ij)/c(ij)$

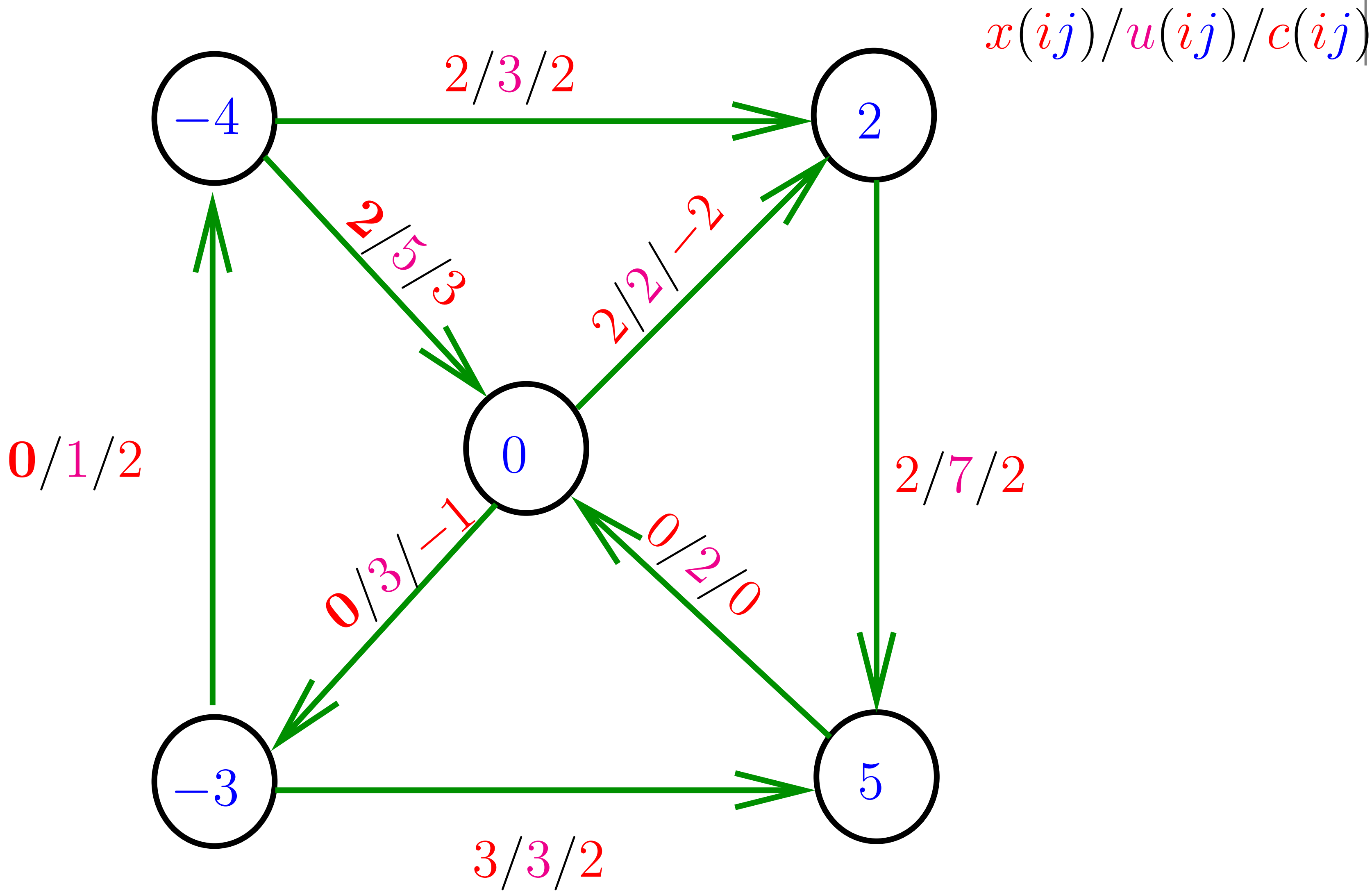


É fluxo de custo mínimo?



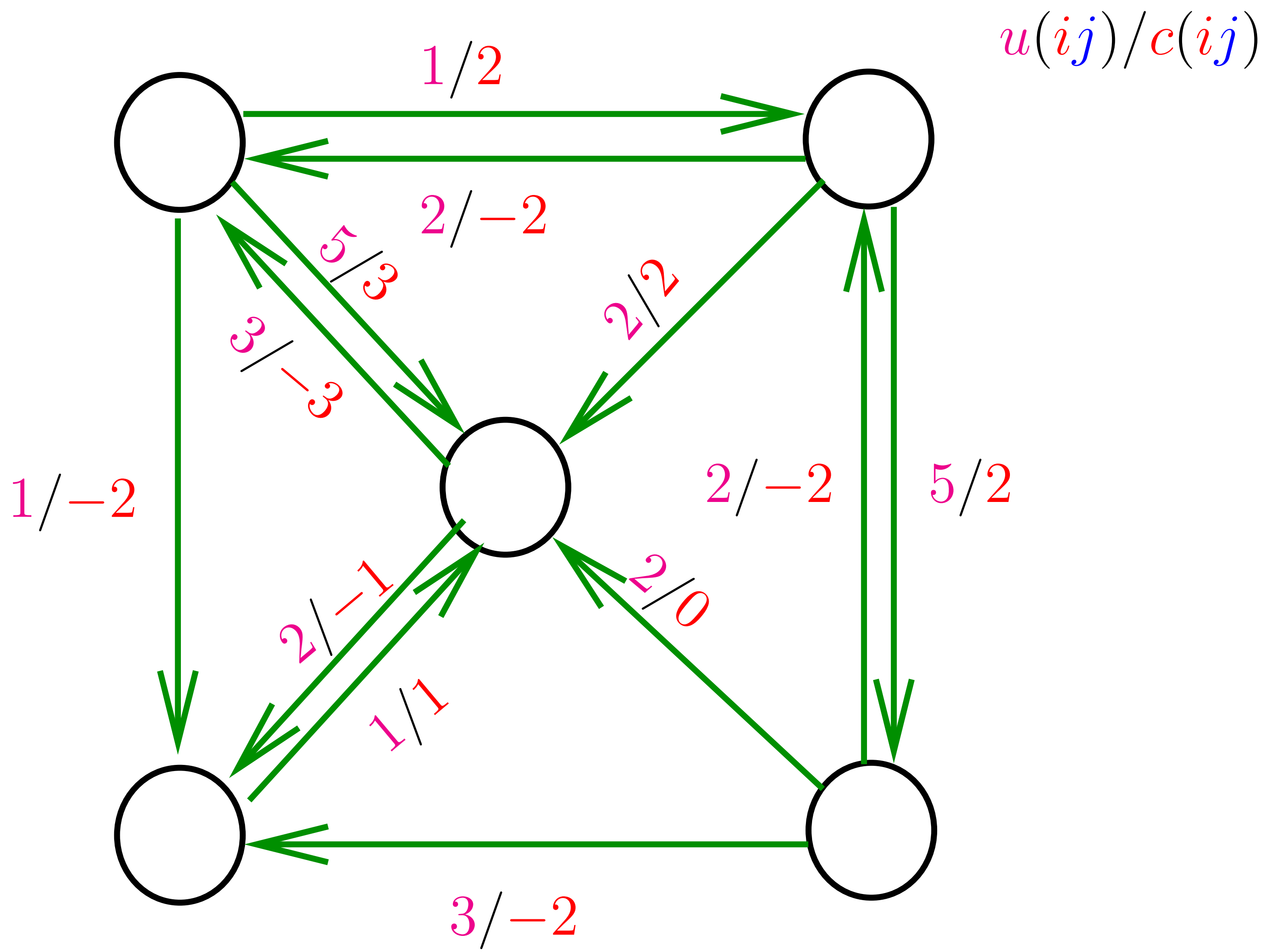
$$cx = 2\times 2+1\times 2+3\times 3+2\times -2+2\times 2+1\times -1+0\times 0+3\times 2 = 20$$

E agora, é fluxo de custo mínimo?

