AULA 21

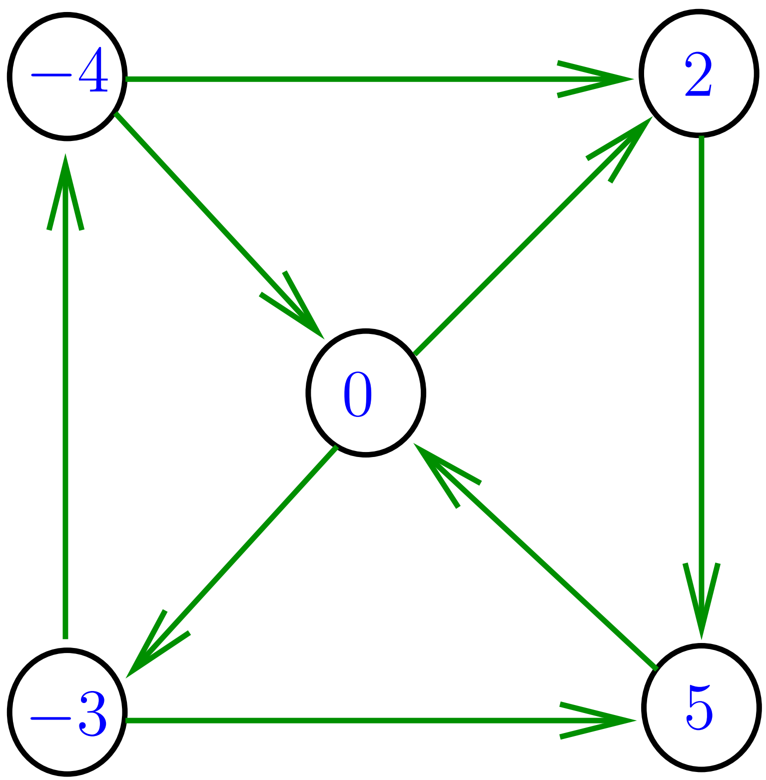
Fluxo viável

PF 19.1, 19.2, 19.3, 19.4

Função-demanda

Uma função-demanda em um grafo (N, A) é qualquer função que associa um número inteiro $b(i)$ a cada nó i, ou seja, qualquer função

$$b : N \to \mathbb{Z} \, .$$

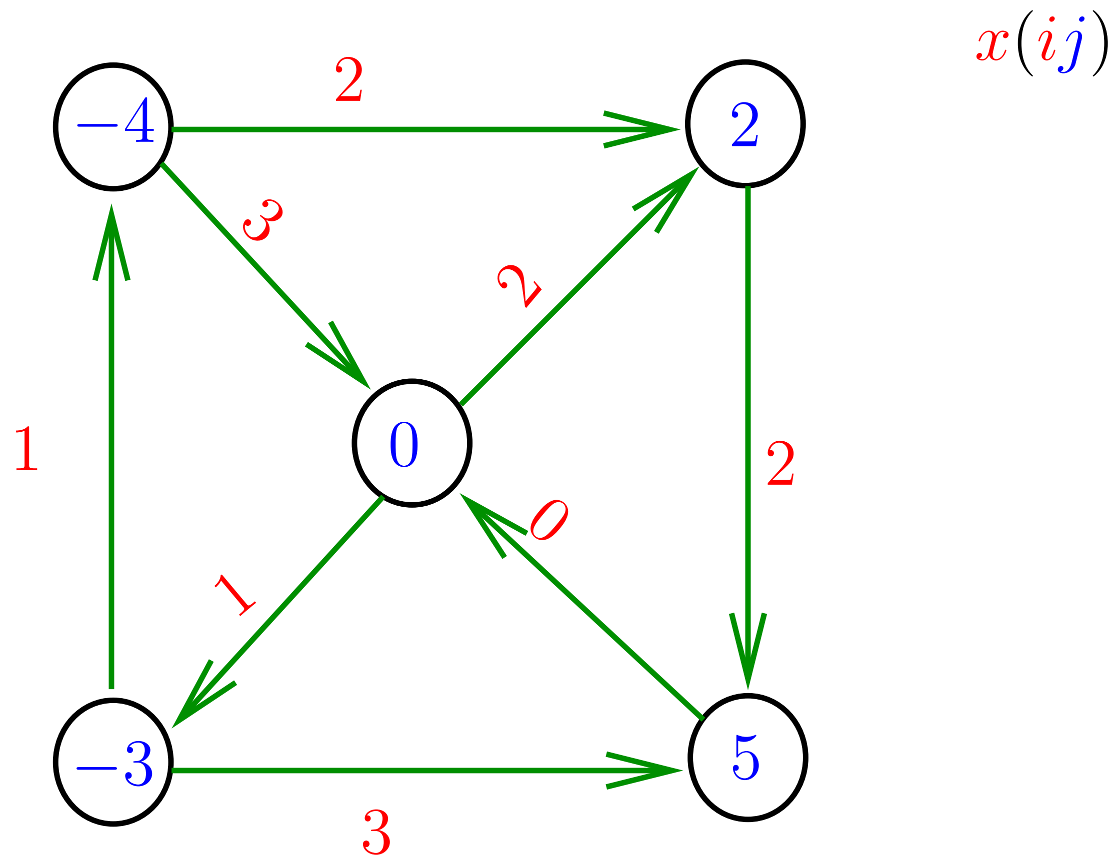


Fluxos e demandas

Um fluxo é uma função de N em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