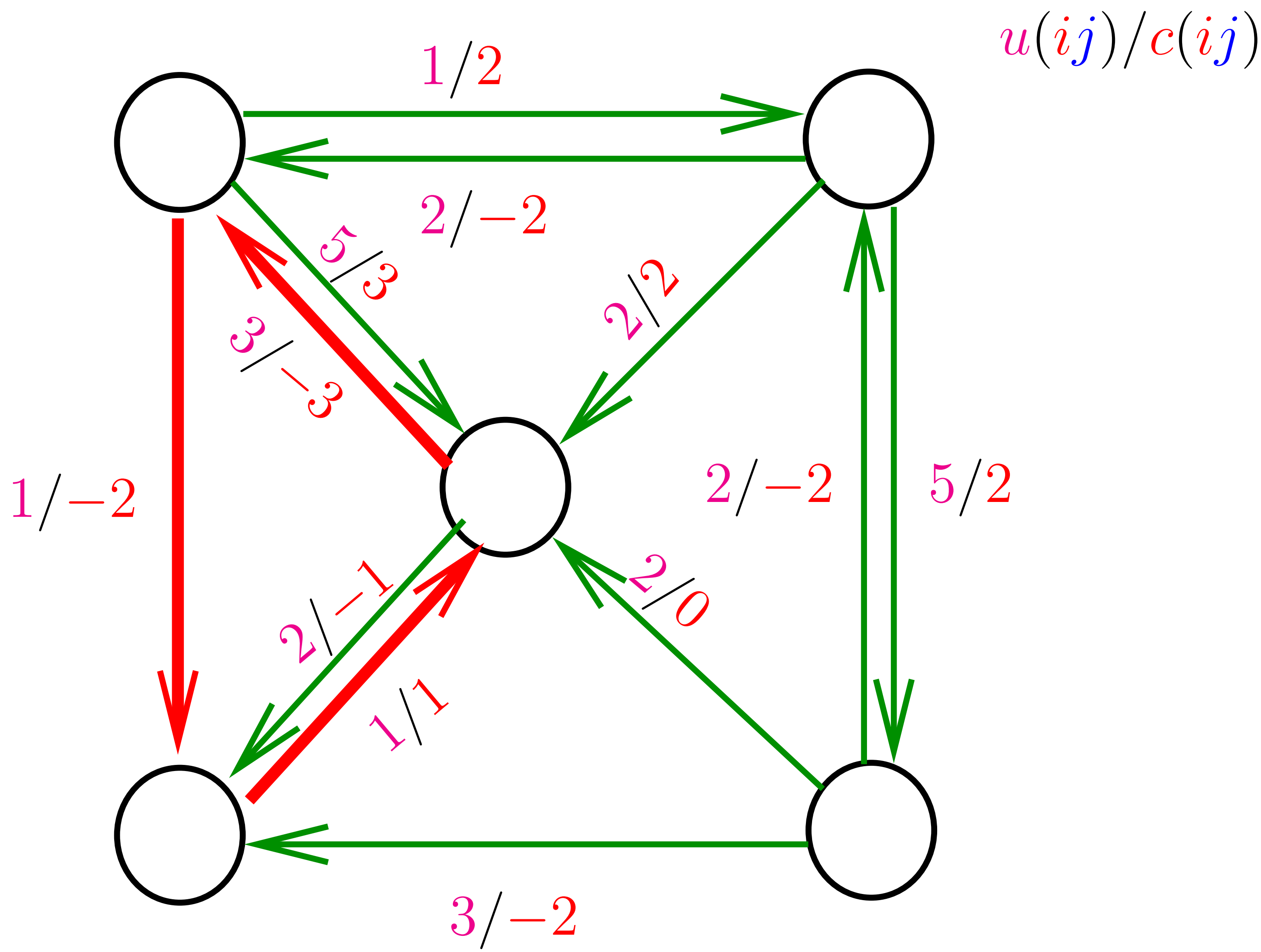


$$cx = 2\times2+\mathbf{0}\times2+\mathbf{2}\times3+2\times-2+2\times2+\mathbf{0}\times-1+0\times0+3\times2 = 16$$

Rede residual



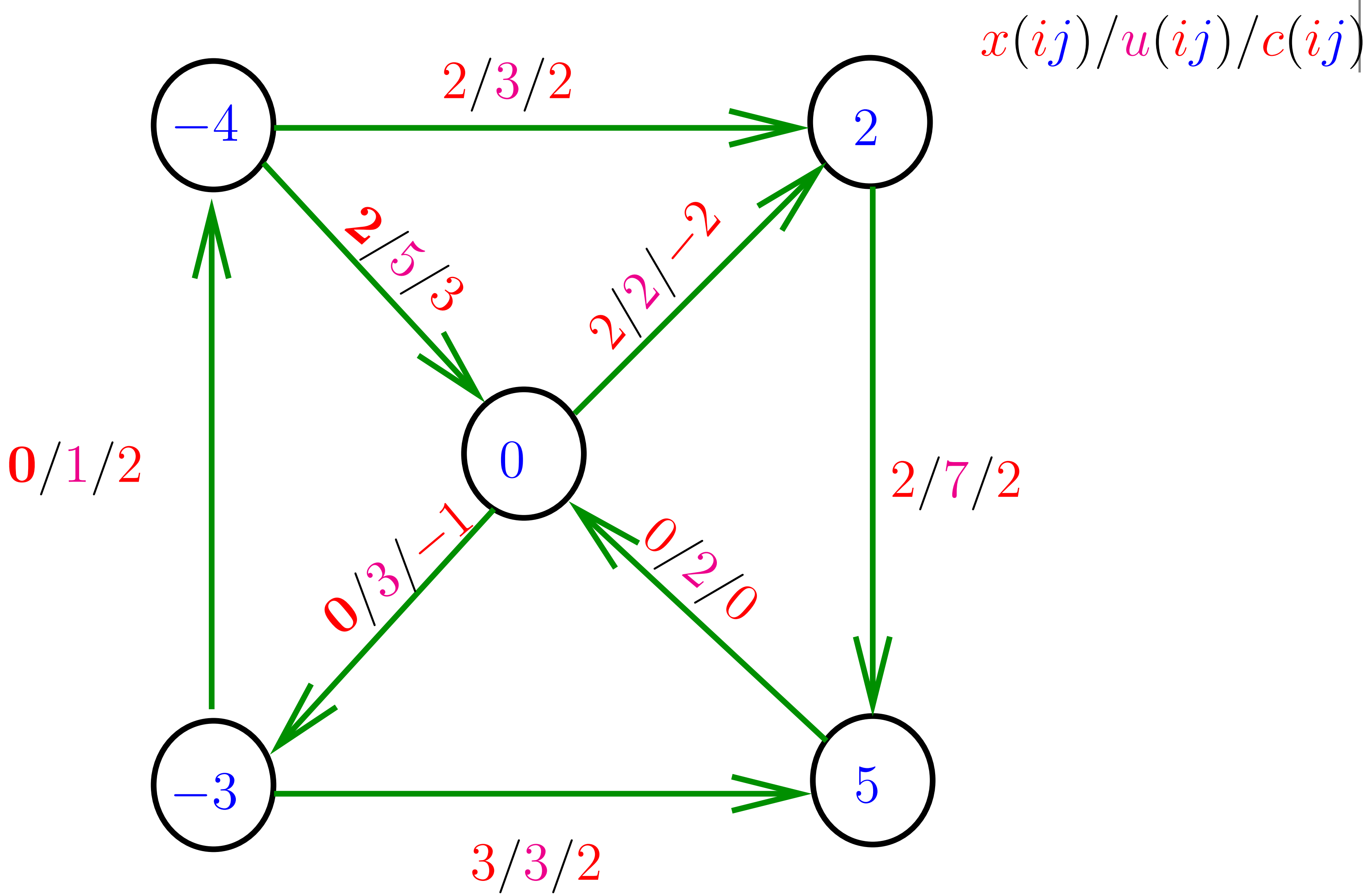
Ciclo negativo



Conclusão

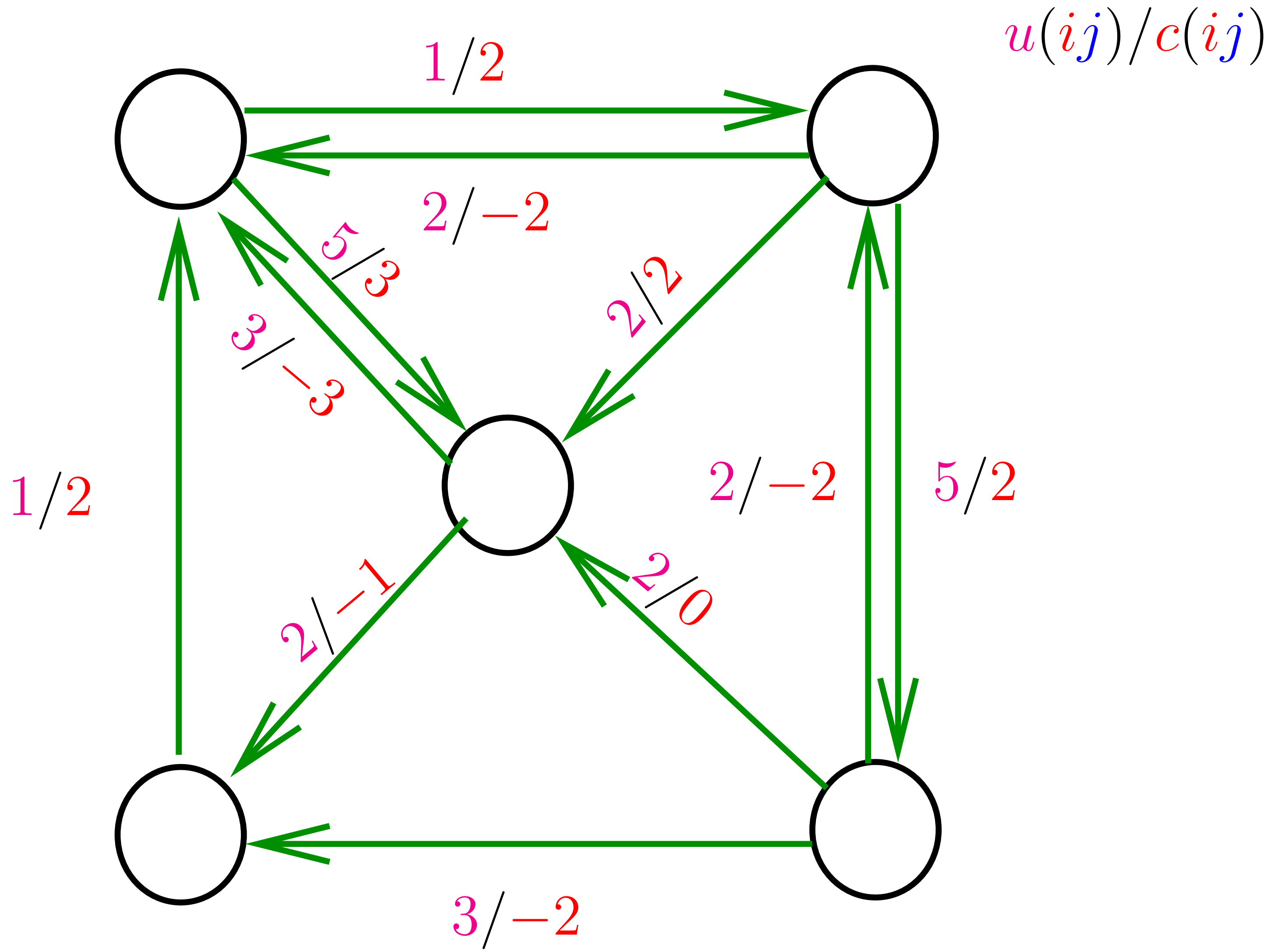
Se x é um fluxo viável e existe um ciclo de custo negativo na rede residual, então x não é um fluxo viável de custo mínimo.

E agora, é fluxo de custo mínimo?

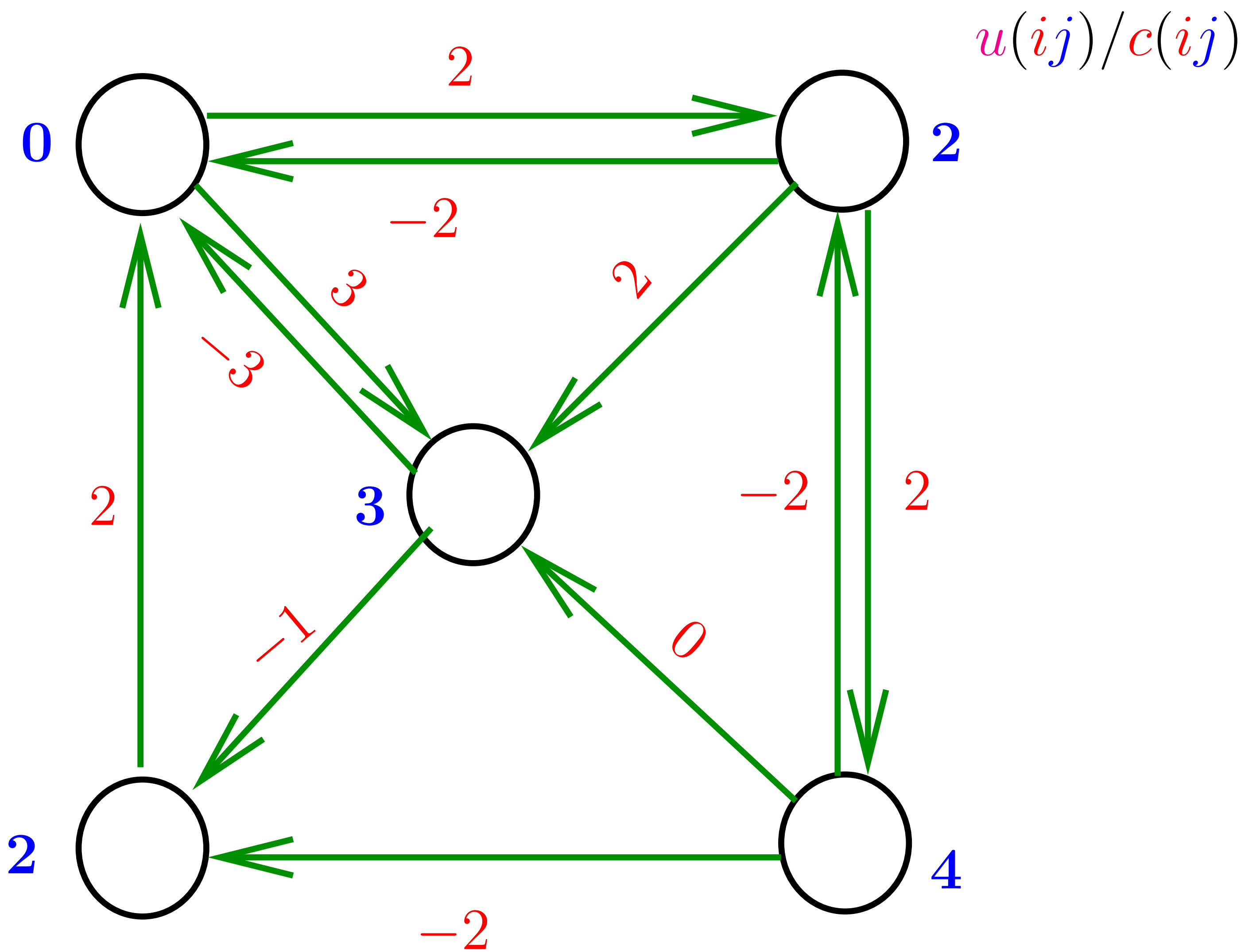


$$cx = 2\times2+0\times2+2\times3+2\times-2+2\times2+0\times-1+0\times0+3\times2 = 16$$

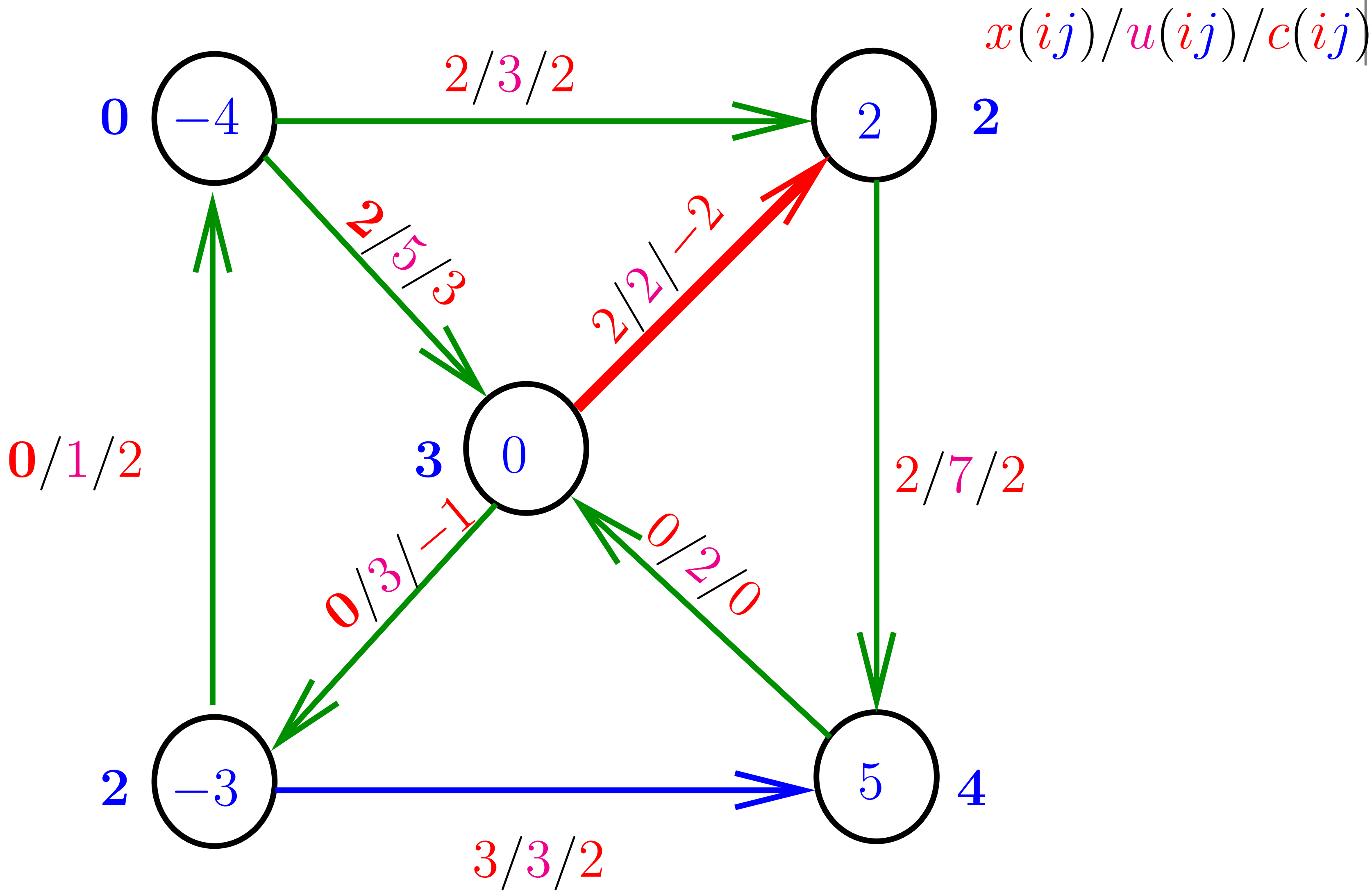
Rede residual



Potenciais



Rede e potencias



$$cx = 2\times2+0\times2+2\times3+2\times-2+2\times2+0\times-1+0\times0+3\times2 = 16$$

$(c + w)$-potenciais

Se y é uma função-potencial, então y é uma função

$(c + w)$-potencial

para alguma função-custo w de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

Demonstração (esboço):

Defina w de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$: para cada arco ij,

$$w(ij) := \max\{0, y(j) - y(i) - c(ij)\}$$

Observação: com essa definição de w temos que

$$y(j) - y(i) \leq c(ij) + w(ij),$$

para cada arco ij,

Lema da dualidade

Se x é um fluxo viável então

$$cx \geq yb - wu.$$

para qualquer função-custo $w \geq 0$ e $(c + w)$-potencial y.

Chamaremos tal par (y, w) de solução dual-viável.

Demonstração

$$\begin{aligned}
yb &= \sum_{i} y(i)b(i) \\
&= \sum_{i} y(i)(x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})) \\
&= \sum_{i} y(i)x(\bar{i}, i) - \sum_{i} y(i)x(i, \bar{i}) \\
&= \sum_{ij} y(j)x(ij) - \sum_{ij} y(i)x(ij) \\
&= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\
&\leq \sum_{ij} (c(ij) + w(ij))x(ij) \\
&= (c + w)x \quad \leq \quad cx + wu\ .
\end{aligned}$$

Conseqüência

Se x é um fluxo viável tal que $cx = yb - wu$ para alguma função-custo $w \geq 0$ e algum $(c + w)$-potencial y então x é um fluxo tem custo mínimo.