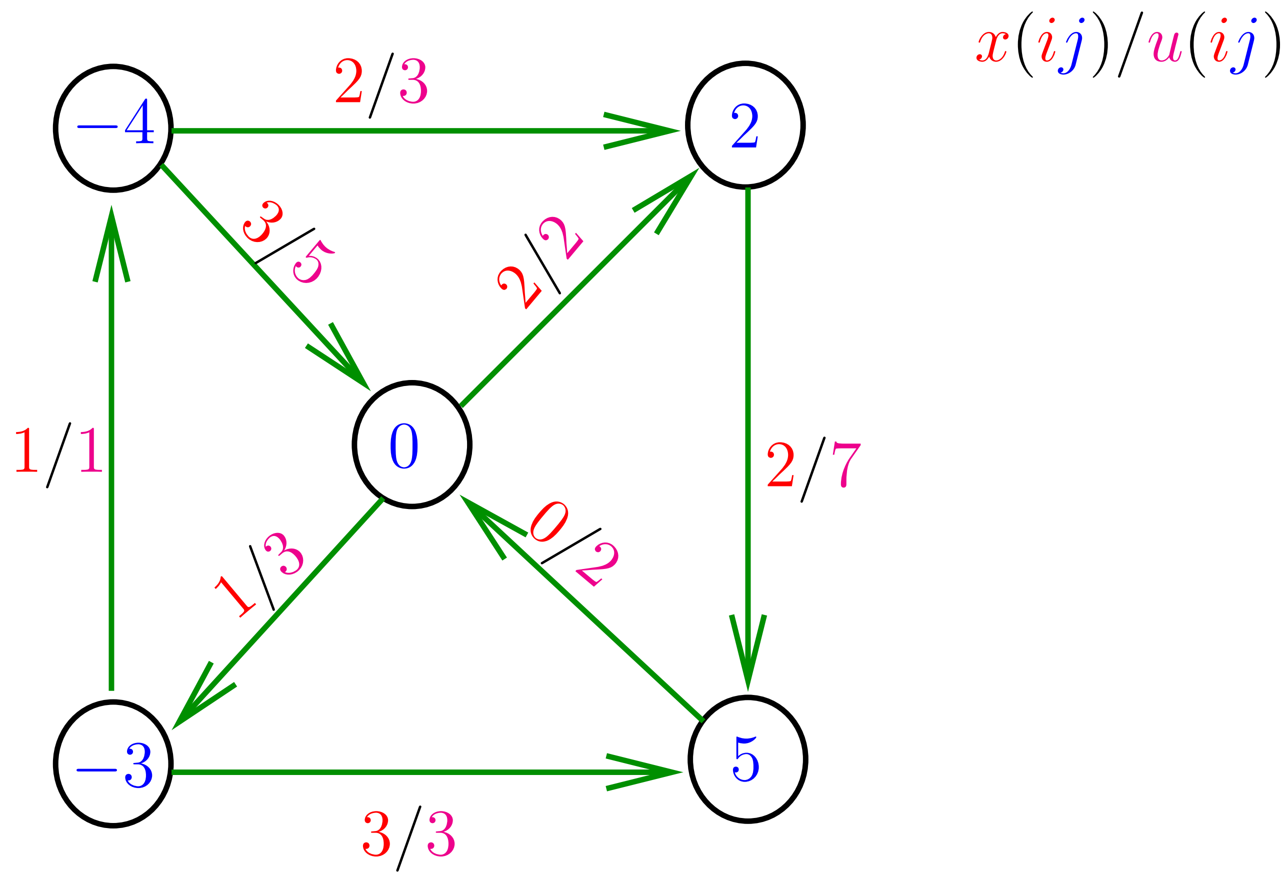
Um fluxo x satisfaz uma função-demanda b se, para cada no i,

$$e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i}) = b(i) \ .$$



Problema do fluxo viável

Problema: Dada uma rede (N, A, u, b) com função-capacidade u e função-demanda b, encontrar um fluxo que satisfaça b e respeite u.



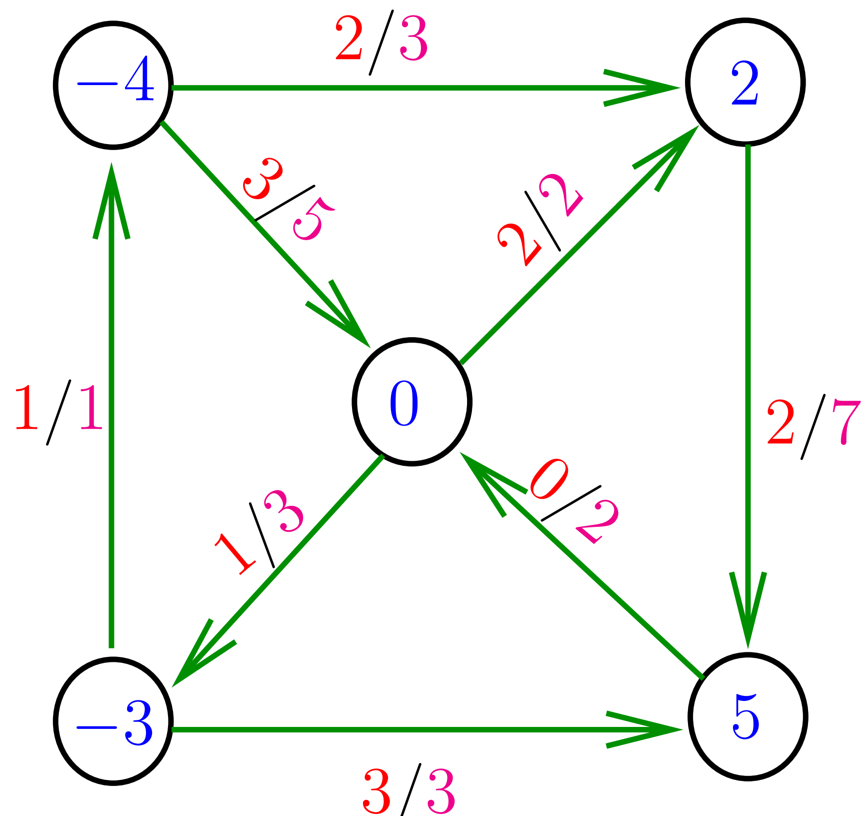
Condição de viabilidade

Dada uma rede (N, A, u, b) com função-capacidade u e função-demanda b, se existe fluxo que satifaz b e respeita u, então

$$-u(T, \overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

para todo subconjunto T de N.