Folgas complementares (1)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$x(ij) > 0 \Rightarrow y(j) - y(i) \geq c(ij) \quad \text{e}$$

$$x(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij) \; .$$

Folgas complementares (2)

Seja x um fluxo que respeita u.

Seja y um potencial.

Diremos que as folgas de x e y são complementares se, para cada arco ij,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Folgas complementares (3)

Fato. Se x é um fluxo viável e suas folgas são complementares às de algum potencial y então x tem custo mínimo.

Demonstração (esboço):
Defina w de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$: para cada arco ij,

$$w(ij) := \max\{0, y(j) - y(i) - c(ij)\}$$

e defina

$$A_{<} := \{ij : y(j) - y(i) < c(ij)\}$$
$$A_{=} := \{ij : y(j) - y(i) = c(ij)\}$$
$$A_{>} := \{ij : y(j) - y(i) > c(ij)\}$$

Folgas complementares (4)

$$cx = \sum_{A_=} (y(j) - y(i))x(ij) + \sum_{A_>} c(ij)u(ij)$$

$$wu = \sum_{A_>} (y(j) - y(i))x(ij) - \sum_{A_>} c(ij)u(ij)$$

Logo,

$$\begin{aligned} cx + wu &= \sum_{A_=} (y(j) - y(i))x(ij) + \sum_{A_>} (y(j) - y(i))x(ij) \\ &= \sum_{ij} (y(j) - y(i))x(ij) \\ &= yb\,. \end{aligned}$$

Conclusão

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

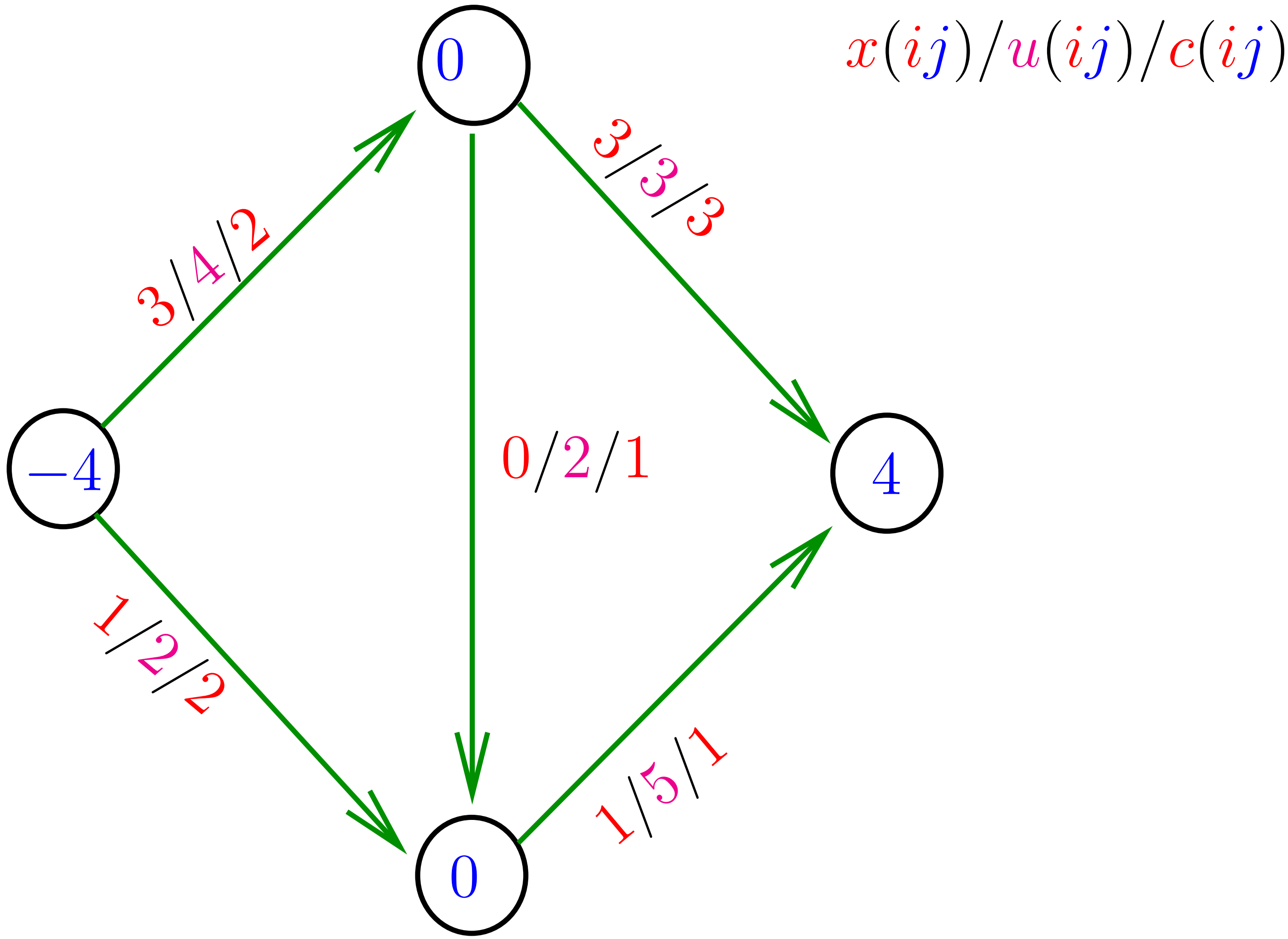
- x é um fluxo viável de custo mínimo;
- existe um ciclo de custo negativo na rede residual.

Algoritmo de Klein

PF 22.1, 22.2, 22.3

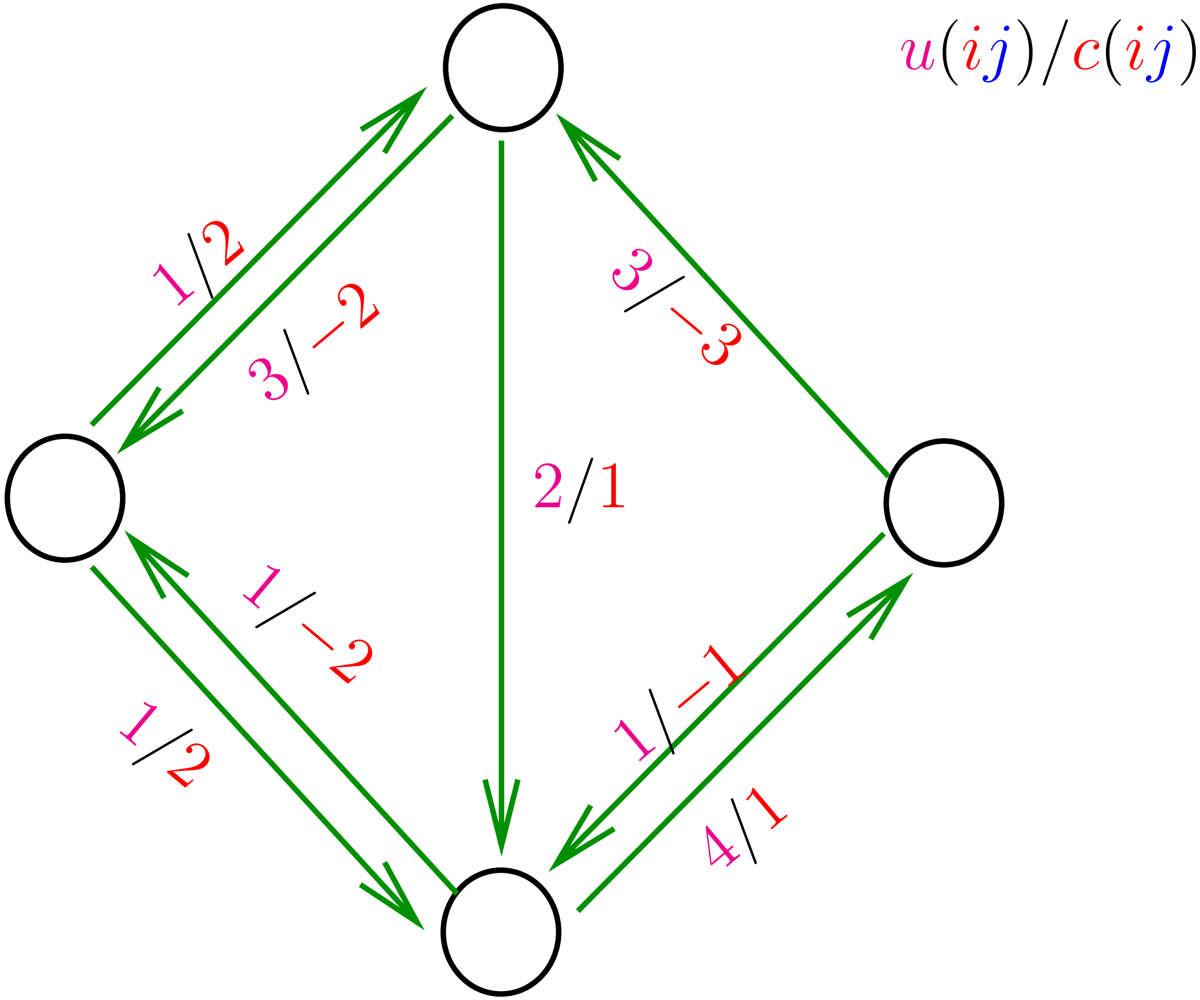
Cycle Cancelling Algorithm

É fluxo de custo mínimo?