$x(ij)/u(ij)$

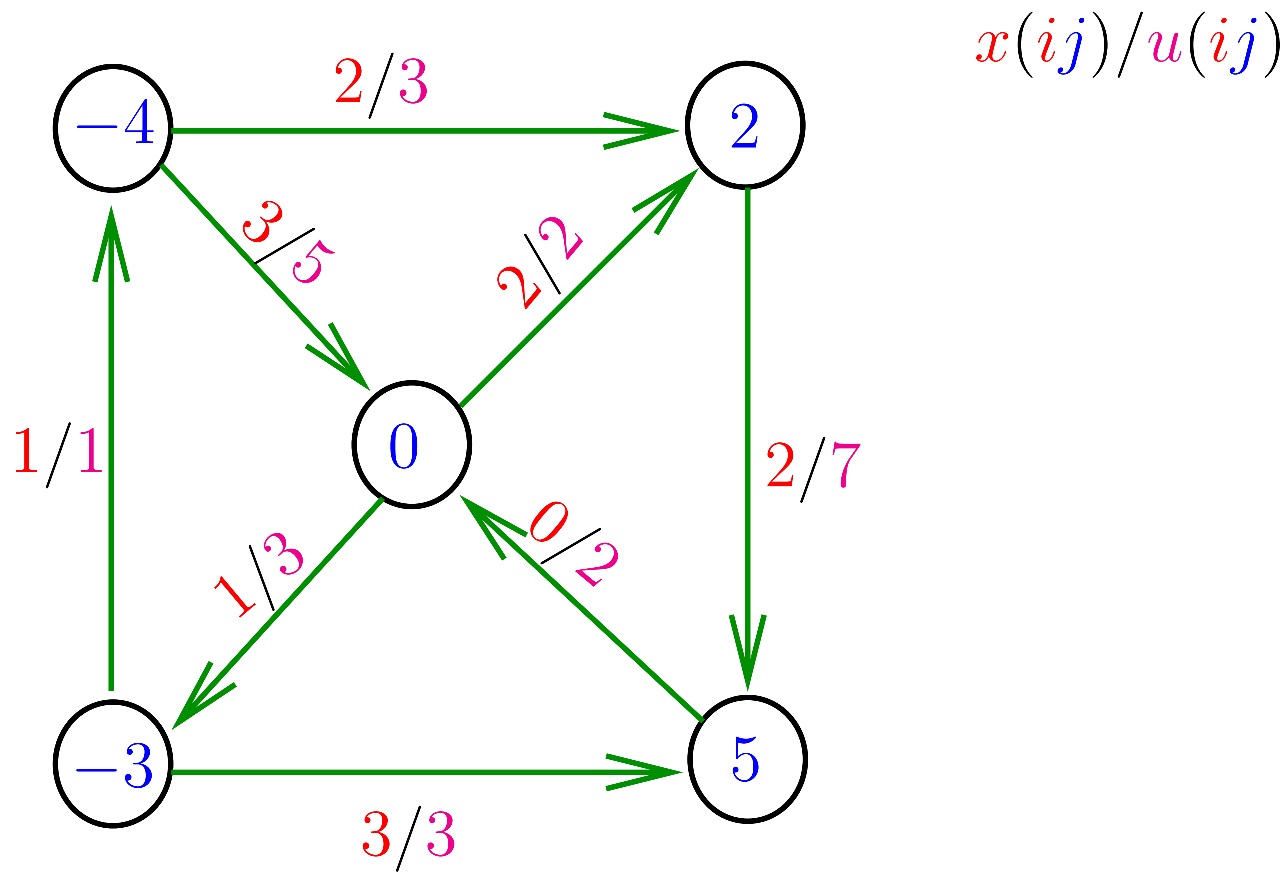


Condição de viabilidade (equivalente)

Se existe fluxo que satifaz b e respeita u, então

$$b(N) = 0 \quad \text{e} \quad b(T) \leq u(\overline{T}, T) \ ,$$

para todo subconjunto T de N.

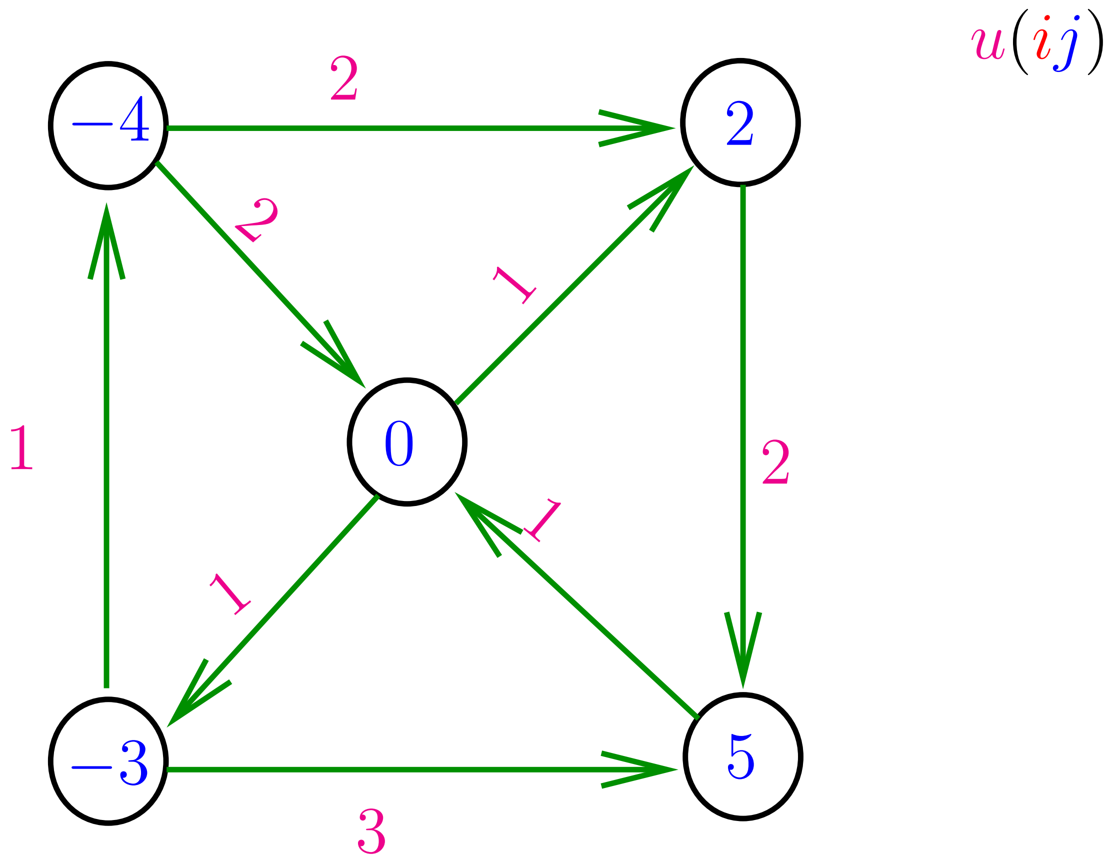


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto T de N,

$$-u(T,\overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T},T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.

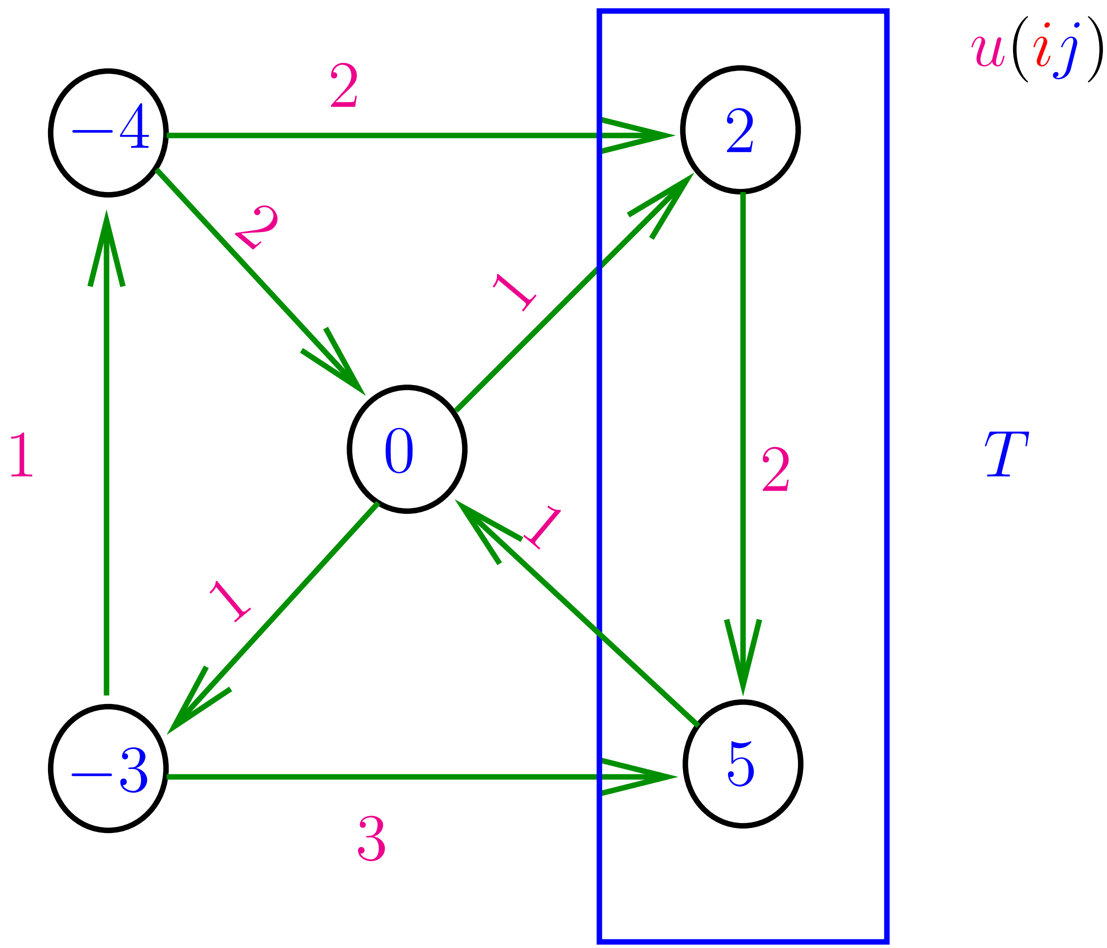


Teorema de Gale

Se para todo subconjunto T de N,

$$-u(T,\overline{T}) \leq b(T) \leq u(\overline{T},T) \ ,$$

então existe fluxo que satifaz b e respeita u.



Algoritmo de fluxo viável

Recebe uma rede simétrica (N, A, u, b) e devolve um fluxo viável x ou um subconjunto S de N que viola a condição de Gale.

FLUXO-VIÁVEL (N, A, u, b)

se $b(N) \neq 0$ **então devolva** N
$\check{x} \leftarrow 0 \quad e \leftarrow 0$
enquanto existe s em N tal que $e(s) > b(s)$ **faça**
    $A_{\check{x}} \leftarrow \{ij \in A : \check{x}(ij) < u(ij)\}$
    $\langle y, \pi \rangle \leftarrow$ CAMINHO$(N, A_{\check{x}}, s)$
    se existe t tal que $y(t) = 0$ e $e(t) < b(t)$ **então**
        INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL$(u, \check{x}, A_\pi, s, t)$
    senão $S \leftarrow \{i \in N : y(i) = 0\}$
        devolva S
$x \leftarrow$ FLUXO$(\check{x})$
devolva x

Incremente fluxo viável

INCREMENTE-FLUXO-VIÁVEL $(u, \check{x}, A_\pi, s, t)$

Seja P um caminho de s a t em (N, A_π)

$\delta_1 \leftarrow \min\{u(ij) - \check{x}(ij) : ij$ é arco de $P\}$

$\delta_2 \leftarrow \min\{e(s) - b(s), b(t) - e(t)\}$

$\delta \leftarrow \min\{\delta_1, \delta_2\}$

para cada arco ij em P **faça**

  $\check{x}(ij) \leftarrow \check{x}(ij) + \delta$

  $\check{x}(ji) \leftarrow \check{x}(ji) - \delta$

$e(s) \leftarrow e(s) - \delta$

$e(t) \leftarrow e(t) + \delta$

Invariantes

Na linha 3 valem as seguintes invariantes:

(i1) $e(i) = x(\bar{i}, i) - x(i, \bar{i})$, para cada nó i;

(i2) $\sum_{i \in N} (b(i) - e(i)) = 0$;

(i3) x respeita u.

Consumo de tempo

O consumo de tempo do algoritmo é
FLUXO-VIÁVEL $O((n+m)nB)$.

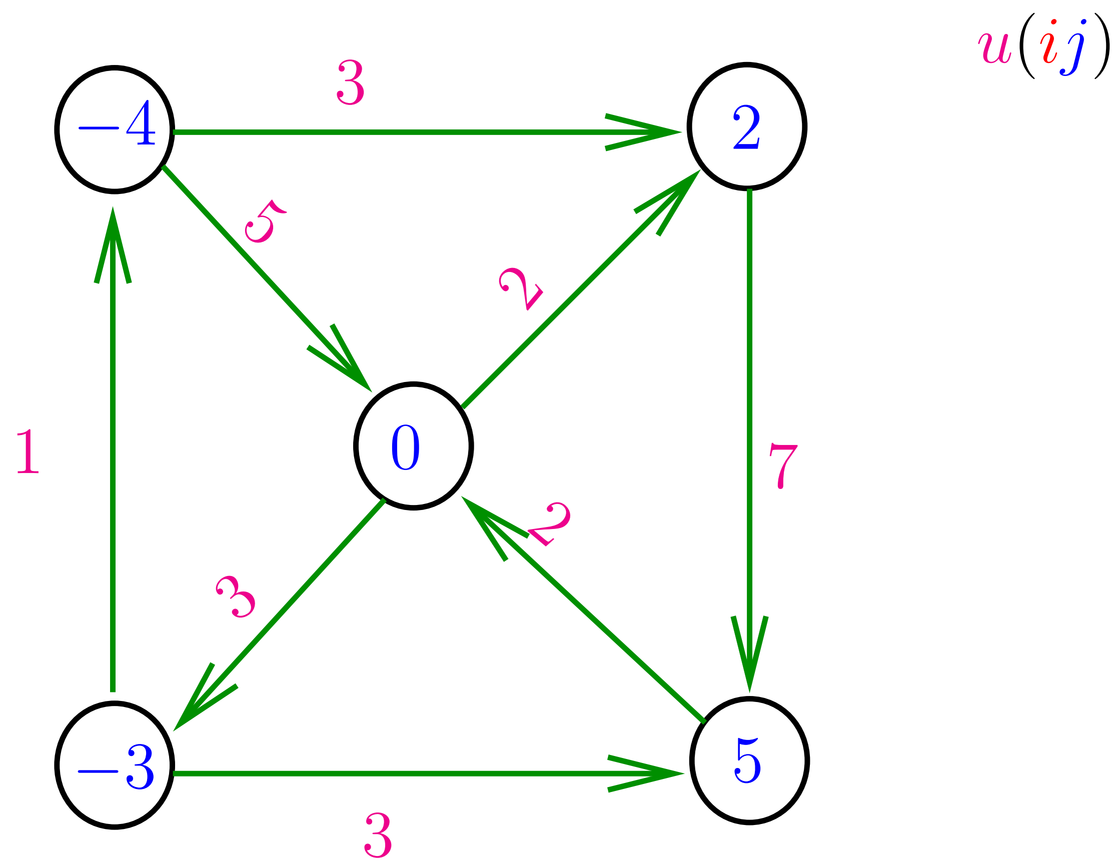
$B := \max\{|b(i)| : i \in N\}$

Este consumo de tempo não é polinomial.

Ele é pseudo-polinomial.