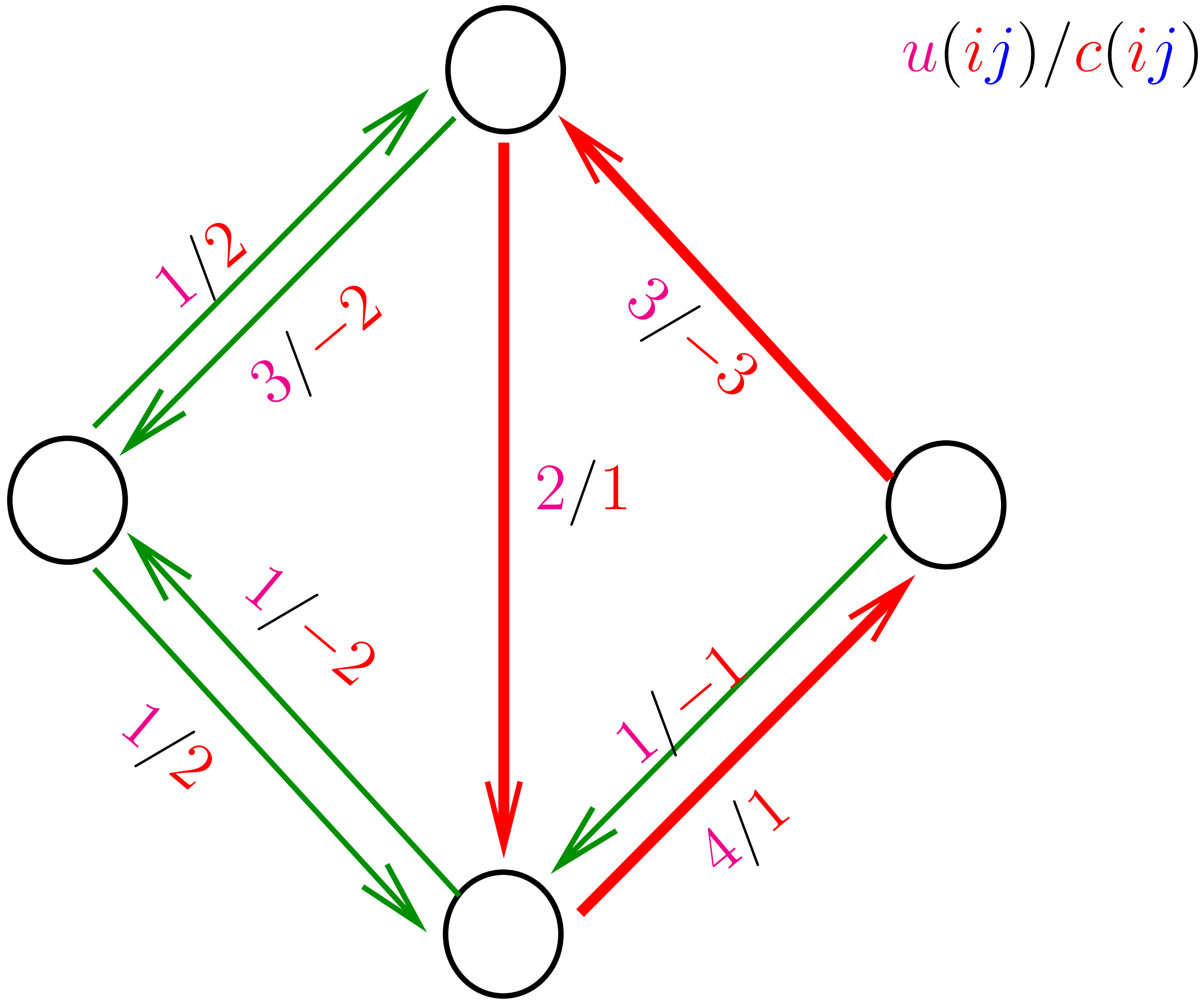


Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 18$

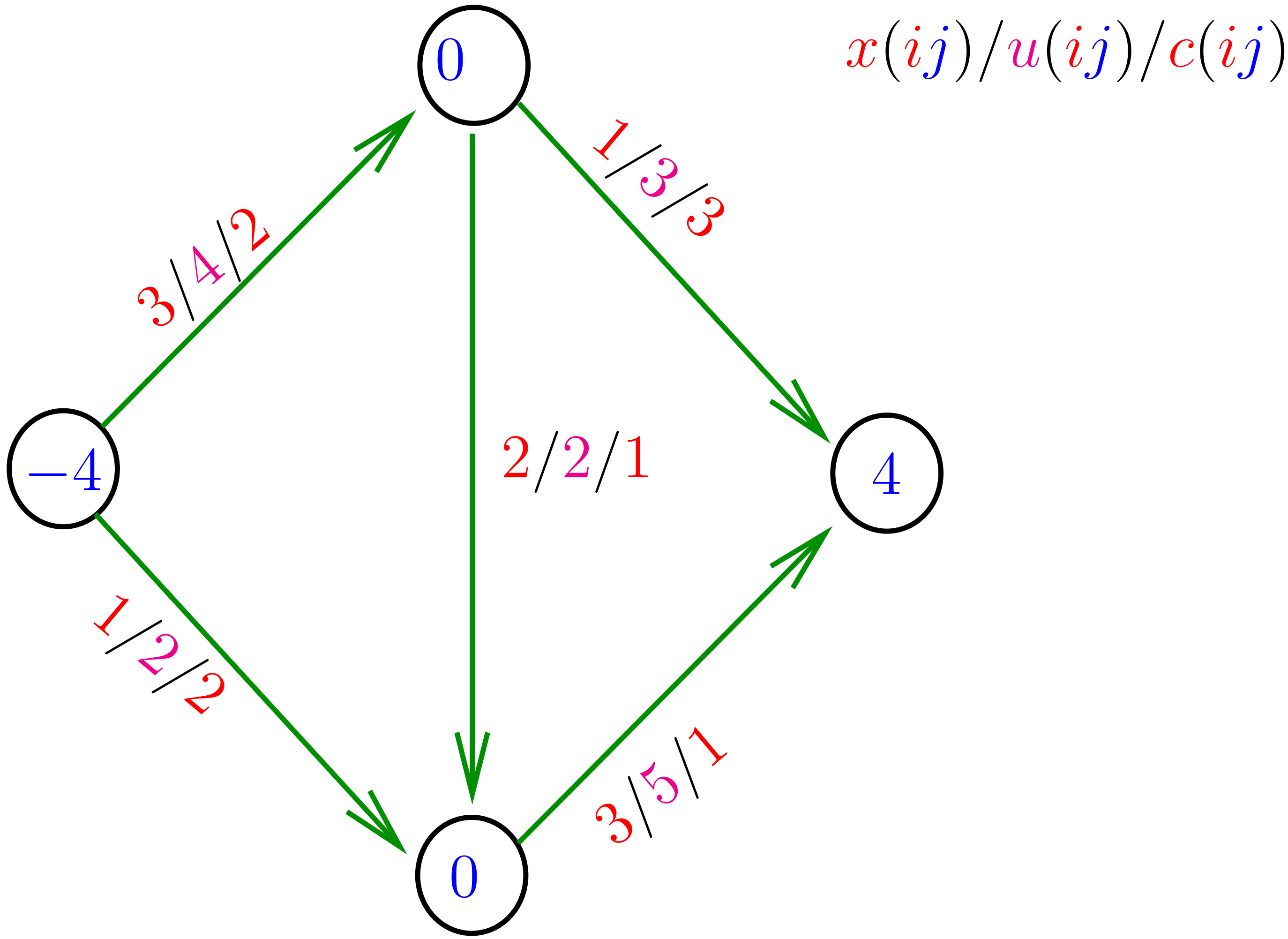
Rede residual



Ciclo negativo

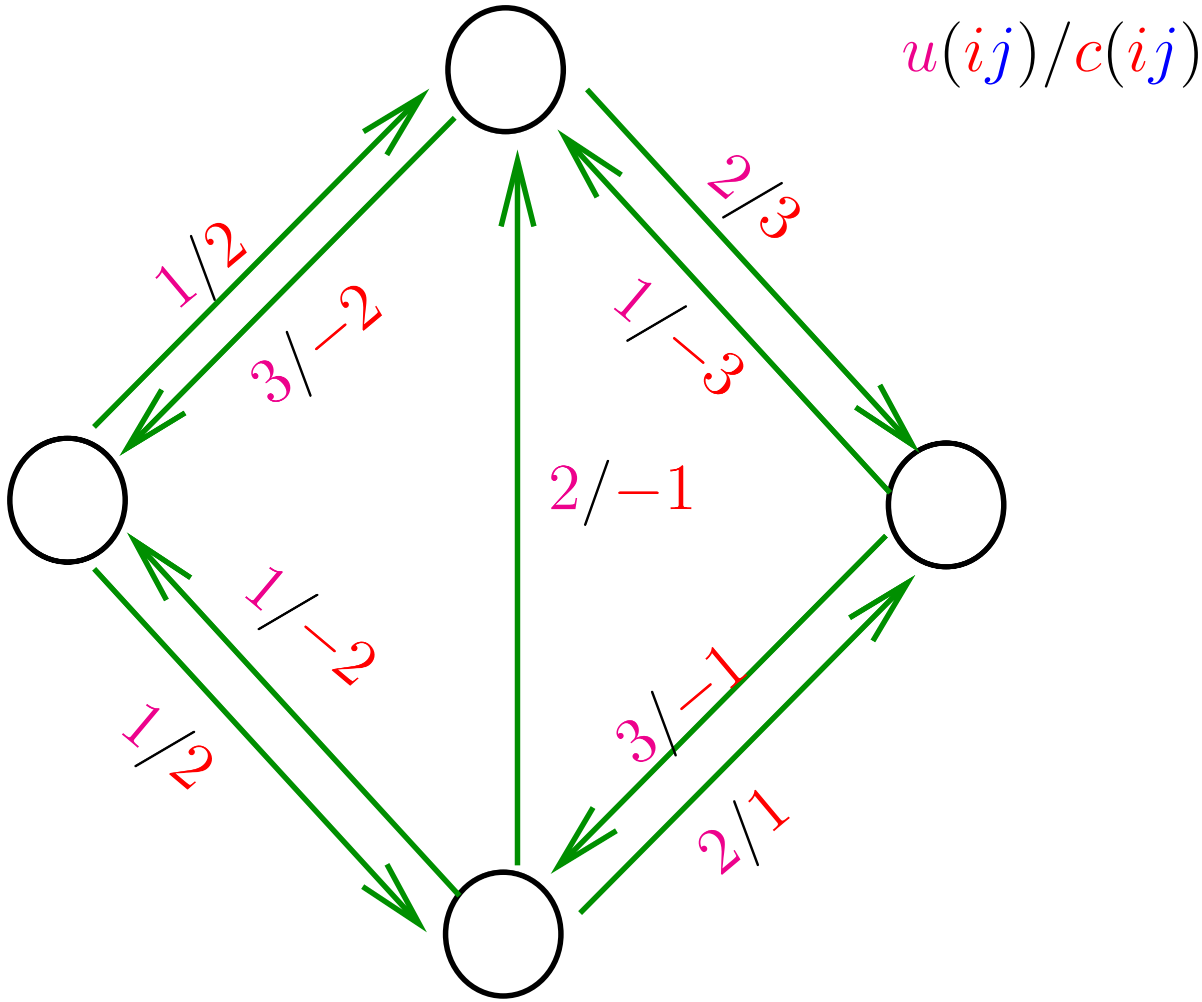


É fluxo de custo mínimo?