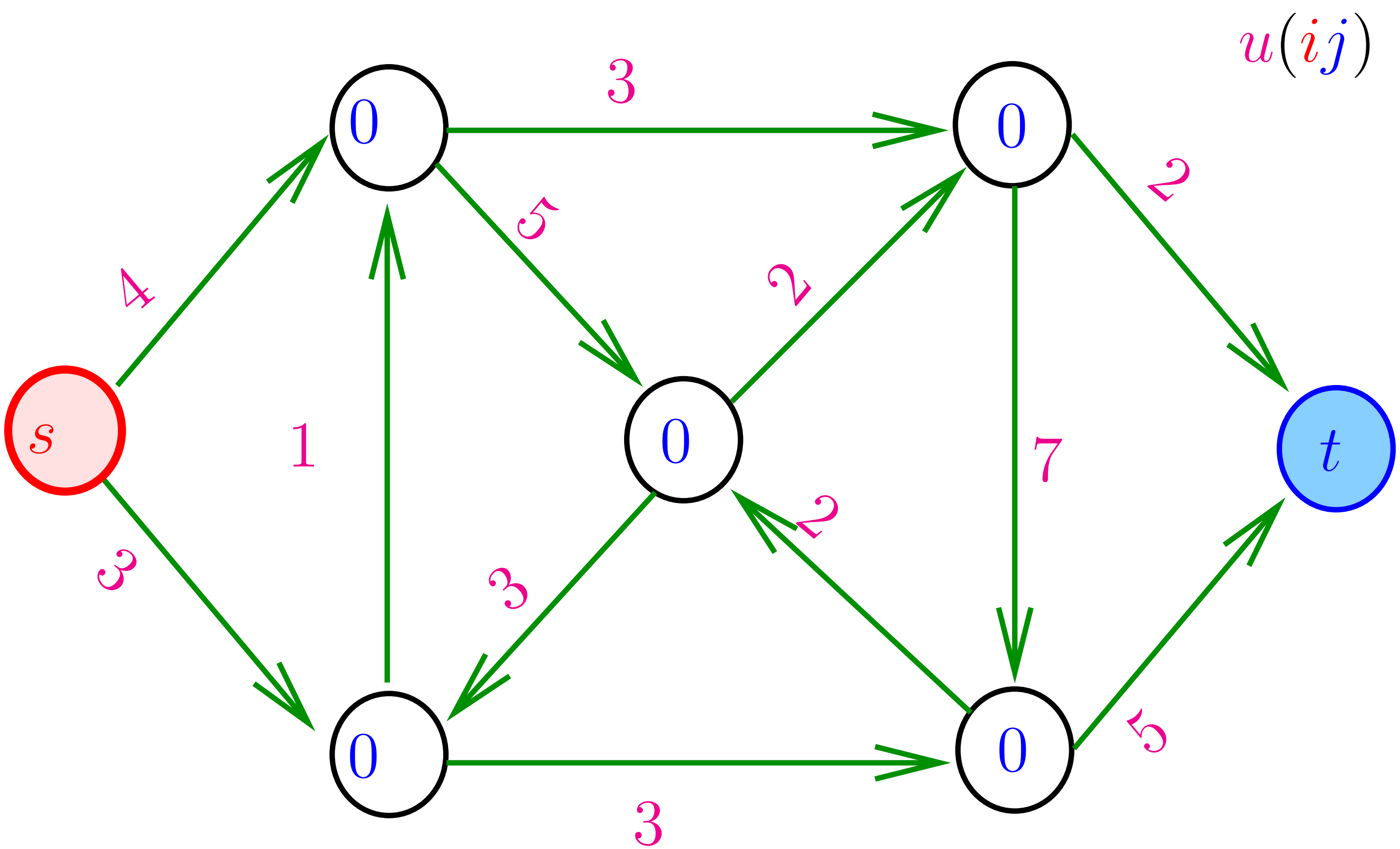
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



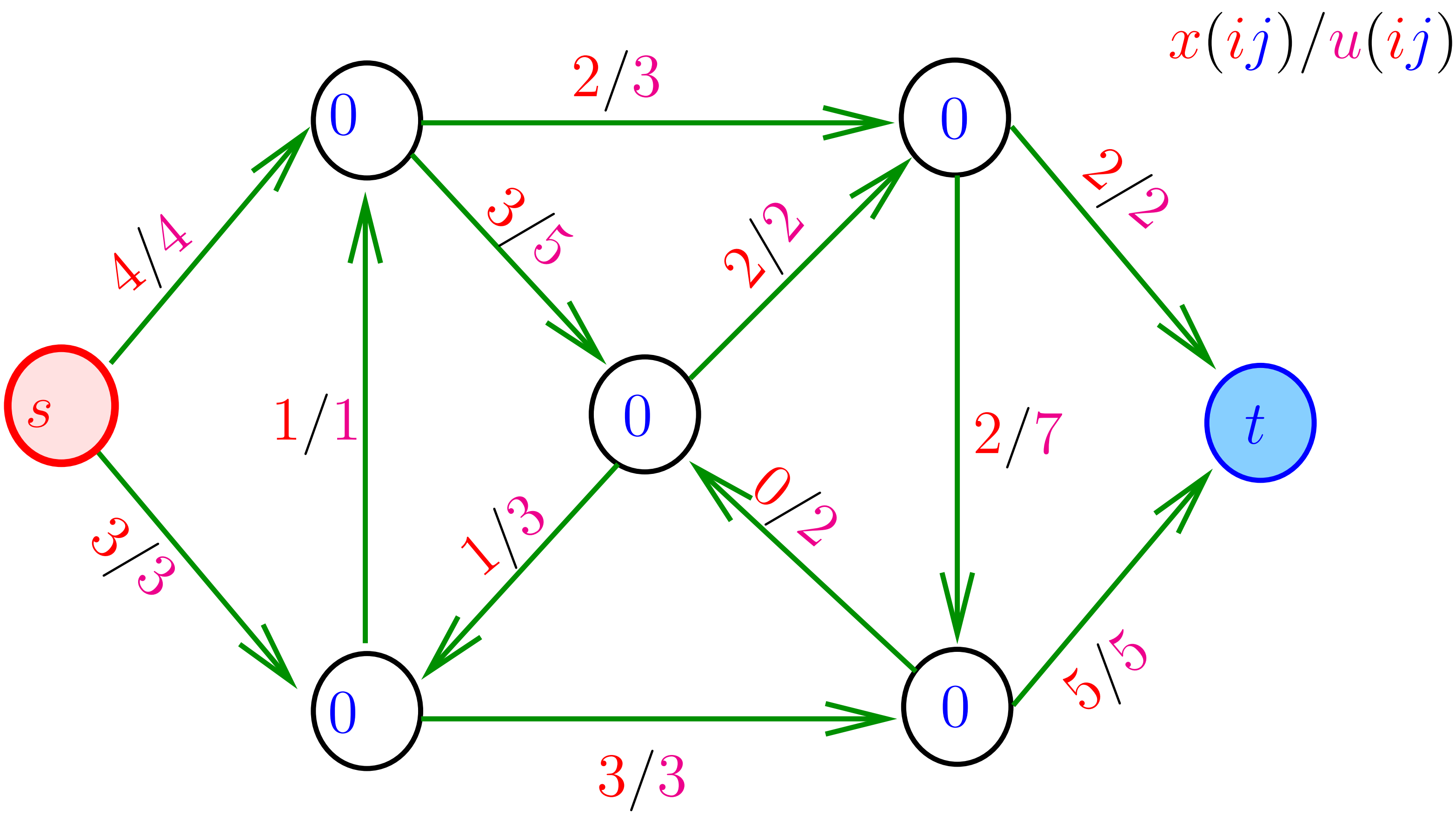
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



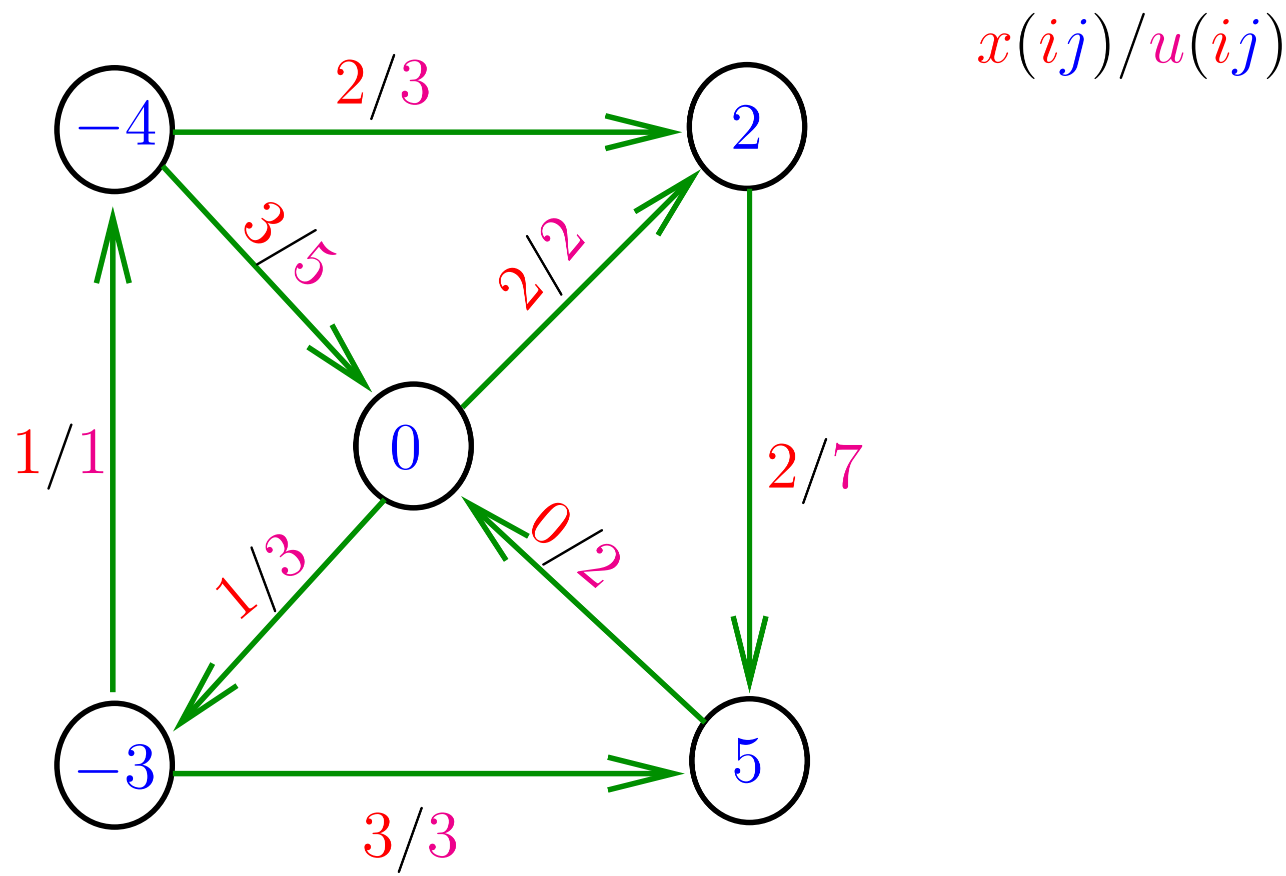
Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



Algoritmo fortemente polinomial

Um fluxo viável pode ser encontrado resolvendo-se um problema do fluxo máximo em uma rede auxiliar.