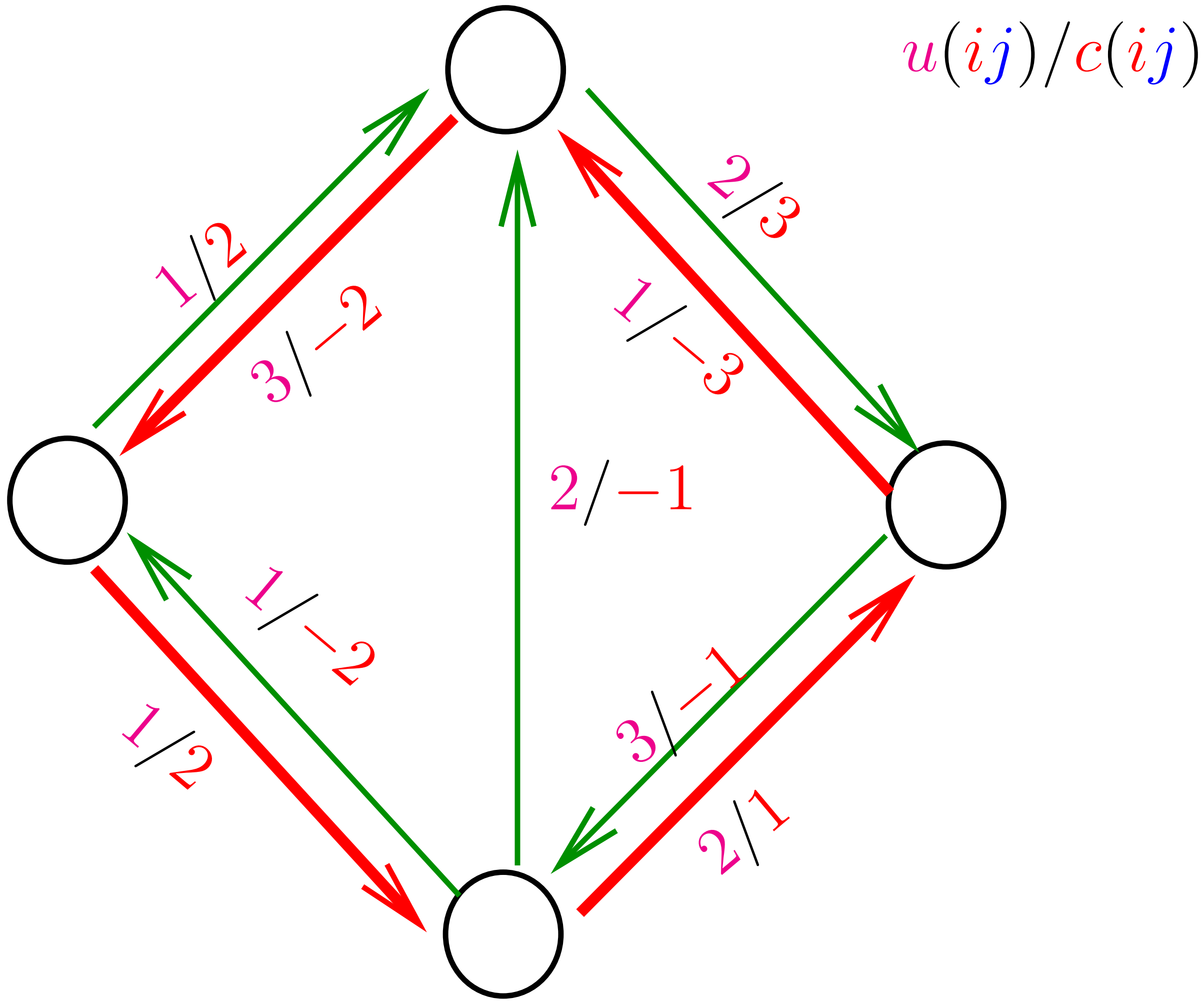


Custo $= 3 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 1 = 16$

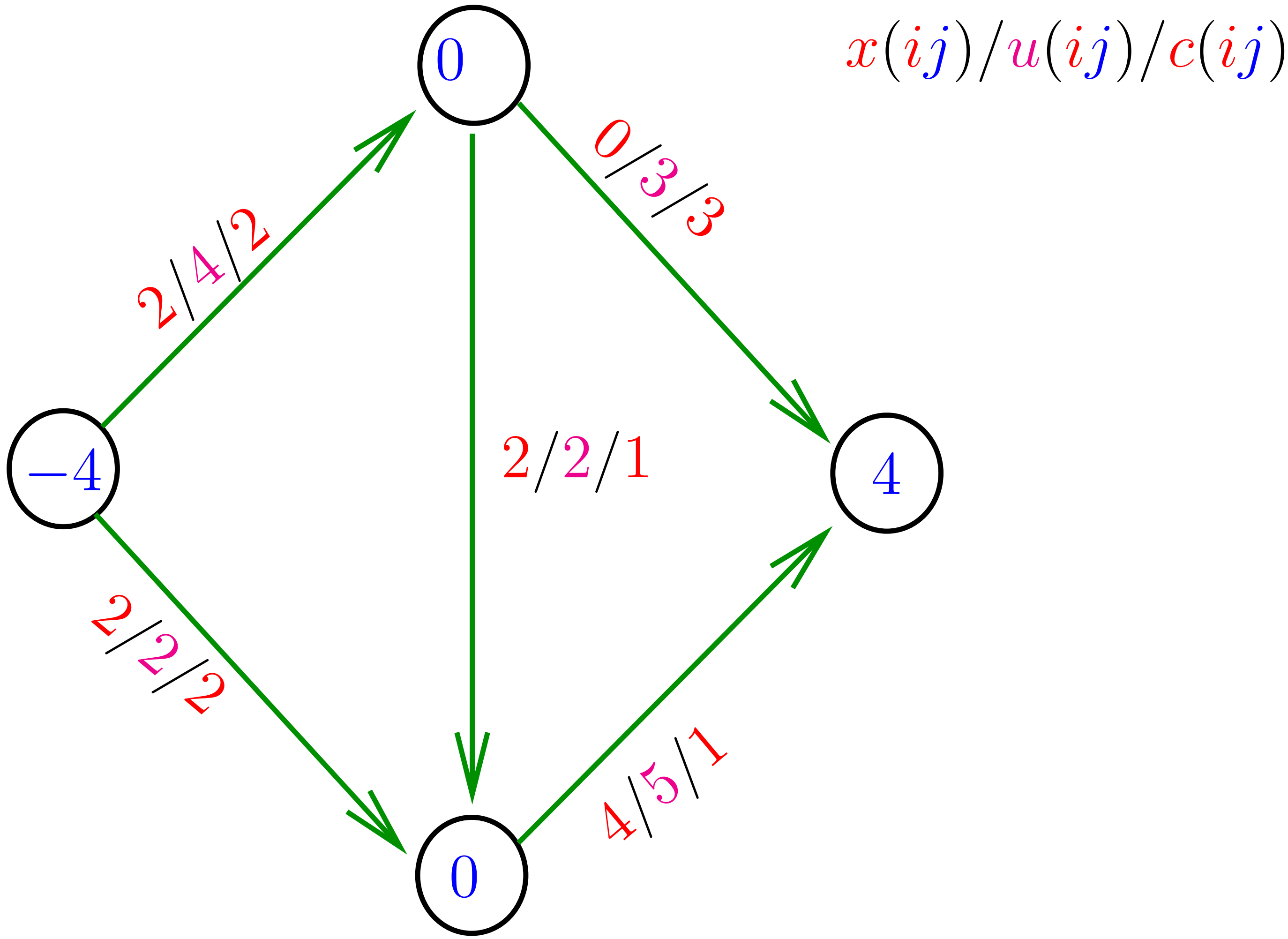
Rede residual



Ciclo negativo

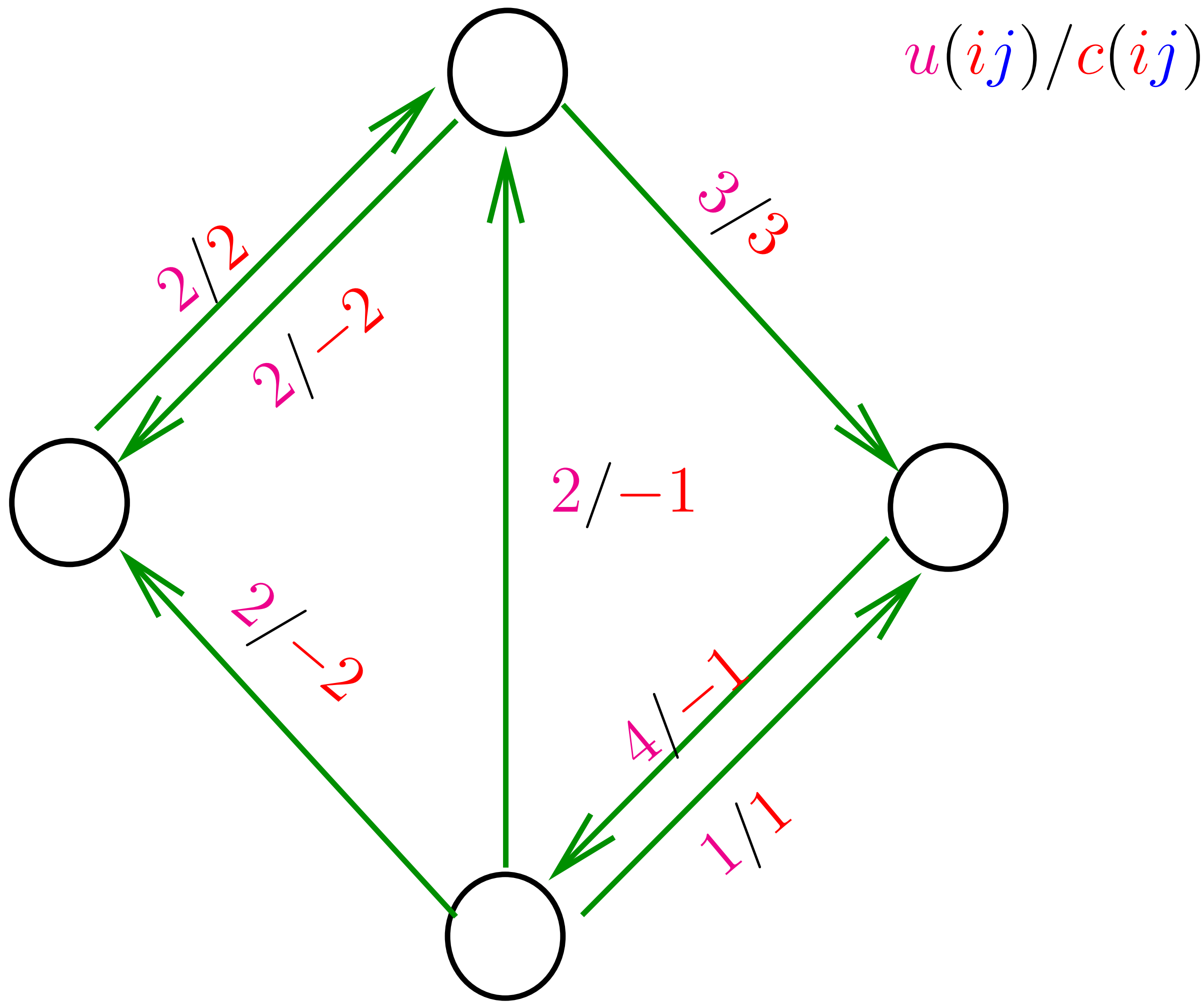


É fluxo de custo mínimo?

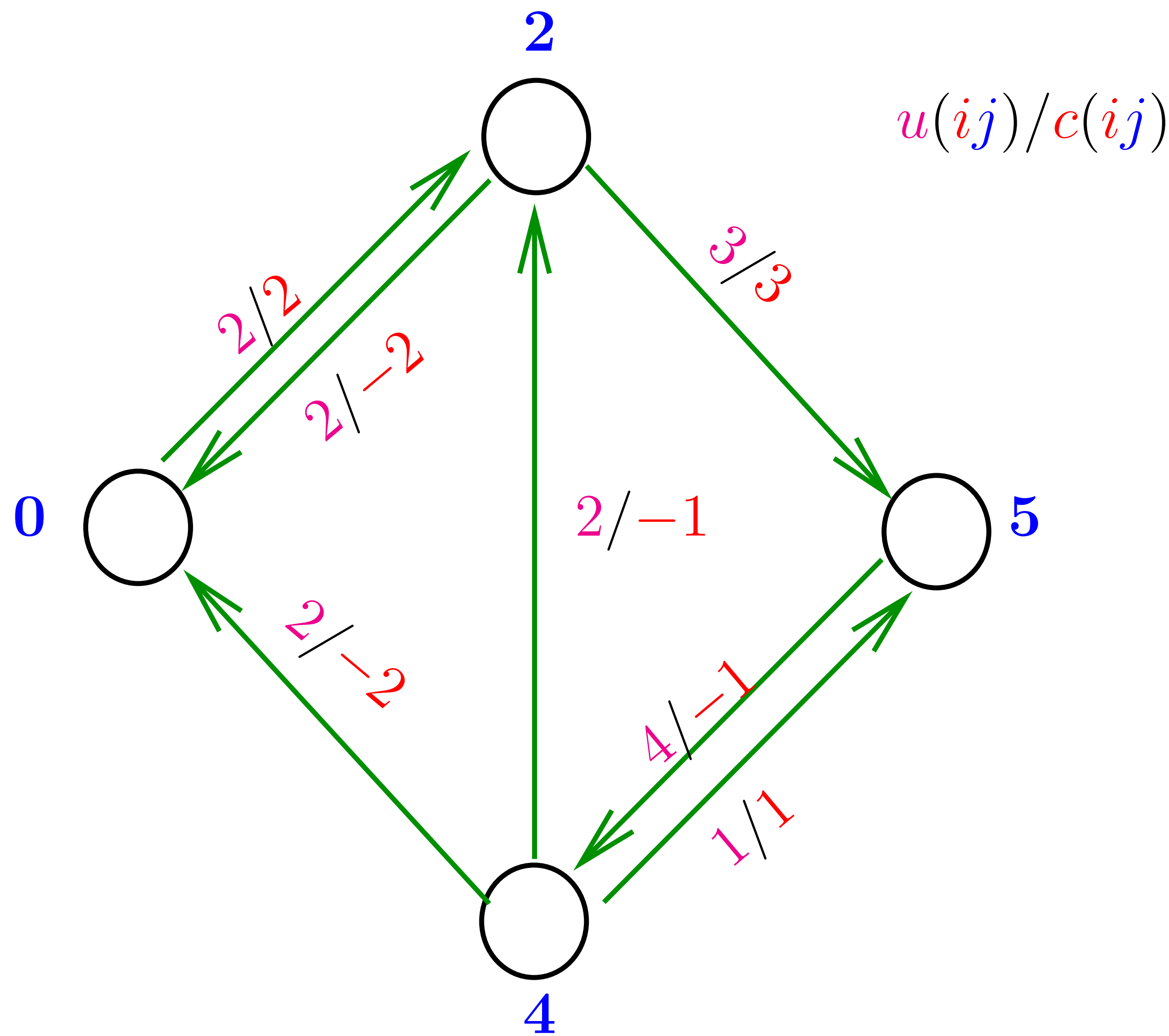


Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

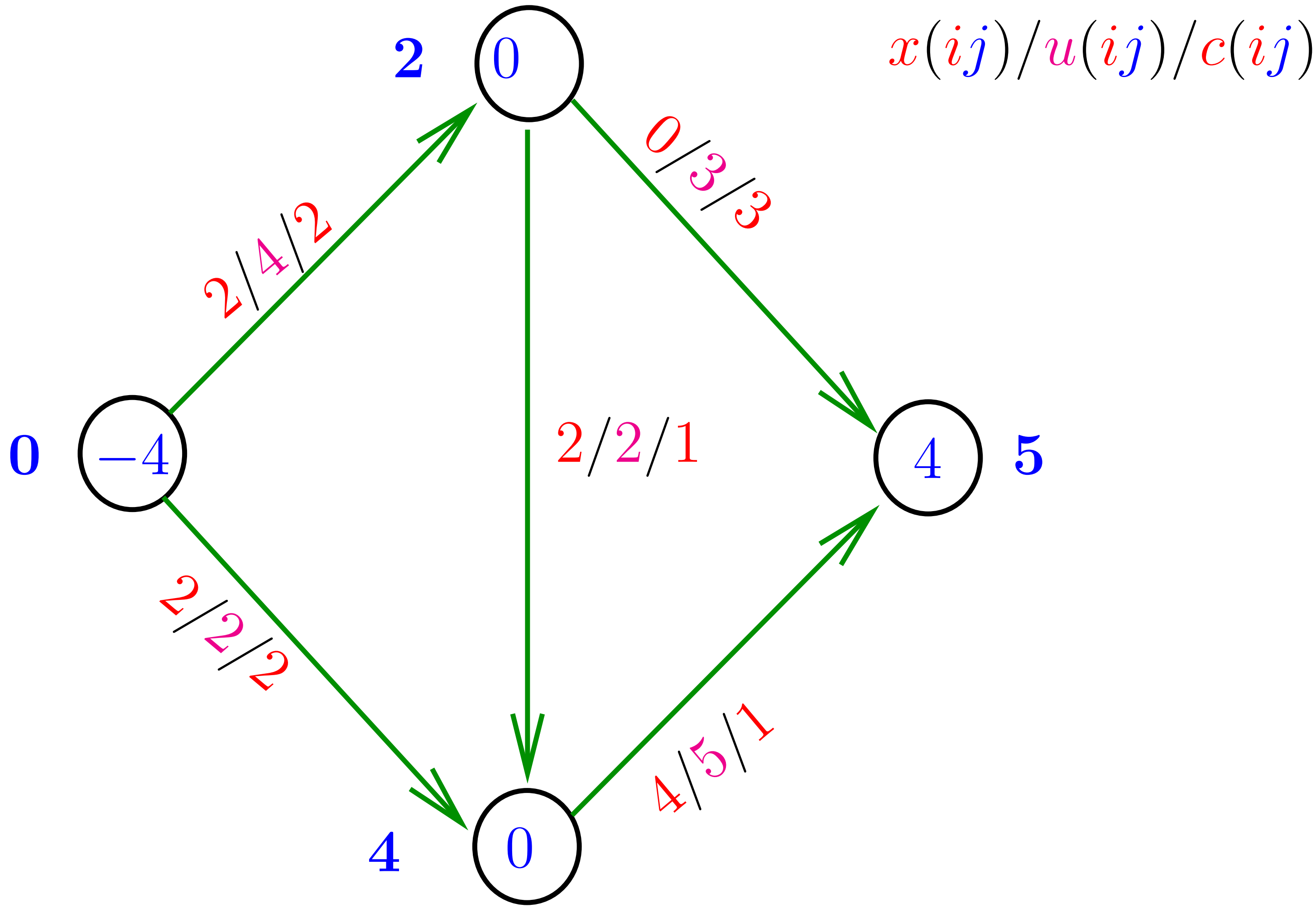
Rede residual



Potencial



Rede e potenciais



Custo $= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 14$

Folgas complementares

Seja x o fluxo encontrado.

Seja y o potencial encontrado.

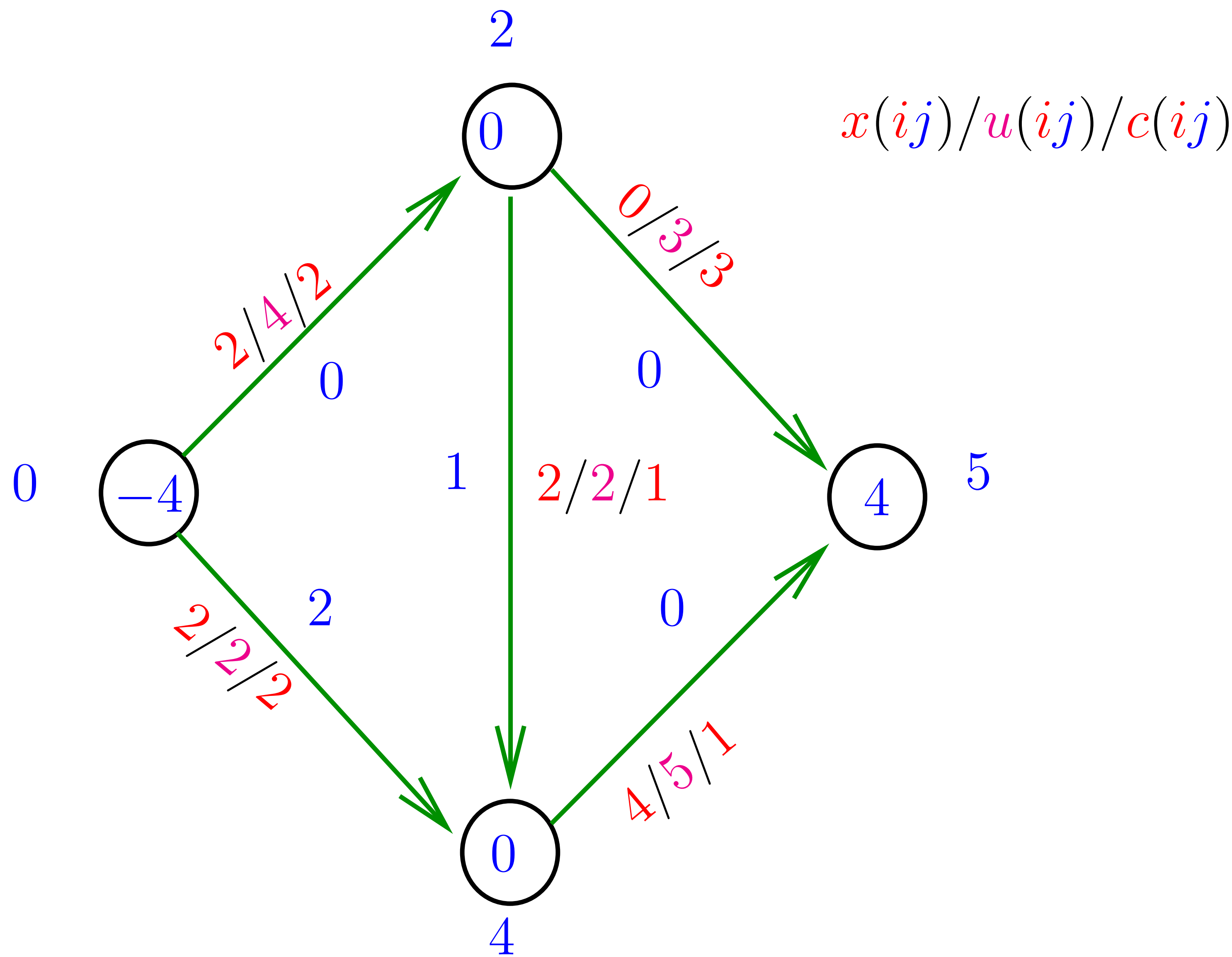
Temos as folgas de x e y são complementares já que,

$$y(j) - y(i) < c(ij) \Rightarrow x(ij) = 0 \quad \text{e}$$

$$y(j) - y(i) > c(ij) \Rightarrow x(ij) = u(ij) \ .$$

Conclusão: x é um fluxo viável de custo mínimo.

Solução dual viável



$yb - wu = 4 \times 5 - 2 \times 2 - 1 \times 2 = 14$

Algoritmo de Klein

KLEIN (N, A, u, b, c)

$\langle x, T\rangle \leftarrow$ FLUXO-VIÁVEL (N, A, u, b)
se x não está definido
    então devolva T

$\check{x} \leftarrow$ PSEUDOFLUXO(x)

repita

    $A_x \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$
    $\langle O, y\rangle \leftarrow$ CICLO-NEGATIVO(N, A_x, c)
    se O está definido
        então $\check{x} \leftarrow$ BARATEIE-FLUXO$(\check{x}, O)$

até que O não esteja definido

$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$
devolva x e y

Barateie fluxo

BARATEIE-FLUXO $(\check{x}, O)$

$\delta \leftarrow \min\{u(ij) - x(ij) : ij$ é arco de $O\}$

para cada arco ij em O **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

devolva $\check{x}$

Invariantes

No início de cada iteração do bloco de linhas 6–9 valem as seguintes invariantes:

(i0) x é inteiro;

(i1) x é satisfaz b;

(i2) x respeita u.

onde $x := \text{FLUXO}(\check{x})$.

Correção

- Depois da última iteração das linhas 6–9, na linha 11, x é um fluxo que satisfaz b e respeita u;
- y definido na linha 7 é um c-potencial em $(N, A_{\check{x}})$.
- Como y é um c-potencial em $(N, A_{\check{x}})$ então

$$\check{x}(ij) < u(ij) \Rightarrow y(j) - y(i) \leq c(ij)$$