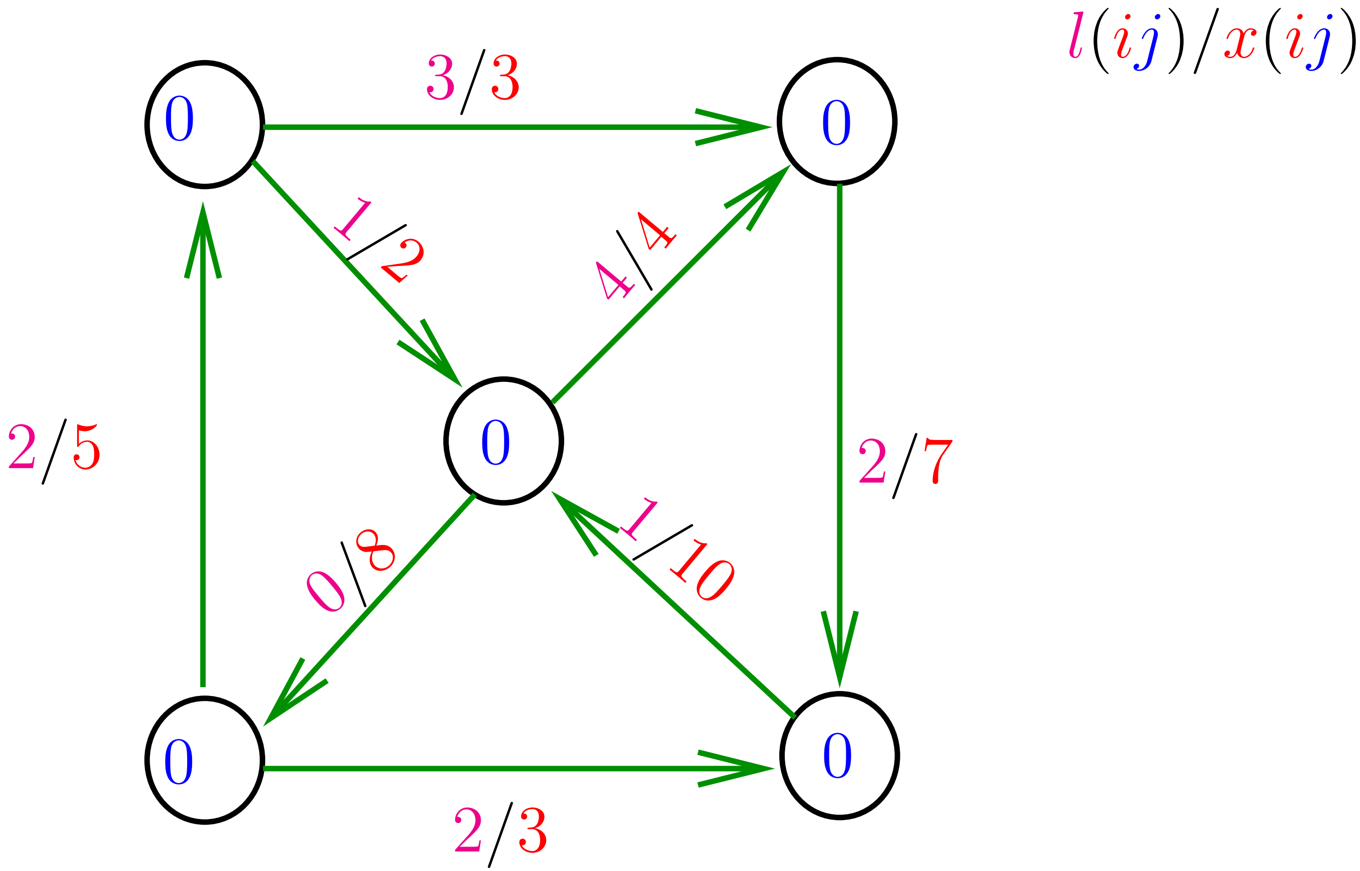
Circulações

PF 26

Delimitação inferior

Uma função-limite-inferior é qualquer função l de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$.

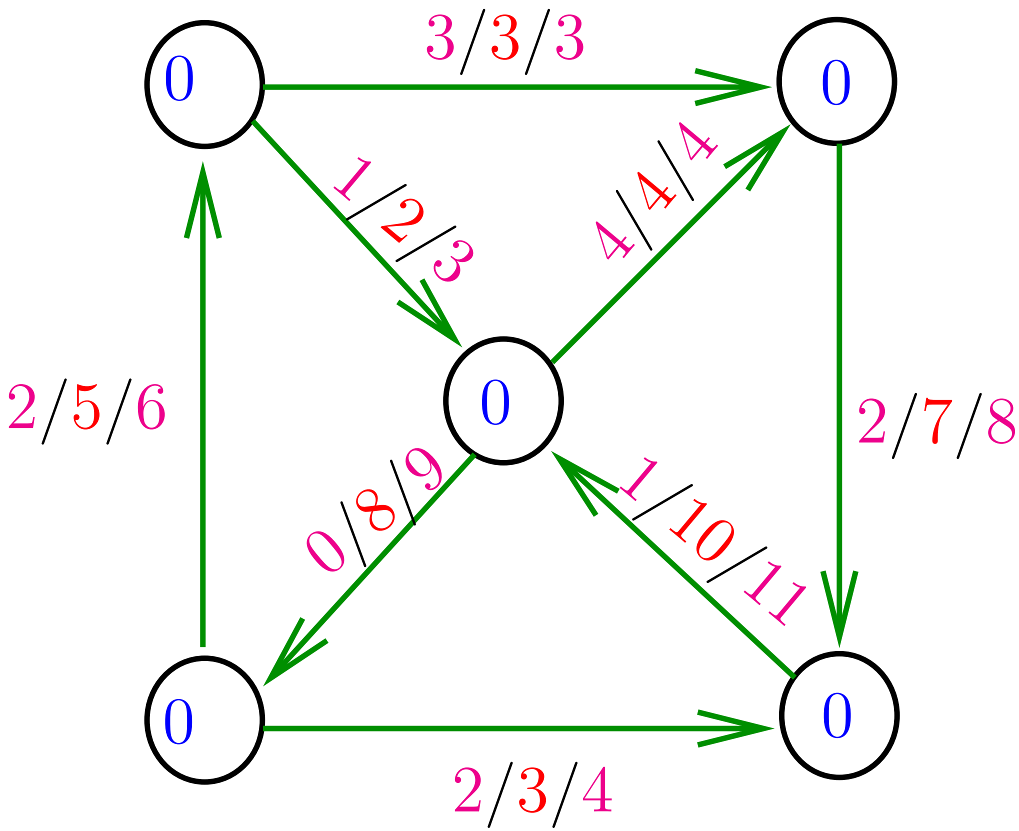
Uma circulação satisfaz uma função l se $l \leq x$.