  para cada arco ij em $A_{\check{x}}$ e portanto y tem folgas complementares às de x.
- se definirmos $w(ij) := \max\{0, y(j) - y(i) - c(ij)\}$, então o par (y, w) é solução dual-viável tal que

$$cx = yb - wu\ .$$

Conclusão: o algoritmo devolve um fluxo viável de custo mínimo.

Conclusões (1)

Os fatos a seguir são conseqüências da correção do algoritmo KLEIN.

Se (N, A, u, b, c) é um rede com função-capacidade u de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$, função-demanda b de N em $\mathbb{Z}$ e função-custo c de A em $\mathbb{Z}$ que admite um fluxo viável, então existe um fluxo viável de custo mínimo com valores inteiros.

Se (N, A, u, b, c) e x é um fluxo viável de custo mínimo então existe uma função custo $w \geq 0$ e um $(c + w)$-potencial y tal que $cx = yb - wu$.

Conclusões (2)

Se x é um fluxo viável, então vale uma e apenas uma das afirmações:

- x é um fluxo viável de custo mínimo;
- existe um ciclo de custo negativo na rede residual.

Teorema do fluxo viável de custo mínimo

Teorema da dualidade. Para qualquer rede (N, A, u, b, c), se x é um fluxo que satisfaz b, respeita u e minimiza cx então existe uma função-custo $w \geq 0$ e um $(c+w)$-potencial y tais que

$$cx = yb - wu \ .$$

Consumo de tempo

O número de execuções do bloco de linhas 6–9 é

$$< 2mUC,$$

onde $U := \max\{u(ij) : ij \in A\}$ e $C := \max\{|c(ij)| : ij \in A\}$.

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-3	$\mathrm{O}(n^2 m)$
4	$\mathrm{O}(m)$
6	$2mUC\,\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}(m^2 UC)$
7	$2mUC\,\mathrm{O}(nm) = \mathrm{O}(nm^2 UC)$
8-9	$2mUC\,\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(nmUC)$
11-12	$\mathrm{O}(m)$
total	$\mathrm{O}(nm^2 UC)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo KLEIN é
$O(nm^2UC)$.

Este consumo de tempo não é polinomial.