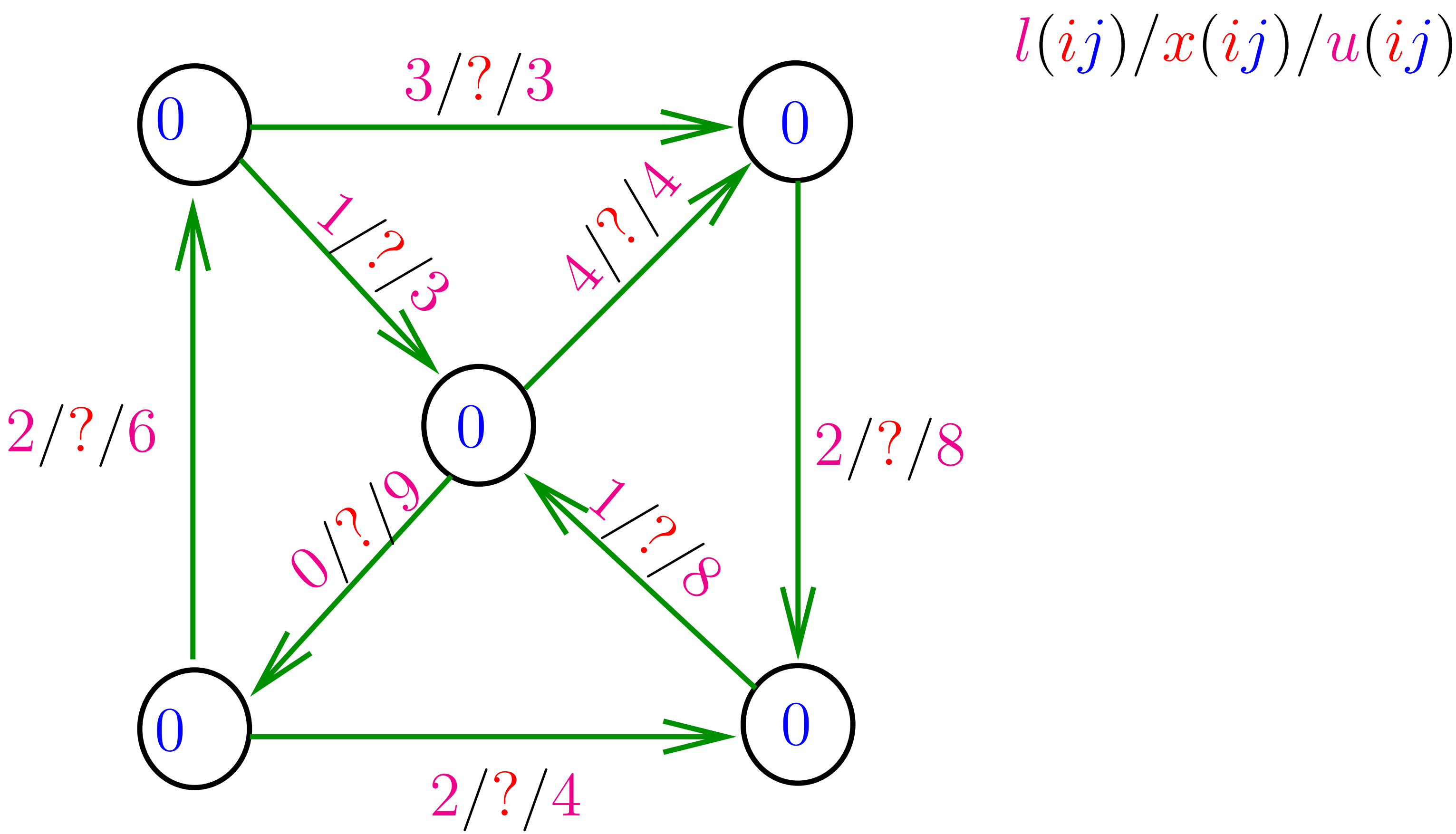
Problema da circulação viável

Dado uma rede (N, A, l, u) com função-limite-inferior l e função-capacidade u tais que $l \leq u$, encontrar uma circulação que satisfaz l e respeita u.

$l(ij)/x(ij)/u(ij)$



Existe circulação viável?

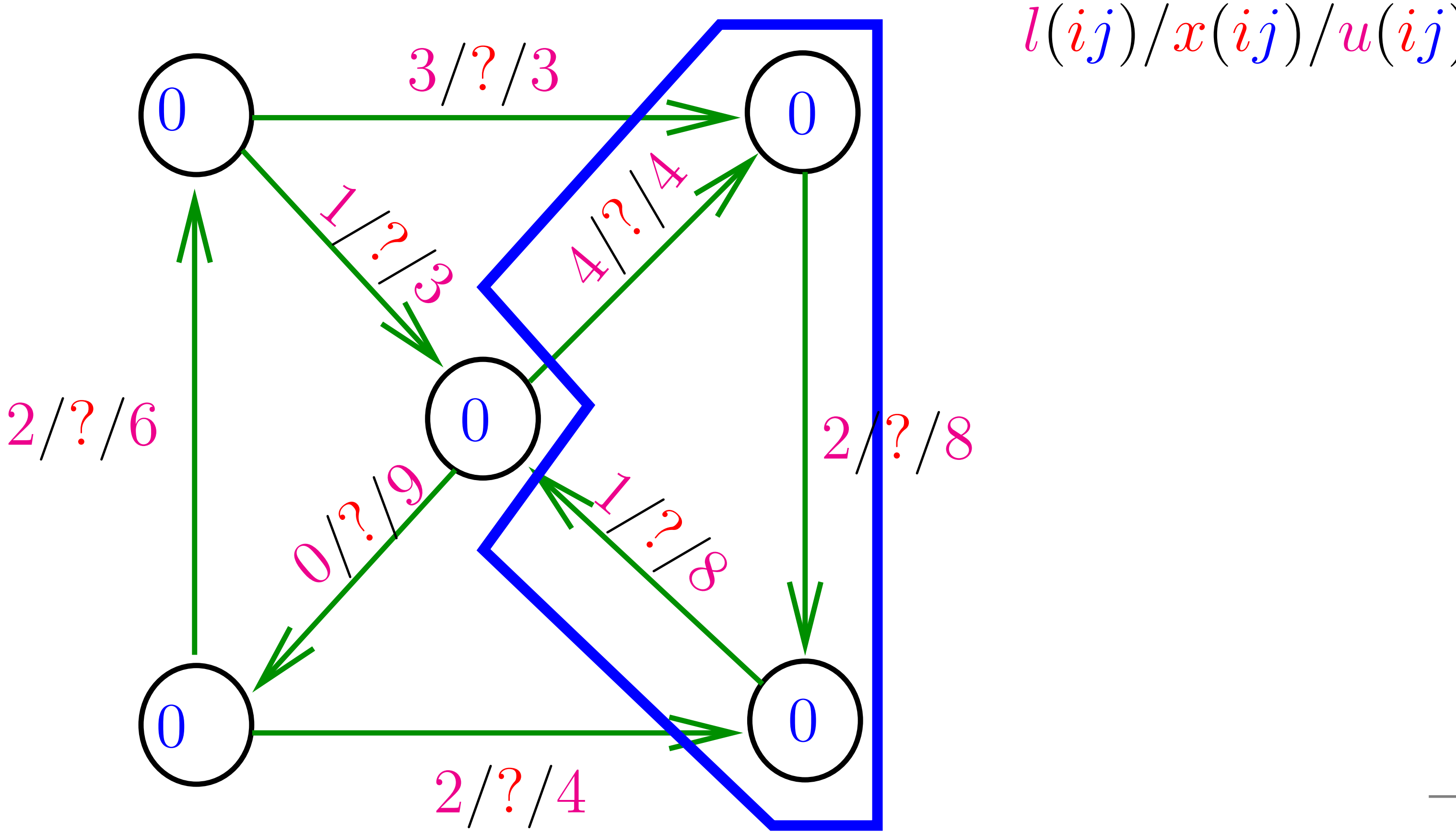


Teorema de Hoffman

Existe uma circulação x tal que $l \leq x \leq u$ se e somente se $l \leq ucor$ e

$$l(\overline{T}, T) \leq u(T, \overline{T})$$

para todo subconjunto T de N.



Teorema de Hoffman (2)

Seja (N, A, u, l) uma rede com funções capacidades u e l. Existe uma circulação x tal que $l \leq x \leq u$ se e somente se

$$l(\overline{T}, T) \leq u(T, \overline{T})$$

para todo subconjunto T de N.

Demonstração (esboço):

$(\Rightarrow)$ Suponha que x é uma circulação satisfazendo as condições e T é um subconjunto de N, então

$$\begin{aligned} l(\overline{T}, T) &\leq x(\overline{T}, T) \\ &= x(T, \overline{T}) \\ &\leq u(T, \overline{T}) \ . \end{aligned}$$

Teorema de Hoffman (3)

Demonstração (esboço):

$(\Leftarrow)$ Escolha um fluxo x tal que $l \leq x \leq u$ e

$$\Phi = \sum(|e(i)| : i \in N)$$

é mínimo.

Se $\Phi = 0$, então x é uma circulação.

Podemos supor $\Phi > 0$. Seja $t \in N$ tal que $e(t) > 0$.

Seja $T := \{i \in N :$ existe ti-pseudo-caminho incremento$\}$.

$$\begin{aligned} 0 &< e(T) \\ &= x(\overline{T}, T) - x(T, \overline{T}) \\ &= l(\overline{T}, T) - u(T, \overline{T}) \ . \end{aligned}$$